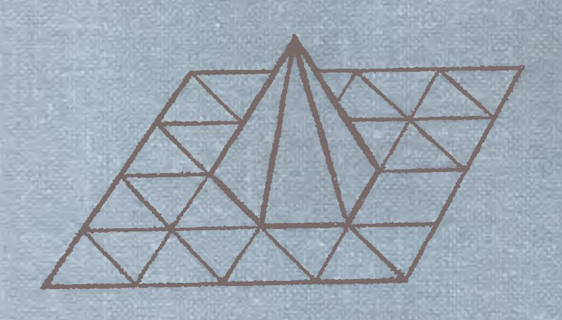
Дж. Оден

Конечные элементы в нелинейной механике сплошных сред



Издательство
Мир

Advanced Engineering Series
Irving H. Shames, Consulting editor

Finite elements of nonlinear continua

J. T. Oden

Professor of Engineering Mechanics
The University of Alabama in Huntsville

McGRAW-HILL BOOK COMPANY

New York · St. Louis · San Francisco · Düsseldorf · Johannesburg
Kuala Lumpur · London · Mexico · Montreal · New Delhi · Panama
Rio de Janeiro · Singapore · Sydney · Toronto

1972

Дж. ОДЕН

Конечные элементы в нелинейной механике сплошных сред

Перевод с английского
А. М. ВАСИЛЬЕВА

Под редакцией
Э. И. ГРИГОЛЮКА

ИЗДАТЕЛЬСТВО «МИР»
МОСКВА 1976

УДК 518.5+531+532+536
О-41

Книга посвящена систематическому изложению одного из новейших методов численного анализа — метода конечных элементов — и его приложений к широкому классу нелинейных задач механики сплошных сред и строительной механики.

Понятие конечного элемента служит тем звеном, которое объединяет основы механики сплошных сред и современные методы численного анализа и дает инструмент для получения количественной информации о нелинейных процессах. Хотя основное внимание уделено решению задач механики твердого тела, материал излагается таким образом, что результаты могут быть применены и в ряде других областей математической физики, таких, как динамика разреженных газов или теория электромагнетизма.

Книга представляет значительный интерес для инженеров-исследователей и научных работников, занимающихся вопросами нелинейной механики и ее практическими приложениями. Она полезна преподавателям, аспирантам и студентам старших курсов.

Редакция литературы по математическим наукам

Дж. Оден

Конечные элементы в нелинейной механике сплошных сред

Редактор В. Авербух. Художник Н. Дронова
Художественный редактор В. Шаповалов. Технический редактор Н. Иовлева

Сдано в набор 26/III 1976 г. Подписано к печати 28/IX 1976 г.
Бумага тип. № 2 60×90[1]/16 14,50 бум. л. 29 усл. печ. л., Уч.-изд. л. 28,02
Изд. № 1/8004 Цена 2 р. 13 к. Зак. 01310

ИЗДАТЕЛЬСТВО «МИР»
Москва, 1-й Рижский пер., 2

Ордена Трудового Красного Знамени Московская типография № 7 «Искра революции» Союзполиграфпрома при Государственном комитете Совета Министров СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли.
Москва, К-1, Трехпрудный пер., 9

О $\frac{20305\text{-}043}{041(01)\text{-}76}$ 43-76

ПРЕДИСЛОВИЕ РЕДАКТОРА ПЕРЕВОДА

Развитие вычислительных машин и численных методов открыло большие перспективы использования конечноэлементного анализа при исследовании проблем механики и проектировании современных конструкций и аппаратов.

Предлагаемая вниманию читателя монография представляет собой систематизированное изложение метода конечных элементов, охватывающее многочисленные частные публикации, главным образом на протяжении последнего десятилетия. В ней рассматриваются линейные и нелинейные проблемы механики сплошных сред. И хотя главное внимание сосредоточено на вопросах механики твердого тела, общность изложения и наличие большого числа примеров, иллюстрирующих приложения теории, позволяют распространить описанные в книге методы на случай нелинейной механики жидкости, а также электромагнитных процессов в непрерывных телах.

В книге сначала дана общая теория конечных элементов для сплошных нелинейно деформируемых сред, когда нелинейность обусловлена и внутренним сопротивлением материала внешним воздействиям, и конечными перемещениями узлов элемента. Затем строятся элементы, пригодные для решения термомеханических задач, и конечноэлементные модели материалов с памятью. При исследовании конечно-деформируемых сред установлены матрицы жесткости для большого класса изопараметрических элементов упругих тел. Подробно описаны и проанализированы методы численного решения нелинейных уравнений. Приведены конкретные результаты численных расчётов для ряда типичных задач.

Завершает монографию обширный список литературы, включающий в себя около 400 наименований. При переводе в него добавлено несколько работ. Они помечены звездочкой.

Эту книгу можно рекомендовать всем, интересующимся проблемами приближенного решения задач механики сплошных сред.

Э. И. Григолюк

Посвящается
Барбаре

ПРЕДИСЛОВИЕ

Книга посвящена описанию метода конечных элементов и его приложений к широкому классу нелинейных задач механики сплошных сред и строительной механики. Особое внимание уделено решению задач механики твердого тела, однако основы метода изложены с достаточной степенью общности, допускающей применение, например, к нелинейным задачам гидродинамики, электродинамики, теории дифференциальных уравнений в частных производных. Рассмотрены также различные численные методы решения больших систем нелинейных уравнений.

Интерес к численным исследованиям в области механики сплошных сред возник у меня в результате продолжительных занятий нелинейной механикой, когда я уяснил громадные возможности, предоставляемые современными ЭВМ для решения нелинейных задач, и осознал, что практическая ценность современных нелинейных теорий поведения конструкций и материалов определяется в первую очередь их применимостью к конкретным задачам.

Несколько лет назад я занялся анализом возможности применения метода конечных элементов к изучению больших деформаций упругих тел. Неожиданный успех уже первых исследований (некоторые из результатов этих исследований вошли в настоящую книгу) вдохновил меня, и я решил заняться нелинейными сплошными средами общего вида. В последующие годы я подготовил и прочел в Алабамском университете в Хантсвилле курс лекций по применениям метода конечных элементов в нелинейной механике, в котором я попытался объединить основы механики сплошных сред и современные методы численного анализа. При таком объединении каждый из этих предметов приобретает новое содержание и значение. Нелинейные теории поля в механике ценны уже не только тем, что они представляют собой элегантное обобщение классических теорий, но и тем, что с помощью электронных машин они становятся источником получения количественной информации о действительных происходящих в природе нелинейных явлениях. Понятие конечного элемента с его простотой и общностью служит тем самым звеном, которое соединяет вместе эти различные предметы, причем соединяет их способом, который в ретроспективе выгля-

дит гораздо естественнее многих классических приемов прикладной механики.

При отборе материала для книги я не стремился к тому, чтобы дать исчерпывающий набор решений для всех типов нелинейных задач. Моей целью было описать общий и физически наглядный метод получения дискретных моделей сплошной среды и представить образцы применения этого метода к исследованию характерных нелинейных задач механики твердого тела. После усвоения основных принципов читатель сможет сам приложить метод к целому ряду не рассмотренных в книге задач.

Для того чтобы книгу можно было читать независимо от других источников, в гл. I приведены вводные сведения о методе конечных элементов и некоторые сведения по кинематике сплошной среды, а также напоминаются характеристики напряженного состояния и фундаментальные законы сохранения массы и количества движения.

В гл. II излагается общая теория конечных элементов. При этом свойства конечноэлементных моделей полей общего вида представлены в форме, пригодной для пространств любой конечной размерности. Рассматриваются различные типы конечноэлементных моделей, а также критерии сходимости метода и некоторые приложения к линейным и нелинейным дифференциальным уравнениям, волновым явлениям и динамике разреженных газов. Кроме того, в этой главе подробно обсуждаются понятия сопряженных подпространств и сопряженных аппроксимаций.

Гл. III посвящена механике типичного конечного элемента сплошной среды. Она начинается с изложения соответствующих термодинамических понятий и принципов, за которым следует вывод локальной и глобальной форм закона сохранения энергии для сплошных сред. Используя теорию, развитую в гл. II, мы далее выводим из закона сохранения энергии общие кинематические соотношения и уравнения движения и теплопроводности для конечного элемента сплошной среды. В главу включен также краткий обзор теории определяющих уравнений и указан вид определяющих уравнений для дискретных моделей полей перемещений и полей температур.

В гл. IV рассматриваются приложения метода конечных элементов к нелинейным задачам теории упругости. Глава начинается с обзорного изложения теории конечных упругих деформаций. Затем выводятся нелинейные жесткостные соотношения для упругих тел и приводятся решения ряда задач, в том числе задач о конечных деформациях несжимаемых тел вращения, растяжении и раздувании упругих мембран, конечной плоской деформации несжимаемых упругих тел. В эту главу включен также обзор различных методов решения больших систем нелинейных уравнений.

Глава V посвящена изучению неупругого поведения, причем особое внимание уделяется термомеханически простым материалам и материалам с памятью. Выводятся общие уравнения движения и теплопроводности для конечных элементов таких материалов и описывается ряд применений этих уравнений к некоторым избранным задачам, в частности к задачам линейной и нелинейной связанной термоупругости и нелинейной связанной термовязкоупругости.

Я обнаружил, что написание книги является нелинейной задачей, решение которой требует многих итераций. Поскольку в настоящем своем виде этот текст очень мало отличается от нескольких предыдущих итераций, я публикую его с надеждой, что он может служить приближенным решением стоявшей передо мной задачи. Однако нелинейная прикладная механика — еще очень юная область исследований, растущая все быстрее с каждым днем. Так что последовательность еще далеко не сошлась. Если эта книга послужит начальным приближением для последующих итераций, она сыграет предназначенную ей роль.

Я признателен за поддержку, полученную при подготовке книги от ряда коллег и учеников. Особенно полезными были замечания и предложения профессоров Х. Браули и Г. Агирре-Рамиреса. Весьма плодотворным было для меня обсуждение ряда вопросов с профессорами Т. Дж. Чангом и Дж. Вемпнером. Первые варианты некоторых глав этой книги распространялись среди студентов, и я искренне благодарен им за их отзывы. Особенно я признателен Дж. Ки, Д. Бхандари, У. Армстронгу, Т. Сато, Дж. Поу и Д. Кроссу. Мой долг выразить благодарность НАСА и Научно-исследовательскому отделу воздушных сил США, при поддержке которых были осуществлены исследования, способствовавшие возникновению ряда изложенных в книге идей.

Моя большая благодарность сотрудникам издательства Мак-Гроу-Хилл, особенно Джеку Мейзелу, за терпеливость и старательность, с которой они выверили огромное количество математических символов и верхних и нижних индексов в моей рукописи. Мне доставляет удовольствие поблагодарить также миссис Д. Уиджент, которая с энтузиазмом взялась за перепечатку всей рукописи и с большим подъемом проделала эту огромную работу.

В заключение, но далеко не в последнюю очередь, я хочу выразить признательность той, которой посвящена эта книга. Ее ободряющие слова, помощь в чтении корректур и многие личные жертвы, принесенные ради того, чтобы я мог завершить работу, я всегда буду помнить с благодарностью.

Дж. Т. Оден

Глава I
Предварительные сведения

1. ВВЕДЕНИЕ

В первой половине двадцатого века основная часть литературы по механике твердого тела и строительной механике касалась приложений к различным краевым задачам давно сформулированных линейных теорий. Конечно, были отдельные замечательные исключения: работы, приведшие к возрождению и усовершенствованию классических теорий пластичности и вязкоупругости; разрозненные, хотя частично и успешные попытки создания единой теории поведения материалов; и большое число исследований геометрических нелинейностей, связанных с «сохранением нелинейных членов». Однако для большинства инженеров и научных работников практические приложения механики твердого тела сводились к решению линейных задач.

Причина этого вполне понятна, поскольку до недавнего прошлого поведение реальных конструкций можно было адекватно описывать линейными теориями. Например, деформации большинства конструкций при рабочих нагрузках обычно были едва различимы невооруженным глазом, а известно, что при малых деформациях и установившихся однородных температурах уравнения состояния для таких распространенных материалов, как сталь и алюминий, можно без особых погрешностей считать линейными.

В последнее время ситуация резко изменилась. Начиная с 1950 г. широкое применение нашли многие новые материалы, поведение которых уже нельзя описать классическими линейными теориями. Термовязкоупругость зарядов твердотопливных двигателей, закритическое поведение гибких конструкций, использование сильно деформируемых надувных конструкций, нелинейное поведение полимеров и синтетических материалов — вот лишь несколько новых областей исследования, стимулировавших интерес к нелинейной механике твердого тела. Сейчас уже сформулирована теория упругости в общем виде, предложены новые нелинейные теории вязкоупругости и термовязкоупругости и выработаны основные, ставшие уже общепризнанными, принципы получения уравнений состояния нелинейных материалов. Девизом современных изысканий в области нелинейного поведения материалов

стала максимальная *общность*, и к настоящему времени уже предложено несколько теорий, описывающих диапазон сред от упругих твердых тел до термовязких жидкостей.

Несмотря на успехи в создании нелинейных теорий поведения материалов и конструкций, те, кто сталкивается с феноменом нелинейности в практической деятельности, располагают очень малой количественной информацией. Нелинейные теории приводят к нелинейным уравнениям, а это означает, что классические методы анализа сразу становятся неприменимыми. Число точных решений нелинейных задач, имеющихся во всех опубликованных работах по нелинейному поведению материалов и конструкций, можно пересчитать по пальцам, но и они, все без исключения, относятся лишь к телам простейших геометрических форм при простейших граничных условиях. Часто применяется «полуобратный метод», когда вид деформированного тела предполагается известным заранее (ситуация, которую редко встретишь на практике), но даже и в этом случае для получения количественных результатов на заключительном этапе обычно используются численные методы.

Этот дефицит количественной информации — в некотором смысле ирония судьбы, поскольку одновременно с последними достижениями в нелинейной механике твердого тела появилось наиболее мощное из когда-либо существовавших средств получения количественной информации — ЭВМ. Но, с одной стороны, специалисты в области вычислительной математики все свое внимание уделяли таким новым областям, как кибернетика и нелинейное программирование, с другой стороны, механики были увлечены чисто теоретическими аспектами механики сплошных сред. А на стыке лежит плодороднейшая земля, настоящая благодатная нива — численный анализ нелинейных сплошных сред. Это сплав современных теорий сплошной среды и современных методов численного анализа, на основе которого с помощью ЭВМ можно получать количественную информацию о нелинейном поведении материалов и конструкций. Систематическое исследование части этой промежуточной территории и составляет содержание книги.

2. КОНЦЕПЦИЯ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Для получения количественных решений в нелинейной механике сплошных сред часто приходится прибегать к численным методам. Однако независимо от того, какие первоначальные предположения и методы использовались, чтобы сформулировать задачу, если для получения результатов привлекаются численные методы, сплошная среда фактически аппроксимируется в процессе решения некоторой дискретной моделью. Этим подсказывается логическая альтернатива классического подхода — *с самого начала представлять сплошную среду при помощи дискретной модели.*

В этом случае дальнейшая идеализация при составлении уравнений или при их решении может и не понадобиться. Один из таких подходов, основанный на идее кусочной аппроксимации непрерывных полей, получил название *метода конечных элементов*. Простота и общность этого метода делают его удобным средством решения широкого класса нелинейных задач.

При классическом подходе исследование сплошных сред начинают обычно с изучения свойств бесконечно малых элементов рассматриваемого континуума. Устанавливают соотношения между средними значениями различных величин, связанных с рассматриваемыми бесконечно малыми элементами, а затем, устремляя размеры элементов к нулю при неограниченном возрастании их числа, получают дифференциальные уравнения в частных производных или интегральные уравнения, описывающие поведение тела.

В противоположность этому классическому подходу при использовании метода конечных элементов начинают с изучения свойств элементов конечных размеров. При установлении этих свойств могут использоваться уравнения, описывающие поведение континуума, но размеры элементов остаются все время конечными, интегрирование заменяется конечным суммированием, а дифференциальные уравнения в частных производных заменяются, скажем, системами алгебраических или обыкновенных дифференциальных уравнений. Сплошная среда с бесконечным числом степеней свободы представляется, таким образом, дискретной моделью, имеющей конечное число степеней свободы. При этом если удовлетворяются некоторые условия полноты, то с увеличением числа конечных элементов и уменьшением их размеров поведение дискретной системы приближается к поведению «непрерывной системы» — сплошной среды. Существенной особенностью такого подхода является то, что он в принципе применим к исследованию конечных деформаций физически нелинейных анизотропных неоднородных тел любой геометрической формы при произвольных краевых условиях.

2.1. ИСТОРИЧЕСКИЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Идея представления непрерывных функций с помощью кусочной аппроксимации отнюдь не нова. В зачаточном виде идеи интерполяции использовались по всей видимости уже в древней Вавилонии и Египте и, следовательно, опередили математический анализ больше, чем на две тысячи лет. Много позже восточные математики пытались оценить магическое число π, приближенно определяя площадь единичного круга. Представляя круг в виде совокупности большого, но конечного числа прямоугольников или многоугольников и принимая за площадь круга сумму их площадей,

они достигли точности почти в сорок значащих цифр. Наконец, Ньютоном и Лейбницем был создан математический анализ, который позволил сформулировать большинство задач математической физики с помощью дифференциальных уравнений в частных производных и интегральных уравнений. Впрочем, частые неудачи попыток использования классических аналитических методов при решении этих уравнений, с одной стороны, и пришествие ЭВМ — с другой, привели к тому, что все большее число современных исследователей применяют приближенные методы численного анализа. Интересно, однако, отметить, что при этом они во многих случаях подсознательно прибегают к более примитивным концепциям, чем использованные при получении решаемых уравнений.

Идея представления конструкций в виде набора дискретных элементов восходит к раннему периоду исследования конструкций летательных аппаратов, когда, например, крылья и фюзеляжи рассматривались как совокупности стрингеров, обшивки и работающих на сдвиг панелей. Хренников [1941] ввел «метод каркасов»— предшественник общих дискретных методов строительной механики — и применил его, представляя плоское упругое тело в виде набора брусьев и балок. Топологические свойства некоторых типов дискретных систем изучались Кроном [1939] [1]), который разработал универсальные методы анализа сложных электрических цепей и строительных конструкций. Курант [1943] [2]) дал приближенное решение задачи кручения Сен-Венана, используя кусочно-линейное представление функции искажения в каждом из треугольных элементов, совокупностью которых заменялось поперечное сечение тела, и формулируя задачу с помощью принципа минимума потенциальной энергии. Пример применения Курантом метода Ритца содержит в себе все основные моменты процедуры, известной теперь как метод конечных элементов. Аналогичные идеи использовал позже Пойа [1952]. «Метод гиперокружностей», предложенный в 1947 г. Прагером и Сингом [1947] и подробно исследованный Сингом [1957] [3]), легко может быть приспособлен для «конечноэлементных» применений; он проливает новый свет на приближенные методы решения некоторых краевых задач математической физики. В 1954 г. Аргирис и его сотрудники [4]) начали публикацию серии работ, в которых они далеко развили некоторые обобщения линейной теории конструкций и представили методы

---

[1]) См. также, например, Крон [1944а, 1944б, 1953, 1954, 1955].

[2]) См. также Курант, Фридрихс и Леви [1928].

[3]) Синг [1957] говорит о линейной интерполяции на треугольных областях; очевидно, что применение им «полиэдральных графов» и «пирамидальных функций» — как раз в духе метода конечных элементов.

[4]) Аргирис [1954, 1955, 1956, 1957], Аргирис и Келси [1956, 1959, 1960, 1961, 1963], Аргирис, Келси и Кэмел [1964].

исследования дискретных конструкций сложных конфигураций в форме, удобной для использования ЭВМ.

Первое формальное изложение метода конечных элементов, вместе с методом жесткостей для совокупности элементов принадлежит Тэрнеру, Клафу, Мартину и Топпу [1956], которые при исследовании задач о плоском напряженном состоянии использовали для описания свойств треугольного элемента уравнения классической теории упругости. Именно Клаф [1960] первым ввел термин «конечные элементы» в своей более поздней работе, посвященной плоским задачам теории упругости. В последующие годы о методе конечных элементов было написано несколько сотен статей. Обширные списки литературы можно найти в ряде книг и обзорных статей об этом методе [1]).

3. МЕХАНИКА СПЛОШНЫХ СРЕД

В последующих параграфах нашей главной целью будет разработка общих методов построения конечноэлементных моделей непрерывных полей и использование этих моделей при исследовании нелинейных задач строительной механики и механики сплошных сред. Уравнения, описывающие поведение сплошной среды, можно разделить на четыре группы: 1) кинематические; 2) динамические, например законы сохранения; 3) термодинамические и 4) определяющие уравнения (уравнения состояния). Термодинамические принципы, излагаемые в гл. III, являются удобным средством получения общих уравнений движения и теплопроводности для конечных элементов сплошных сред. Определяющие уравнения устанавливают соотношения между кинематическими, динамическими и термодинамическими переменными и, таким образом, характеризуют материал, из которого состоит сплошная среда. Общие положения теории определяющих уравнений обсуждаются в гл. III, а в гл. IV и V рассматриваются определяющие

---

[1]) См., например, труды конференций и сборники статей под редакцией Вёбеке [1964а, 1971], Зенкевича и Холистера [1965], Рыдзевского [1965], Пшеменецкого, Бейдера, Бозича, Джонсона и Микитова [1966], Холанда и Белла [1969], Рована и Хэккетта [1969], Бёрки, Бейдера, Микитова, Пшеменецкого и Ширка [1969] и Галлагера, Ямады и Одена [1970]; книги Пестела и Лекки [1968], Галлагера [1964], Мартина [1966а] и Зенкевича и Ченга [1967]. В книге Пшеменецкого [1968] приводится свыше 400 работ о методе конечных элементов. Имеется ряд обзорных статей и докладов, например Аргирис [1958, 1966а, 1966б], Уоррен, Кастл и Глория [1962], Парр [1964, 1967], Фелиппа и Клаф [1968]. См. также диссертацию Фелиппы [1966]. Сингхал [1969] составил перечень 775 работ, относящихся к методу конечных элементов и матричным методам расчета конструкций. Более поздние обзоры: Зуданс [1969], Зенкевич [1970]. Обзорные статьи, посвященные исключительно приложениям к нелинейным задачам: Маркл [1970], Мартин [1970], Оден [1969а, 1970б].

уравнения для ряда материалов. Остальная часть этой вводной главы посвящена краткому описанию кинематических и динамических соотношений для сплошных сред.

4. КИНЕМАТИКА

Кинематика, в ее традиционном понимании, изучает движение тел без рассмотрения причин, вызывающих его. Она описывает геометрические характеристики движения, и ее основные понятия образуют важную часть основ механики сплошных сред. Здесь мы дадим обзор некоторых наиболее важных кинематических соотношений, которые используются в дальнейшем [1]). Остальные кинематические соотношения вводятся в последующих разделах по мере надобности.

4.1. ГЕОМЕТРИЯ И ДВИЖЕНИЕ

Тело — это бесконечное множество частиц, которым можно поставить во взаимнооднозначное соответствие упорядоченные тройки вещественных чисел, называемых *координатами* частиц. Каждой частице можно приписать некую меру, называемую *массой*; мы будем предполагать, что масса абсолютно непрерывна в том смысле, что при стремлении к нулю произвольного объема тела то же самое происходит и с его массой. Расположение множества частиц, образующих тело, в какой-либо момент времени называется *конфигурацией* тела. Более строго, конфигурация — это гладкое отображение тела на некоторую область трехмерного эвклидова пространства. Последовательность отображений, определяющих конфигурации тела в различные моменты времени t (т. е. однопараметрическое семейство конфигураций), называется *движением* тела.

Разумеется, понятия тела и движения очень близко знакомы нам по нашему повседневному опыту, и взятый нами при их определении несколько формальный тон для большинства преследуемых в книге целей не является необходимым. Формальные определения помещены здесь лишь для того, чтобы указать на дополнительный смысл некоторых аппроксимаций, которыми мы будем заниматься в следующих главах.

---

[1]) За небольшими исключениями используются обозначения, введенные в книге Грина и Зерны [1968, стр. 53—61]. Подробное изложение кинематики сплошных сред с историческим обзором содержится в работе Трусделла и Тупина [1960, стр. 241—463]. Формальное аксиоматическое изложение кинематики приведено у Трусделла и Нолла [1965, стр. 48—56], а также у Трусделла [1966а, стр. 17—25] [см. также книгу Трусделла *[1972]. — *Ред.*]

Рассмотрим непрерывное трехмерное тело в некоторой начальной (отсчетной) конфигурации C_0. Для идентификации частиц поставим в соответствие каждой частице **x** упорядоченную тройку вещественных чисел $x_i = (x_1, x_2, x_3)$, называемых *материальными координатами* частицы **x**. Чтобы придать числам x_i геометрический смысл и описать движение тела относительно конфигурации C_0, введем в трехмерном пространстве фиксированную прямоугольную систему декартовых координат z_i, называемых *пространственными координатами* [1]). В качестве материальных координат x_i возьмем числа, равные соответствующим декартовым координатам z_i точки пространства, занимаемой частицей **x**, когда тело находится в конфигурации C_0. Таким образом, величины x_i с геометрической точки зрения являются декартовыми координатами частицы **x** относительно системы координат z_i в момент, когда тело находится в начальной конфигурации. Начало $x_i = (0, 0, 0)$ материальной системы координат обозначается через o, а пространственной — через 0. К моменту $\tau = t$ $(0 \leqslant \tau \leqslant t)$ движение тела переводит его из начальной конфигурации в некоторую новую конфигурацию C, и частица x перемещается в новое положение P, пространственные координаты которого обозначаются через $z_i(\tau)$. Таким образом, декартовы координаты частицы в любой момент времени τ суть $z_i(\tau)$, а при $\tau = 0$ координаты $z_i(\tau)$ и x_i совпадают $[z_i(0) = x_i]$ [2]).

Мы можем описать движение тела относительно конфигурации C_0, установив функциональную зависимость z_i от x_i и времени. Таким образом, мы предполагаем, что z_i — однозначные функции от x_i и τ, которые непрерывно дифференцируемы нужное число раз всюду, за исключением, возможно, некоторых особых точек, кривых или поверхностей. Итак,

$$z_i = z_i(x_1, x_2, x_3, \tau). \tag{4.1}$$

Далее, будем считать, что существует единственное обращение функций (4.1) и что

$$\left|\frac{\partial z_i(\mathbf{x}, \tau)}{\partial x_j}\right| > 0. \tag{4.2}$$

Говорят, что функции (4.1) определяют движение тела.

Подчеркнем, что тройки вещественных чисел x_i используются только как метки, приписываемые материальным частицам тела. Числовые значения x_i, определяющие некоторую частицу в C_0,

---

[1]) Материальные координаты часто называют *лагранжевыми*, а пространственные — *эйлеровыми*. — *Прим. ред.*

[2]) Заметим, что поскольку x_i и z_i — прямоугольные декартовы координаты в C_0, место индекса (вверху или внизу) не имеет значения. Мы будем использовать для обозначения координат частицы в C_0 как x_i, так и x^i, а в C — как z_i, так и z^i. Однако в конфигурации C имеет смысл писать x^i вместо x_i.

определяют ту же самую частицу во всех конфигурациях тела. Мы можем считать эти метки-числа координатами, написанными прямо на теле, так что они непрерывно движутся вместе с телом, когда то переходит из C_0 в некоторое другое положение. Отсюда следует, что координаты x_i, прямоугольные в C_0, в C уже, вообще

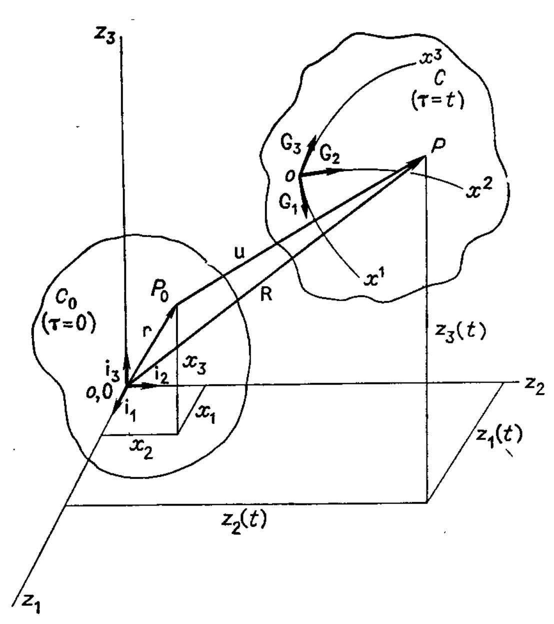


Рис. 4.1. Геометрия движения из конфигурации C_0 в конфигурацию C.

говоря, криволинейные: прямые линии, параллельные осям x_i в C_0, становятся в C кривыми, а координатные плоскости в C_0 превращаются в C в криволинейные поверхности. Такие координаты называют еще *конвективными* или *вмороженными*. Поскольку использование этих координат приводит к весьма простым кинематическим соотношениям, именно они чаще всего применяются в механике твердого тела.

Радиус-вектор произвольной частицы x, занимающей в конфигурации C_0 положение P_0, обозначается через $\mathbf{r}$, а радиус-вектор *той же самой* частицы, занимающей в конфигурации C положение P, обозначается через $\mathbf{R}$. Если $\mathbf{i}_i$ обозначают ортонормированные базисные векторы, касательные к осям z_i, то

$$\mathbf{r} = x_i \mathbf{i}_i \tag{4.3}$$

и

$$\mathbf{R} = z_i \mathbf{i}_i. \tag{4.4}$$

Вектор

$$\mathbf{u} = \mathbf{R} - \mathbf{r} = u_i \mathbf{i}_i \tag{4.5}$$

называется *вектором перемещения*, а функции $u_i = u_i(x_1, x_2, x_3, \tau)$ — *компонентами перемещения*. Геометрия движения из C_0 в C показана на рис. 4.1.

4.2. ПЕРЕМЕЩЕНИЕ И ДЕФОРМАЦИЯ

Пусть ds_0 — линейный элемент в C_0, а ds — *тот же самый* элемент в C; тогда

$$ds_0^2 = d\mathbf{r} \cdot d\mathbf{r} = dx_i \, dx_i, \tag{4.6}$$

$$ds^2 = d\mathbf{R} \cdot d\mathbf{R} = dz_i \, dz_i. \tag{4.7}$$

Инвариант

$$ds^2 - ds_0^2 \tag{4.8}$$

является мерой деформации тела. Если всюду в теле $ds^2 - ds_0^2 = 0$, то движение тела называется *абсолютно жестким движением*. Если в точке $\mathbf{x}$ инвариант $ds^2 - ds_0^2 \neq 0$, то говорят, что в этой точке тело находится в деформированном состоянии.

В соответствии с (4.4) и (4.5)

$$d\mathbf{R} = \mathbf{R}_{,m} \, dx^m = z_{i,m} \mathbf{i}_i \, dx^m = \mathbf{G}_m \, dx^m, \tag{4.9}$$

где

$$\mathbf{G}_m = z_{i,m} \mathbf{i}_i = \mathbf{i}_m + \mathbf{u}_{,m} = (\delta_{im} + u_{i,m}) \, \mathbf{i}_i. \tag{4.10}$$

Здесь запятая означает частную производную по x_i (например, $z_{i,m} \equiv \partial z_i / \partial x^m$; $u_{i,m} \equiv \partial u_i / \partial x^m$), а δ_{im} — символ Кронекера. Векторы $\mathbf{G}_m$ касательны к деформированным (конвективным) координатным линиям x^m. Заметим, что функция $(\delta_{im} + u_{i,m})$ переводит начальные касательные базисные векторы $\mathbf{i}_i$ в касательные векторы $\mathbf{G}_m$ в C. Функции

$$z_{i,m} = \delta_{im} + u_{i,m} \tag{4.11}$$

называются *градиентами деформации*.

Подставляя (4.9) в (4.7), получим

$$ds^2 = G_{ij} \, dx^i dx^j, \tag{4.12}$$

где

$$G_{ij} \equiv \mathbf{G}_i \cdot \mathbf{G}_j = G_{ji}. \tag{4.13}$$

Функции G_{ij} являются ковариантными компонентами метрического тензора для конфигурации C в конвективной системе координат x^i. Их иногда называют компонентами *тензора меры деформации Грина*. Ввиду (4.10) и (4.13)

$$G_{ij} = z_{m,i} z_{m,j} = \delta_{ij} + u_{i,j} + u_{j,i} + u_{m,i} u_{m,j}. \tag{4.14}$$

Возвращаясь к (4.8), можно выразить инвариантную меру деформации в виде

$$ds^2 - ds_0^2 = 2\gamma_{ij}\,dx^i\,dx^j, \tag{4.15}$$

где

$$\gamma_{ij} = \frac{1}{2}(G_{ij} - \delta_{ij}). \tag{4.16}$$

Поскольку выполнение условия $ds^2 - ds_0^2 \neq 0$ указывает, что частица x тела находится в деформированном состоянии, функции γ_{ij} служат *мерами деформации*. Они представляют собой компоненты симметричного тензора второго порядка, называемого *тензором деформации Грина — Сен-Венана*. Так как $ds = ds_0$ при $\gamma_{ij} = 0$ (и наоборот), необходимым и достаточным условием того, чтобы движение тела было абсолютно жестким, является обращение в нуль компонент деформации повсюду в теле. Заметим также, что поскольку $\gamma_{ij} = \gamma_{ji}$, всегда можно найти для данной точки P в C ортогональную систему координат, такую, что $\gamma_{ij} = G_{ij} = 0$ при $i \neq j$. Направления осей этой системы координат называются *главными направлениями деформации*, а компоненты деформации по главным направлениям — *главными деформациями*.

Подставляя (4.14) в (4.16), получаем *соотношения, связывающие перемещения с деформациями*:

$$\gamma_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i} + u_{m,i}u_{m,j}). \tag{4.17}$$

Хотя градиенты перемещений $u_{i,j}$ в общем случае не симметричны (т. е. $u_{i,j} \neq u_{j,i}$), их можно выразить в виде суммы компонент симметричного тензора e_{ij} и антисимметричного тензора ω_{ij}, где

$$e_{ij} \equiv \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) = e_{ji}, \tag{4.18а}$$

$$\omega_{ij} \equiv \frac{1}{2}(u_{i,j} - u_{j,i}) = -\omega_{ji}. \tag{4.18б}$$

Величины e_{ij} и ω_{ij} соответственно называются компонентами *тензора бесконечно малой деформации* и *тензора поворота*. Ясно, что

$$u_{i,j} = e_{ij} + \omega_{ij} \tag{4.19}$$

и

$$du_i = u_{i,j}\,dx^j = (e_{ij} + \omega_{ij})\,dx^j. \tag{4.20}$$

Компоненты деформации можно выразить через e_{ij} и ω_{ij}. Подставляя (4.19) в (4.17), получаем

$$\gamma_{ij} = e_{ij} + \frac{1}{2}(e_{mi} + \omega_{mi})(e_{mj} + \omega_{mj}). \tag{4.21}$$

При деформации очень гибких тел, таких, как пластины и оболочки, часто можно считать, что величины e_{ij} — бесконечно малые

первого порядка, а компоненты ω_{ij} велики по сравнению с ними [1]). Тогда приближенно

$$\gamma_{ij} = e_{ij} + \frac{1}{2}\omega_{mi}\omega_{mj}. \qquad (4.22)$$

Если же и e_{ij} и ω_{ij} (а значит и $u_{i,j}$) — бесконечно малые первого порядка, то можно пренебречь их произведениями и квадратами по сравнению с первыми степенями, и соотношение (4.22) сводится просто к

$$\gamma_{ij} = e_{ij}. \qquad (4.23)$$

Заметим, что при этом в случае $e_{ij} = 0$ (жесткое движение) формула (4.20) принимает вид

$$du_i = \omega_{ij}\,dx^j. \qquad (4.24)$$

Это — бесконечно малое перемещение без деформации, представляющее собой жесткий поворот линейных элементов dx^i.

4.3. ИНВАРИАНТЫ ДЕФОРМАЦИИ

Для каждого тензора второго порядка можно построить три функции его компонент, постоянные во всех системах координат. Эти функции называются *инвариантами* тензора. *Главные инварианты* тензора G_{ij}, обозначаемые через I_1, I_2, I_3, называются *главными инвариантами деформации*. Они определяются формулами:

$$I_1 = \delta^{ir}G_{ri}, \qquad (4.25а)$$

$$I_2 = \frac{1}{2}(\delta^{ir}\delta^{js}G_{ri}G_{sj} - \delta^{ir}\delta^{js}G_{ij}G_{rs}), \qquad (4.25б)$$

$$I_3 = \det G_{ij} \equiv G, \qquad (4.25в)$$

или, с учетом (4.16):

$$I_1 = 3 + 2\gamma_{ii}, \qquad (4.26а)$$

$$I_2 = 3 + 4\gamma_{ii} + 2(\gamma_{ii}\gamma_{jj} - \gamma_{ij}\gamma_{ji}), \qquad (4.26б)$$

$$I_3 = 1 + 2\gamma_{ii} + 2(\gamma_{ii}\gamma_{jj} - \gamma_{ij}\gamma_{ji}) + \frac{4}{3}\varepsilon^{ijk}\varepsilon^{rst}\gamma_{ir}\gamma_{js}\gamma_{kt}, \qquad (4.26в)$$

где $\gamma_{ii} = \delta^{ir}\gamma_{ri}$, а *перестановочные символы* ε^{ijk} и ε^{rst} обозначают знаки соответствующих перестановок.

В дальнейшем понадобятся выражения для частных производных инвариантов по деформациям. Замечая, что

$$\frac{\partial\gamma_{ij}}{\partial\gamma_{mn}} = \delta_i^m\delta_j^n, \qquad (4.27)$$

---

[1]) См. Новожилов [1948, стр. 172].

находим:

$$\frac{\partial I_1}{\partial \gamma_{mn}} = 2\delta^{mn}, \qquad (4.28а)$$

$$\frac{\partial I_2}{\partial \gamma_{mn}} = 4\,[\delta^{mn}(1+\gamma_{ii}) - \delta^{nr}\delta^{ms}\gamma_{rs}], \qquad (4.28б)$$

$$\frac{\partial I_3}{\partial \gamma_{mn}} = 2\delta^{mn}(1+2\gamma_{ii}) - 4\delta^{nr}\delta^{ms}\gamma_{rs} + 4\varepsilon^{mjk}\varepsilon^{nst}\gamma_{js}\gamma_{kt}. \qquad (4.28в)$$

4.4. ИЗМЕНЕНИЯ ОБЪЕМА И ПЛОЩАДИ

Формула для элементарного объема в C_0 имеет простой вид:

$$dv_0 = dx_1\, dx_2\, dx_3. \qquad (4.29)$$

После деформации векторы $\mathbf{i}_i\, dx_i$ (суммирования нет), образующие ребра прямоугольного объема dv_0, становятся векторами $\mathbf{G}_i\, dx_i$. Значит, в деформированном теле этот объемный элемент имеет новый объем:

$$dv = |\,\mathbf{G}_1 \cdot (\mathbf{G}_2 \times \mathbf{G}_3)\,|\, dx^1\, dx^2\, dx^3. \qquad (4.30)$$

Нетрудно установить, что

$$|\,\mathbf{G}_1 \cdot (\mathbf{G}_2 \times \mathbf{G}_3)\,| = |\,z_{i,\,j}\,| = \sqrt{|\,G_{ij}\,|} = \sqrt{I_3} = \sqrt{G}. \qquad (4.31)$$

Таким образом,

$$dv = \sqrt{G}\, dx^1\, dx^2\, dx^3 = \sqrt{G}\, dv_0 = \sqrt{I_3}\, dv_0. \qquad (4.32)$$

Деформации, при которых объем не изменяется, называются *изохорическими*. Ясно, что в случае изохорических деформаций

$$I_3 = 1 \qquad (4.33)$$

Для того чтобы описать изменение элементов площади, удобно ввести новое множество векторов $\mathbf{G}^i$, нормальных к координатным поверхностям x^i в деформированном теле [1]):

$$\mathbf{G}^i = \frac{\partial x^i}{\partial z_m}\,\mathbf{i}_m = \frac{1}{2\sqrt{G}}\,\varepsilon^{ijk}\mathbf{G}_j \times \mathbf{G}_k. \qquad (4.34)$$

Здесь $\varepsilon^{ijk} = \varepsilon_{ijk}$ — уже упоминавшиеся перестановочные символы, а $G = |\,G_{ij}\,| = I_3$. Векторы $\mathbf{G}^i$ взаимны с векторами $\mathbf{G}_i$, т. е.

$$\mathbf{G}^i \cdot \mathbf{G}_j = \delta^i_j. \qquad (4.35)$$

Далее, функции

$$G^{ij} = \mathbf{G}^i \cdot \mathbf{G}^j \qquad (4.36)$$

[1]) Термины «недеформированное тело», «деформированное тело» и т. д. не надо, конечно, понимать буквально. Под *деформацией* понимается деформация относительно некоторой начальной конфигурации, причем не всегда возможно или удобно выбирать начальную конфигурацию, соответствующую естественному, свободному состоянию тела.

являются контравариантными компонентами метрического тензора для C в конвективной системе координат x^i, и тензор G^{ij} обратен к тензору G_{ij}. В начальной конфигурации C_0 векторы, скажем $\mathbf{i}_2\, dx_2$ и $\mathbf{i}_3\, dx_3$, служат сторонами элементарной прямоугольной площадки dA_{10} координатной плоскости x_1. Вектор $\mathbf{i}_1 = \mathbf{i}_2 \times \mathbf{i}_3$ нормален к dA_{10}, и

$$dA_{10} = |\, \mathbf{i}_2 \times \mathbf{i}_3 \,|\, dx_2\, dx_3 = dx_2\, dx_3. \tag{4.37}$$

После деформации первоначально плоская площадка dA_{10} становится криволинейной поверхностью dA_1 со сторонами, образуемыми векторами $\mathbf{G}_2\, dx^2$ и $\mathbf{G}_3\, dx^3$. Вектор $\sqrt{G}\mathbf{G}^1 = \mathbf{G}_2 \times \mathbf{G}_3$ нормален к dA_1. Таким образом,

$$dA_1 = |\, \mathbf{G}_2 \times \mathbf{G}_3 \,|\, dx^2\, dx^3 = \sqrt{GG^{11}}\, dx^2\, dx^3, \tag{4.38а}$$

где $G^{11} = \mathbf{G}^1 \cdot \mathbf{G}^1$ — квадрат длины вектора $\mathbf{G}^1$. Аналогично, элементарные площадки dA_{20} и dA_{30} координатных плоскостей x_2 и x_3 в C_0 переходят в деформированном теле в dA_2 и dA_3, где

$$dA_2 = \sqrt{GG^{22}}\, dx^3\, dx^1, \tag{4.38б}$$

$$dA_3 = \sqrt{GG^{33}}\, dx^1\, dx^2. \tag{4.38в}$$

4.5. СКОРОСТЬ, УСКОРЕНИЕ И СКОРОСТЬ ДЕФОРМАЦИИ

Скорость $\mathbf{v}$ частицы определяется как скорость изменения ее положения во времени. Если измерять это изменение относительно начальной конфигурации C_0, то

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{R}} = v_i \mathbf{i}_i, \tag{4.39}$$

где точка сверху означает частную производную по времени (т. е. $\dot{\mathbf{R}} = \partial \mathbf{R}/\partial t$). Поскольку по определению конвективные координаты частицы x^i не изменяются во времени (т. е. $\dot{x}^i = 0$), из (4.4) и (4.5) следует, что

$$v_i = \dot{z}_i = \dot{u}_i. \tag{4.40}$$

Аналогично ускорение $\mathbf{a}$ частицы — это скорость изменения во времени ее скорости. Относительно конфигурации C_0

$$\mathbf{a} = a_i \mathbf{i}_i \equiv \dot{\mathbf{v}} = \ddot{\mathbf{R}} \tag{4.41}$$

и

$$a_i = \dot{v}_i = \ddot{z}_i = \ddot{u}_i. \tag{4.42}$$

При исследовании деформаций сплошных тел полезно знать скорость, с которой происходит деформирование. Естественной мерой *скорости деформации* является скорость изменения во вре-

мени инварианта $ds^2 - ds_0^2$:

$$\dot{\overline{ds^2 - ds_0^2}} = \dot{\overline{ds^2}}. \tag{4.43}$$

Вследствие (4.15) имеем

$$\dot{\overline{ds^2}} = 2\dot{\gamma}_{ij}\, dx^i\, dx^j, \tag{4.44}$$

где $\dot{\gamma}_{ij} = \partial\gamma_{ij}/\partial t$ — скорости изменения компонент тензора деформации. Подставляя сюда (4.17), находим

$$\dot{\overline{ds^2}} = 2\,(\delta_{mi} + u_{m,\,i})\,\dot{u}_{m,\,j}\, dx^i\, dx^j = 2z_{m,\,i}\dot{u}_{m,\,j}\, dx^i\, dx^j, \tag{4.45}$$

и в силу (4.19)

$$\dot{\overline{ds^2}} = 2z_{m,\,i}\,(\dot{e}_{mj} + \dot{\omega}_{mj})\, dx^i\, dx^j. \tag{4.46}$$

Функции $\dot{e}_{jm}$ и $\dot{\omega}_{jm}$ называют соответственно компонентами *тензора скоростей бесконечно малых деформаций и тензора скоростей поворота* [1]). Повторным дифференцированием (4.46) по времени можно найти деформации и скорости перемещений высших порядков.

4.6. КРИВОЛИНЕЙНЫЕ КООРДИНАТЫ

Кинематические соотношения, выведенные выше, нетрудно записать в форме, справедливой для произвольной криволинейной системы координат. Например, пусть ξ^i — криволинейные координаты в начальной конфигурации C_0, задаваемые преобразованиями

$$\xi^i = \xi^i\,(x_1,\ x_2,\ x_3), \qquad x_i = x_i\,(\xi^1,\ \xi^2,\ \xi^3). \tag{4.47}$$

Координаты ξ^i также следует рассматривать как конвективные, и их точно так же, как x_i, можно использовать для описания начальной конфигурации тела C_0.

Базисные векторы $\mathbf{g}_i$, касательные к координатным линиям ξ^i, и векторы $\mathbf{g}^i$, нормальные к координатным поверхностям ξ^i при $\tau = 0$, определяются выражениями

$$\mathbf{g}_i = \frac{\partial x_m}{\partial \xi^i}\,\mathbf{i}_m, \qquad \mathbf{g}^i = \frac{\partial \xi^i}{\partial x_m}\,\mathbf{i}_m, \tag{4.48а,б}$$

а ковариантные и контравариантные компоненты соответствующего метрического тензора имеют вид

$$g_{ij} = \mathbf{g}_i \cdot \mathbf{g}_j, \qquad g^{ij} = \mathbf{g}^i \cdot \mathbf{g}^j. \tag{4.49а,б}$$

[1]) В оригинале *spin tensor*. — *Прим. ред.*

Вектор перемещения **u** в этой криволинейной системе координат записывается в виде

$$\mathbf{u}=w_i\mathbf{g}^i=w^i\mathbf{g}_i, \tag{4.50}$$

где w_i и w^i — ковариантные и контравариантные компоненты вектора **u** в системе координат ξ^i. Аналогичные формулы справедливы, конечно, в этой системе координат и для других векторов.

Компоненты тензора деформации определяются теперь выражениями

$$\bar{\gamma}_{ij}=\frac{1}{2}(G_{ij}-g_{ij}), \tag{4.51}$$

и видно, что $\bar{\gamma}_{ij}=\gamma_{ij}$, определяемым формулами (4.17), только в том случае, когда $g_{ij}=\delta_{ij}$. Соотношения между деформациями и перемещениями принимают вид

$$\bar{\gamma}_{ij}=\frac{1}{2}(w_{i:j}+w_{j:i}+w^m_{:i}w_{m:j}), \tag{4.52}$$

где двоеточие означает ковариантное дифференцирование по координатам ξ^i, т. е.

$$w_{i:j}=\frac{\partial w_i}{\partial \xi^j}-\Gamma^m_{ij}w_m, \tag{4.53а}$$

$$w^i_{:j}=\frac{\partial w^i}{\partial \xi^j}+\Gamma^i_{jm}w^m, \tag{4.53б}$$

где Γ^i_{jk} — символы Кристоффеля второго рода для начальной конфигурации C_0:

$$\Gamma^i_{jk}=\frac{\partial^2 x_m}{\partial\xi^j\,\partial\xi^k}\,\frac{\partial\xi^i}{\partial x_m}. \tag{4.54}$$

Главные инварианты деформации представляются в виде

$$I_1=g^{im}G_{im}=3+2g^{im}\bar{\gamma}_{mi}, \tag{4.55а}$$

$$I_2=3+4g^{im}\bar{\gamma}_{mi}+2(g^{im}g^{nk}\bar{\gamma}_{mi}\bar{\gamma}_{nk}-g^{im}g^{nk}\bar{\gamma}_{mk}\bar{\gamma}_{ni}), \tag{4.55б}$$

$$I_3=|\delta^i_j+2g^{im}\bar{\gamma}_{mj}|=\frac{G}{g}, \tag{4.55в}$$

где $g=|g_{ij}|$.

С помощью преобразований, подобных использованным при получении формул (4.48) — (4.55), можно записать в криволинейных координатах ξ^i и другие формулы, которые были ранее выведены в декартовых координатах.

5. ДИНАМИКА

Наряду с кинематическими можно сформулировать и некоторые динамические соотношения, которые справедливы для всех сплошных сред. Они следуют из основных законов механики, а не из

чисто геометрических рассуждений. Это — локальные уравнения движения, получаемые из уравнений количества движения и момента количества движения, и динамические краевые условия, формулируемые на основе понятия напряжения [1]). В последующих главах при рассмотрении конечноэлементных моделей будет требоваться, чтобы эти уравнения движения и динамические краевые условия удовлетворялись только в некотором осредненном смысле для некоторого конечного объема среды. Таким образом, речь будет идти об удовлетворении глобальных уравнений движения для конечных объемов материала и о выполнении динамических краевых условий только в отдельных точках. В связи с этим динамические соотношения не играют столь важной роли в построении дискретных моделей сплошных сред, как изложенные в предыдущем параграфе кинематические соотношения. Тем не менее они являются фундаментальными не только для механики вообще, но и для нашего приближенного анализа, поскольку при построении любой аппроксимационной теории необходимо ясное понимание явления, описываемого приближенно.

5.1. ЗАКОН СОХРАНЕНИЯ МАССЫ И УРАВНЕНИЯ КОЛИЧЕСТВА ДВИЖЕНИЯ И МОМЕНТА КОЛИЧЕСТВА ДВИЖЕНИЯ

Приведем некоторые определения и законы, на которых основывается механика сплошных сред.

Закон сохранения массы. Каждое тело обладает некоторой неотрицательной аддитивной инвариантной характеристикой, называемой массой. Масса тела сохраняется (не изменяется) при любом его движении.

Предположим, что масса тела абсолютно непрерывна, т. е. что существует функция ρ называемая *массовой плотностью*, представляющая массу единичного объема тела. Если ρ_0 и ρ — массовые плотности данного тела в конфигурациях C_0 и C, то в соответствии с вышеприведенным законом

$$\int_{v_0} \rho_0\, dv_0 = \int_{v} \rho\, dv. \tag{5.1}$$

С учетом (4.32) можно также записать

$$\int_{v_0} \left(\rho_0 - \sqrt{G}\,\rho\right) dv_0 = 0. \tag{5.2}$$

---

[1]) Для более подробного изучения этих законов см., например, Трусделл и Тупин [1960, стр. 465—491] или Эринген [1962, стр. 82—111], [1967, стр. 93—113].

Поскольку это должно выполняться для любого объема, получаем

$$\rho = \frac{1}{\sqrt{G}}\rho_0 = \frac{1}{\sqrt{I_3}}\rho_0. \quad (5.3)$$

Уравнение (5.3) называется *уравнением неразрывности*.

Определение 1. *Количество движения* $\mathcal{J}$ тела $\mathcal{M}$ определяется формулой

$$\mathcal{J} \equiv \int_{\mathcal{M}} \mathbf{v}\, dm, \quad (5.4)$$

где $\mathbf{v}$ — поле скоростей, а m — масса.

Определение 2. *Момент количества движения* $\mathcal{H}_0$ тела $\mathcal{M}$ относительно точки 0 определяется формулой

$$\mathcal{H}_0 = \int_{\mathcal{M}} \mathbf{R} \times \mathbf{v}\, dm, \quad (5.5)$$

где $\mathbf{R}$ — радиус-вектор относительно точки 0, $\mathbf{v}$ — поле скоростей, а m — масса.

Если масса абсолютно непрерывна, то dm в (5.4) и (5.5) можно заменить на $\rho\, dv$.

Уравнение количества движения. *Производная по времени количества движения равняется результирующей* $\mathbf{F}_{(R)}$ *всех сил, действующих на тело*:

$$\frac{d\mathcal{J}}{dt} = \mathbf{F}_{(R)}. \quad (5.6)$$

Уравнение момента количества движения. *Производная по времени момента количества движения относительно точки* 0 *равняется результирующему моменту* $\mathbf{M}_{(R)}$ *относительно точки* 0:

$$\frac{d\mathcal{H}_0}{dt} = \mathbf{M}_{(R)}. \quad (5.7)$$

5.2. ВНЕШНИЕ СИЛЫ И НАПРЯЖЕНИЯ

Внешние силы, действующие на сплошное тело, можно разделить на две категории: (1) *массовые* (или *объемные*) *силы* и (2) *поверхностные силы*. Массовые силы обусловлены внешними причинами и характеризуются плотностью — силой, приходящейся на единицу массы (или объема) тела. Предполагается, что эти плотности представляют собой непрерывные функции, определенные во всем объеме тела. Поверхностные силы (или поверхностные усилия) действуют на граничных поверхностях тела. Они обуслов-

лены воздействием различных тел друг на друга через граничные поверхности и характеризуются величиной поверхностной силы, приходящейся на единицу площади граничной поверхности. Предполагается, что плотности поверхностных сил представляют собой кусочно-непрерывные функции.

В результате взаимодействия между собой частиц тела в нем возникают также внутренние силы. Поскольку сила, с которой какая-либо частица действует на соседние, равна и противоположна по направлению силе, с которой эти соседние действуют на нее, равнодействующая всех внутренних сил равна нулю. Чтобы охарактеризовать количественно внутренние силы, рассмотрим произвольную частицу $\mathbf{x}$ в деформированном теле и проведем через нее некоторую поверхность A. Пусть $\mathbf{N}$ обозначает результирующую внутреннюю силу, действующая на часть тела, расположенную с одной стороны A, а $-\mathbf{N}$ — силу (реакцию), действующую на часть тела, расположенную с другой стороны A. Рассмотрим малый элемент ΔA поверхности A вблизи $\mathbf{x}$. Пусть $\Delta\mathbf{N}$ — результирующая внутренняя сила на ΔA; тогда *вектор напряжения* $\boldsymbol{\sigma}$ в точке $\mathbf{x}$ определяется следующим образом:

$$\boldsymbol{\sigma} = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta \mathbf{N}}{\Delta A}. \tag{5.8}$$

Вектор напряжения $\boldsymbol{\sigma}$ представляет собой силу на единицу площади в деформированном теле. Ясно, что $\boldsymbol{\sigma}$ зависит не только от $\mathbf{N}$, но и от ориентации площадки ΔA.

Если вектор напряжений в точке $\mathbf{x}$ отнести к базисным векторам $\mathbf{G}_j$ в деформированном теле, то его можно представить в форме

$$\boldsymbol{\sigma} = \sigma^{ij} n_i \mathbf{G}_j, \tag{5.9}$$

где σ^{ij} — контравариантные компоненты *тензора напряжений* [1]), *измеряемых на единицу площади в деформированном теле в конвективных координатах* x^i, а n_i — ковариантные компоненты единичного вектора в точке $\mathbf{x}$, нормального к проходящей через нее поверхности, на которой действует $\boldsymbol{\sigma}$. Говорят, что функции σ^{ij} определяют *напряженное состояние* в точке $\mathbf{x}$. Индексы у σ^{ij} имеют следующий смысл. Первый индекс указывает на направление нормали к поверхности, на которой действует σ^{ij}, а второй индекс — на направление компоненты напряжения.

Смешанные и ковариантные компоненты напряжений можно вычислить с помощью метрического тензора G_{ij}, определенного формулой (4.13):

$$\sigma_i^{\cdot j} = G_{im}\sigma^{mj}, \qquad \sigma_{ij} = G_{jm}\sigma_i^{\cdot m}. \tag{5.10а,б}$$

---

[1]) Величины σ^{ij} иногда называют компонентами второго тензора напряжений Пиолы — Кирхгофа; см. Труселл и Нолл [1965, стр. 124, 125]. Компоненты $\pi_m^j = z_{m,i}\sigma^{ij}$ первого тензора напряжений Пиолы — Кирхгофа в общем случае не симметричны.

Впоследствии мы покажем, что для монополярных сред тензор σ^{ij} симметричен и поэтому $\sigma_i^{\cdot j} = \sigma^j_{\cdot i} = \sigma^j_i$. Заметим, что *физические компоненты* напряжений s_{ij}, отнесенные к единичным векторам $\mathbf{G}_j/\sqrt{G_{(j)(j)}}$, вычисляются по формуле[1])

$$s_{ij} = \sigma^{ij}\frac{\sqrt{G_{jj}}}{\sqrt{G^{ii}}}; \qquad \text{здесь по } i \text{ и } j \text{ суммирования нет.} \qquad (5.11)$$

Величины s_{ij} не являются компонентами тензора.

В соответствии с определениями напряжений и поверхностных сил, в точках граничных поверхностей деформированного тела вектор напряжения должен равняться плотности поверхностной силы. Это условие

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{S} \qquad (5.12)$$

в граничных точках называется *динамическим краевым условием* или *краевым условием в напряжениях* [2]). Если поверхностную силу отнести к базису $\mathbf{G}_j$, то

$$\sigma^{ij}n_i = S^j, \qquad (5.13)$$

где n_i — ковариантные компоненты единичного вектора, нормального к граничной поверхности деформированного тела, а S^j — контравариантные компоненты вектора $\mathbf{S}$.

Поскольку в механике твердого тела обычно предполагается, что априори известна форма тела в некоторой начальной конфигурации, то часто бывает удобно определять напряженное состояние в точке с помощью тензора напряжений t^{ij} в конвективных координатах x^i, но измеренных на единицу площади в недеформированном теле [3]). Компоненты t^{ij} и σ^{ij} в одной и той же системе координат связаны между собой соотношением

$$t^{ij} = \sqrt{G}\,\sigma^{ij}. \qquad (5.14)$$

Если $\mathbf{t}$ — вектор напряжений, измеряемых на единицу площади недеформированного тела, то вместо (5.9) имеем

$$\mathbf{t} = t^{ij}\hat{n}_i\mathbf{G}_j, \qquad (5.15)$$

где $\hat{n}_i$ — компоненты единичной нормали $\hat{\mathbf{n}}$ к недеформированной поверхности, отнесенной к базису $\mathbf{i}_i$ в начальной конфигурации:

$$\hat{\mathbf{n}} = \hat{n}_i\mathbf{i}_i. \qquad (5.16)$$

---

[1]) В предположении, что криволинейные координаты x_i ортогональны.— *Прим. перев.*

[2]) При постановке нелинейных краевых задач возможны и другие формулировки краевых условий в напряжениях; см., например, Савин [1968, стр. 637, 638].— *Прим. перев.*

[3]) См. Грин и Адкинс [1960, стр. 12—14].

5.3. ЗАКОНЫ ДВИЖЕНИЯ КОШИ

Используем теперь уравнения количества и момента количества движения для получения локальных уравнений движения, применимых к любой частице $\mathbf{x}$ в конфигурации C. Пусть $\mathbf{F}$ обозначает плотность массовых сил, а $\mathbf{S}$ — плотность поверхностных сил. Тогда в соответствии с (5.4) и (5.6)

$$\frac{d}{dt}\int_v \mathbf{v}\rho\, dv = \mathbf{F}_{(R)} = \int_v \mathbf{F}\rho\, dv + \int_A \mathbf{S}\, dA. \tag{5.17}$$

Учитывая (5.12) и (5.13) и с помощью формулы Грина — Гаусса [1]) преобразуя интеграл по замкнутой поверхности в интеграл по ограниченному этой поверхностью объему, получаем

$$\int_A \mathbf{S}\, dA = \int_A \sigma^{ij} n_i \mathbf{G}_j\, dA = \int_v \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial}{\partial x^i}\left(\sqrt{G}\,\sigma^{ij}\mathbf{G}_j\right) dv. \tag{5.18}$$

Предположим теперь, что $\mathbf{v}$, $\dot{\mathbf{v}}$ и ρ непрерывны в v. Вследствие закона сохранения массы $d\,(\rho\, dv)/dt = 0$. Поэтому (5.17) можно переписать в форме

$$\int_v \left[\frac{1}{\sqrt{G}}\left(\sqrt{G}\,\sigma^{ij}\mathbf{G}_j\right)_{,i} + \rho\mathbf{F} - \rho\mathbf{a}\right] dv = 0, \tag{5.19}$$

где $\mathbf{a} = \dot{\mathbf{v}}$ — ускорение. Так как (5.19) справедливо для любого объема, подынтегральное выражение должно обращаться в нуль. Следовательно,

$$\frac{1}{\sqrt{G}}\left(\sqrt{G}\,\sigma^{ij}\mathbf{G}_j\right)_{,i} + \rho\mathbf{F} = \rho\mathbf{a}. \tag{5.20}$$

С другой стороны, (5.20) можно записать в форме

$$\sigma^{ij}_{;i} + \rho F^j = \rho a^j, \tag{5.21}$$

где точка с запятой означает ковариантное дифференцирование по конвективным координатам x^i, т. е.

$$\sigma^{ij}_{;i} = \sigma^{ij}_{,i} + \overline{\Gamma}^j_{im}\sigma^{im} + \overline{\Gamma}^m_{im}\sigma^{ij}, \tag{5.22}$$

где $\overline{\Gamma}^j_{im}$ — символы Кристоффеля второго рода для деформированного тела:

$$\overline{\Gamma}^j_{im} = \frac{\partial^2 z_r}{\partial x^i\, \partial x^m}\frac{\partial x^j}{\partial z_r}, \qquad \tau > 0. \tag{5.23}$$

Уравнение (5.21) называется *первым законом движения Коши*.

---

[1]) У нас ее обычно называют формулой Гаусса — Остроградского. — *Прим. ред.*

Часто бывает удобно записывать уравнение движения в величинах, отнесенных к начальной конфигурации C_0. Учитывая (5.3) и (5.14) и замечая, что

$$\mathbf{F}=F^j\mathbf{G}_j=\hat{F}_j\mathbf{i}_j, \tag{5.24}$$

$$\mathbf{a}=a^j\mathbf{G}_j=\ddot{u}_j\mathbf{i}_j, \tag{5.25}$$

$$\hat{F}_j=z_{m,\,j}F^m, \qquad \ddot{u}_j=z_{m,\,j}a^m, \tag{5.26а,б}$$

видим, что (5.21) можно преобразовать к виду

$$(t^{ij}z_{m,\,j})_{,\,i}+\rho_0\hat{F}_m=\rho_0\ddot{u}_m. \tag{5.27}$$

Возвращаясь к уравнению момента количества движения, получаем [1])

$$\frac{d}{dt}\int\limits_v \mathbf{R}\times\mathbf{v}\rho\,dv=\mathbf{M}_{(R)}=\int\limits_v \mathbf{R}\times\mathbf{F}\rho\,dv+\int\limits_A \mathbf{R}\times\mathbf{S}\,dA. \tag{5.28}$$

Проводя аналогичные рассуждения и используя (5.20), получим локальное уравнение момента количества движения

$$\mathbf{G}_i\times\sqrt{G}\,\sigma^{ij}\mathbf{G}_j=0, \tag{5.29}$$

или, в другой форме,

$$\varepsilon_{ijk}\sigma^{ij}=0. \tag{5.30}$$

Отсюда следует, что

$$\sigma^{ij}=\sigma^{ji} \tag{5.31}$$

или, с учетом (5.14),

$$t^{ij}=t^{ji}. \tag{5.32}$$

Уравнение (5.30) называется *вторым законом движения Коши*. Уравнения (5.31) и (5.32) показывают, что вследствие этого закона тензоры напряжений σ^{ij} и t^{ij} симметричны. Таким образом, из девяти компонент напряжения независимы только шесть.

[1]) Мы ограничиваемся здесь изучением монополярных сред, так что возможность существования моментных напряжений, объемных или массовых моментов и т. д. не рассматривается.

Глава II

Теория конечных элементов

6. ВВОДНОЕ ИЗЛОЖЕНИЕ ОСНОВНЫХ ИДЕЙ МЕТОДА КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Метод конечных элементов можно трактовать как систематический способ аппроксимации непрерывной функции дискретной моделью, представляющей собой множество значений заданной функции в некотором конечном числе точек области ее определения в совокупности с кусочными аппроксимациями этой функции на некотором конечном числе подобластей. Эти подобласти называются *конечными элементами*, и локальная аппроксимация функции на каждом конечном элементе единственным образом определяется значениями этой функции в конечном числе предварительно выбранных точек области ее определения. Таким образом, при построении конечноэлементной модели заданной функции поступают следующим образом:

1. В области определения функции фиксируют конечное число точек и определяют значения функции в этих точках. Выбранные точки называют *узловыми точками* или просто *узлами*.
2. Область определения функции приближенно представляют в виде совокупности конечного числа непересекающихся подобластей, называемых конечными элементами. Таким образом, моделью области определения функции является совокупность конечных элементов, связанных между собой надлежащим образом в узлах на их границах.
3. Заданную функцию локально аппроксимируют на каждом конечном элементе непрерывными функциями, однозначно определяемыми значениями функции (а возможно, и значениями ее производных вплоть до некоторого порядка) в узловых точках, принадлежащих этим элементам.

Важной особенностью метода конечных элементов является то, что первоначально при локальной аппроксимации функции на конечных элементах их можно рассматривать независимо друг от друга. Это значит, что каждый элемент можно считать совершенно изолированным от всей совокупности и аппроксимировать функцию на этом элементе с помощью ее значений в узлах независимо

от того, какое место займет рассматриваемый элемент в связанной модели, и от поведения функции на других конечных элементах. Таким образом, имеется возможность создания каталога разнообразных конечных элементов с произвольными узловыми значениями локальной аппроксимирующей функции. Мы можем затем выбирать из этого каталога те конечные элементы, которые нужны для аппроксимации области определения заданной функции и ее значений.

6.1. ОДНОМЕРНАЯ ЗАДАЧА

Чтобы лучше уяснить суть метода, рассмотрим, например, вещественную непрерывную функцию $F(X)$, определенную на интервале $[A, B]$ вещественной оси (рис. 6.1a). Конечноэлементная модель $\bar{F}(x)$ этой функции представлена на рис. 6.1b. Видно, что приближенная функция построена так, что ее значения совпадают со значениями заданной функции в конечном числе узловых точек области определения (в нашем случае в пяти точках), а на каждом подынтервале e функция $F(X)$ аппроксимируется некоторой функцией $f_{(e)}(x)$, где $x = x_{(e)}$ — *локальные координаты* точки в подынтервале e. Такую модель функции $F(X)$ можно построить следующим образом:

1. Фиксируется конечное число (пять) узловых точек в интервале $[A, B]$, где определена функция $F(X)$, и вычисляются ее значения в каждом узле (рис. 6.2a):
$$F^\Delta = F(X^\Delta), \qquad \Delta = 1, 2, 3, 4, 5. \qquad (6.1)$$
Пять величин $(F^1, F^2, F^3, F^4, F^5)$ называются *глобальными значениями* функции. Глобальные значения являются элементами некоторого множества $\mathcal{G}$.
2. Интервал $[A, B]$ разбивается на конечное число (четыре) подынтервалов, называемых конечными элементами. Каждый элемент рассматривается самостоятельно и временно считается не связанным с другими элементами, т. е. не имеющим с ними общих точек.

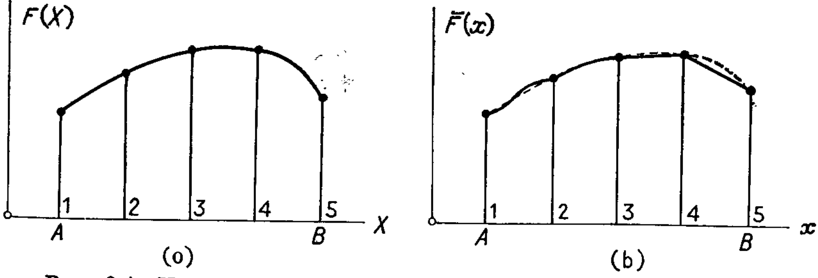


Рис. 6.1. Непрерывная функция $F(X)$ и ее конечноэлементное представление $\bar{F}(x)$.

3. Для каждого элемента e устанавливается система локальных координат $x_{(e)}$. Заданная функция локально аппроксимируется на e функцией $f_{(e)}(x) \equiv f_{(e)}(x_{(e)})$, которая в узлах 1 и 2 на концах подынтервала принимает значения $f^1_{(e)}$ и $f^2_{(e)}$ (рис. 6.2b). Восемь значений $(f^1_{(1)}, f^2_{(1)}, f^1_{(2)}, \ldots, f^2_{(4)})$ можно рассматривать как элемент некоторого множества $\mathcal{L}$. Величины $f^N_{(e)}$ $(N = 1, 2)$ называются локальными значениями функции, соответствующими элементу e.
4. Интервал $[A, B]$ отображается на подынтервалы $[a_{(e)}, b_{(e)}]$ $(e = 1, 2, 3, 4)$ с помощью простых отношений *инцидентности*, связывающих глобальные координаты X^Δ различных узлов с локальными координатами $x^N_{(e)}$:

$$\begin{aligned} &x^1_{(1)} = X^1, && x^2_{(1)} = x^1_{(2)} = X^2, \\ &x^2_{(2)} = x^1_{(3)} = X^3, && x^2_{(3)} = x^1_{(4)} = X^4, \\ &x^2_{(4)} = X^5. \end{aligned} \tag{6.2}$$

Эти отношения допускают две различные интерпретации. Если временно рассматривается один отдельный элемент,

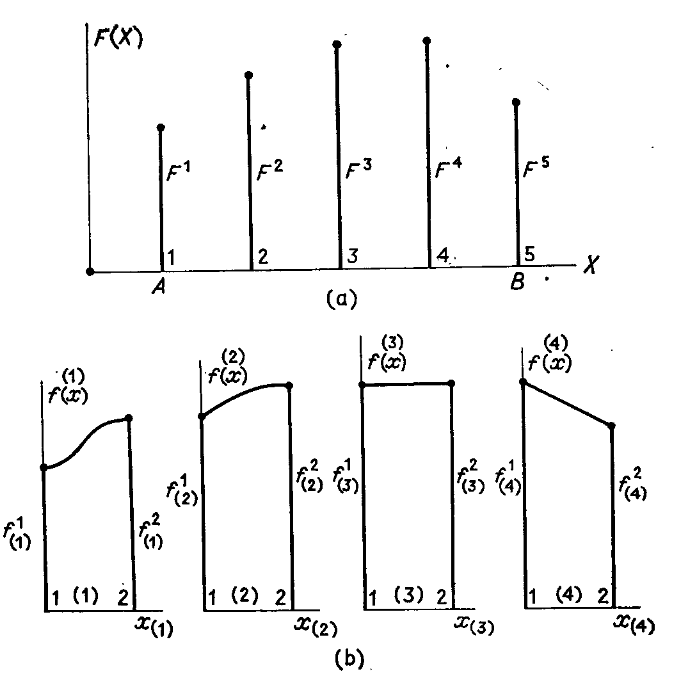


Рис. 6.2. Глобальные значения и локальные аппроксимации функции $F(X)$

то отношения типа $x^1_{(2)} = X^2$ и $x^2_{(2)} = X^3$ описывают вложение элемента в связанную модель интервала $[A, B]$. Таким образом, они описывают *связывание* конечноэлементной модели. С другой стороны, отношения типа $X^4 = x^2_{(3)} = x^1_{(4)}$ описывают *разбиение* отрезка на конечные элементы. Как будет показано позже, эти интерпретации по математической природе совершенно различны.

5. Между глобальными значениями функции F^Δ ($\Delta = 1, 2, 3, 4, 5$) и локальными значениями $f^N_{(e)}$ ($e = 1, 2, 3, 4$; $N = 1, 2$) устанавливается связь с помощью простых отношений инцидентности вида:
$$\begin{aligned} &f^1_{(1)} = F^1, && f^2_{(1)} = f^1_{(2)} = F^2,\\ &f^2_{(2)} = f^1_{(3)} = F^3, && f^2_{(3)} = f^1_{(4)} = F^4,\\ &f^2_{(4)} = F^5, && \end{aligned} \tag{6.3}$$
которые непосредственно следуют из (6.2) в силу того, что значения функций $F(X)$ и $f_{(e)}(x)$ находятся во взаимно однозначном соответствии с точками X и $x_{(e)}$ их областей определения.

6. Ввиду того, что теперь локальные аппроксимирующие функции однозначно определяются через глобальные значения F^Δ посредством формул (6.3), их рассматривают совместно; окончательная модель функции $F(X)$ имеет простой вид
$$\overline{F}(x) = \sum_{e=1}^{4} \overline{f}_{(e)}(x, F^1, F^2, \ldots, F^5), \tag{6.4}$$
где $\overline{f}_{(e)}(x, F^1, F^2, \ldots, F^5)$ — локальные функции, выраженные через соответствующие глобальные значения.

При построении конечноэлементных моделей других функций, скажем $G(X)$, $H(X)$ и т. д., определенных на других интервалах вещественной оси, не слишком много выигрывается, если строить локальные аппроксимации для каждого подынтервала, выбираемого в области определения функции, совершенно независимо. Как указывалось ранее, мы можем локально определить функцию на произвольном отрезке с помощью произвольных узловых значений, и эта одна и та же локальная аппроксимация может использоваться многократно для построения дискретных моделей целого множества различных функций путем придания нужных значений произвольной длине отрезка и задания нужного положения узлов в модели области определения рассматриваемой функции. Математически это достигается введением отношений инцидентности типа (6.2), которые устанавливают связь между глобальными координатами X^Δ и локальными координатами $x^N_{(e)}$. Подобным же

образом произвольность локальных узловых значений $f^N_{(e)}$ устраняется отношениями типа (6.3), которые позволяют выразить $f^N_{(e)}$ через соответствующие глобальные значения F^Δ.

Описанные выше зависимости, существующие между связанной моделью и отдельными конечными элементами, а также между глобальными и локальными узлами, математически могут быть описаны двумя довольно простыми отображениями. Рассмотрим сначала любой элемент некоторой совокупности $\mathscr{R}^*$ непересекающихся интервалов: $\mathscr{R}^* = \{[x^1_{(1)}, x^2_{(1)}], [x^1_{(2)}, x^2_{(2)}], \ldots, [x^1_{(4)}, x^2_{4}]\}$. Пусть Λ — отображение, которое вкладывает некоторый *фиксированный* интервал e в соответствующее место в интервале $[A, B]$. Это отображение Λ: $[x^1_{(e)}, x^2_{(e)}] \to [A, B]$ осуществляется так [1]):

$$X^\Delta = \sum_{N=1}^{2} \overset{(e)}{\Lambda}{}^\Delta_N x^N_{(e)}, \qquad e \text{ фиксированно}, \tag{6.5}$$

где $\Delta = 1, 2, \ldots, 5$ и

$$\overset{(e)}{\Lambda}{}^\Delta_N = \begin{cases} 1, & \text{если узел } \Delta \text{ связанной модели соответствует узлу } N \text{ элемента } e \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases} \tag{6.6}$$

Например, в равенствах (6.2) для четвертого элемента $\overset{(4)}{\Lambda}{}^\Delta_N = 0$, если $\Delta \neq 4, 5$, и в соответствии с (6.2)

$$\begin{aligned} X^4 &= \overset{(4)}{\Lambda}{}^4_1 x^1_{(4)} + \overset{(4)}{\Lambda}{}^4_2 x^2_{(4)} = x^1_{(4)}, \\ X^5 &= \overset{(4)}{\Lambda}{}^5_1 x^1_{(4)} + \overset{(4)}{\Lambda}{}^5_2 x^2_{(4)} = x^2_{(4)}, \end{aligned} \tag{6.7}$$

так как $\overset{(4)}{\Lambda}{}^4_1 = \overset{(4)}{\Lambda}{}^5_2 = 1$ и $\overset{(4)}{\Lambda}{}^4_2 = \overset{(4)}{\Lambda}{}^5_1 = 0$.

Отображение $\overset{(e)}{\Lambda}$ описывает вложение интервала $[a_{(e)}, b_{(e)}]$ в интервал $[A, B]$ и называется *привязыванием* элемента e к модели области определения функции. С другой стороны, совокупность таких отображений

$$\Lambda = \{\overset{(1)}{\Lambda}, \overset{(2)}{\Lambda}, \overset{(3)}{\Lambda}, \overset{(4)}{\Lambda}, \overset{(5)}{\Lambda}\}$$

---

[1]) Отношения инцидентности, подобные этому, были введены Кроном [1939] и рядом других авторов. Аргирис [1954] использовал аналогичные преобразования в своем методе перемещений. Форма, использованная в (6.5), подобна предложенной Висманном [1962, 1963, 1966] для конечноэлементного расчета больших деформаций упругих тел. Эти преобразования использовались при исследовании нелинейных задач Оденом [напр., 1967а, 1967б, 1969а, 1969б]. Равенство (6.5) является просто формальной математической формулировкой связывания модели. Практически оно записывается с помощью соответствующей нумерации узловых точек. Необходимость полностью определять массив $\overset{(e)}{\Lambda}{}^\Delta_N$ возникает редко.

можно рассматривать как отображение нашей совокупности $\mathcal{R}^*$ непересекающихся интервалов на «связанный» интервал $[A, B]$. Говорят, что отображения Λ осуществляют *связывание* конечноэлементной модели.

Транспозиция отображения $\overset{(e)}{\Lambda}{}^{\Delta}_{N}$ обозначается через $\overset{(e)}{\Omega}{}^{N}_{\Delta}$; она интерпретируется как отображение множества $\mathcal{G}$ глобальных точек X^{Δ} в множество $\mathcal{L}$ локальных точек $x^{N}_{(e)}$:

$$x^{N}_{(e)} = \sum_{\Delta=1}^{5} \overset{(e)}{\Omega}{}^{N}_{\Delta} X^{\Delta}. \tag{6.8}$$

Элементы массива $\overset{(e)}{\Omega}{}^{N}_{\Delta}$ определяются по существу так же, как и элементы массива $\overset{(e)}{\Lambda}{}^{\Delta}_{N}$:

$$\overset{(e)}{\Omega}{}^{N}_{\Delta} = \begin{cases} 1, & \text{если узел } N \text{ элемента } e \text{ соответствует узлу } \Delta \\ & \text{связанной модели,} \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases} \tag{6.9}$$

Например, если рассмотреть узел $x^{2}_{(3)}$ (рис. 6.2), то

$$x^{2}_{(3)} = \overset{(3)}{\Omega}{}^{2}_{1} X^{1} + \overset{(3)}{\Omega}{}^{2}_{2} X^{2} + \overset{(3)}{\Omega}{}^{2}_{3} X^{3} + \overset{(3)}{\Omega}{}^{2}_{4} X^{4} + \overset{(3)}{\Omega}{}^{2}_{5} X^{5}. \tag{6.10}$$

Но по определению $\overset{(3)}{\Omega}{}^{2}_{\Delta} = 0$, если $\Delta \neq 4$, а $\overset{(3)}{\Omega}{}^{2}_{4} = 1$. Таким образом,

$$x^{2}_{(3)} = X^{4}. \tag{6.11}$$

Отображение $\overset{(e)}{\Omega}{}^{N}_{\Delta}$ означает просто перенумерацию целочисленных меток, приписанных различным узловым точкам модели. В некотором смысле $\overset{(e)}{\Omega}$ можно рассматривать как отображение конечного подмножества интервала $[A, B]$ в подмножество конечных подынтервалов. По этой причине совокупность Ω таких отображений будет называться *разбиением* $[A, B]$ на конечные элементы.

Ясно, что массивы $\overset{(e)}{\Lambda}{}^{\Delta}_{N}$ и $\overset{(e)}{\Omega}{}^{N}_{\Delta}$ можно использовать для того, чтобы образовать композицию $\overset{(e)}{\Lambda}\,\overset{(e)}{\Omega} = I_e$, где I_e — тождественное отображение совокупности локальных узлов элемента e на себя:

$$\sum_{\Delta=1}^{5} \overset{(e)}{\Lambda}{}^{\Delta}_{M} \overset{(e)}{\Omega}{}^{N}_{\Delta} = \delta^{N}_{M}, \qquad N, M = 1, 2. \tag{6.12}$$

Здесь δ^{N}_{M} — символ Кронекера. Можно также образовать композицию $\overset{(e)}{\Omega}\,\overset{(e)}{\Lambda} = I^{(e)}_{G}$, где $I^{(e)}_{G}$ — отображение совокупности гло-

бальных узлов, соответствующих элементу e, на себя:

$$\sum_{N=1}^{2} \overset{(e)}{\Lambda}{}^{\Delta}_{N} \overset{(e)}{\Omega}{}^{N}_{\Gamma} = \begin{cases} \delta^{\Delta}_{\Gamma}, & \text{если узлы } X^{\Delta},\ X^{\Gamma} \text{ принадлежат элементу } e, \\ 0, & \text{если узлы } X^{\Delta},\ X^{\Gamma} \text{ не принадлежат элементу } e, \end{cases} \tag{6.13}$$

$$\Delta,\ \Gamma = 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5.$$

Возвращаясь теперь к $F(X)$, напомним, что заданная функция $F(X)$ осуществляет взаимно однозначное соответствие между ее *значениями* $F = F(X)$ и точками X области ее определения. Таким образом, любой локальной или глобальной точке, фигурирующей в равенствах (6.7) или (6.8), соответствует локальное или глобальное значение функции. На это соответствие ясно указывает то, что отношения (6.3) по форме идентичны отношениям (6.2). Отсюда следует, что для фиксированного e можно записать

$$F^{\Delta} = \sum_{N=1}^{2} \overset{(e)}{\Lambda}{}^{\Delta}_{N} f^{N}_{(e)} \tag{6.14}$$

и

$$f^{N}_{(e)} = \sum_{\Delta=1}^{5} \overset{(e)}{\Omega}{}^{N}_{\Delta} F^{\Delta}. \tag{6.15}$$

6.2. ДВУМЕРНАЯ ЗАДАЧА

Прием, использованный в одномерном случае, можно использовать и при построении конечноэлементных моделей функций, определенных на двумерных областях. Рассмотрим, например, скалярную функцию $\Phi = \Phi(X, Y)$, определенную в некоторой замкнутой области $\mathcal{R}$ плоскости X, Y (рис. 6.3). Зафиксируем некоторое конечное число G точек и пометим их последовательно числами $1, 2, \ldots, G$. Значения Φ^{Δ} в этих точках задаются формулой

$$\Phi^{\Delta} = \Phi(\mathbf{X}^{\Delta}), \tag{6.16}$$

где $\mathbf{X}^{\Delta}$ — точка под номером Δ с координатами (X^{Δ}, Y^{Δ}).

Аппроксимируем область $\mathcal{R}$ некоторой совокупностью E подобластей r_e, точки которых задаются локальными координатами $\mathbf{x}_{(e)} = (x_{(e)}, y_{(e)})$. Локальные аппроксимации заданной функции на каждом элементе обозначим через $\varphi_{(e)}(\mathbf{x})$, а их значения в узлах $\overset{N}{\mathbf{x}}_{(e)}$ — через $\overset{N}{\varphi}_{(e)}$, где $N = 1, 2, \ldots, N_e$, N_e — общее число узлов элемента e. Связывание и разбиение модели осуще-

ствляются с помощью отношений инцидентности

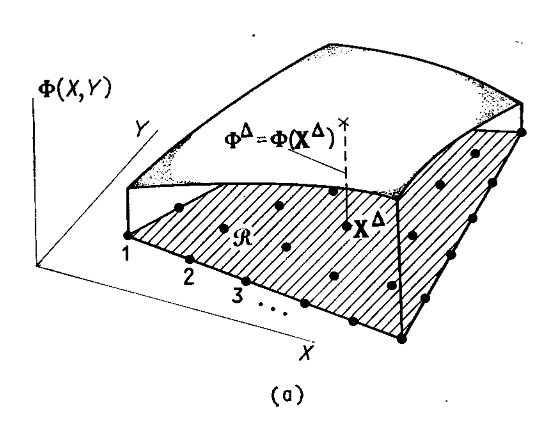
$$\mathbf{X}^{\Delta}=\sum_{N=1}^{Ne}\overset{(e)}{\Lambda}{}^{\Delta}_{N}\mathbf{x}^{N}_{(e)}\quad\text{и}\quad\mathbf{x}^{N}_{(e)}=\sum_{\Delta=1}^{G}\overset{(e)}{\Omega}{}^{N}_{\Delta}\mathbf{X}^{\Delta},\qquad(6.17\text{а,б})$$

а локальные значения связаны с глобальными посредством отображений

$$\Phi^{\Delta}=\sum_{N=1}^{Ne}\overset{(e)}{\Lambda}{}^{\Delta}_{N}\varphi^{N}_{(e)}\quad\text{и}\quad\varphi^{N}_{(e)}=\sum_{\Delta=1}^{G}\overset{(e)}{\Omega}{}^{N}_{\Delta}\Phi^{\Delta}.\qquad(6.18\text{а,б})$$

Окончательная модель функции Φ (**X**) такова:

$$\overline{\Phi}(\mathbf{x})=\sum_{e=1}^{E}\varphi_{(e)}(\mathbf{x},\ \Phi^{1},\ \ldots,\ \Phi^{G}).\qquad(6.19)$$



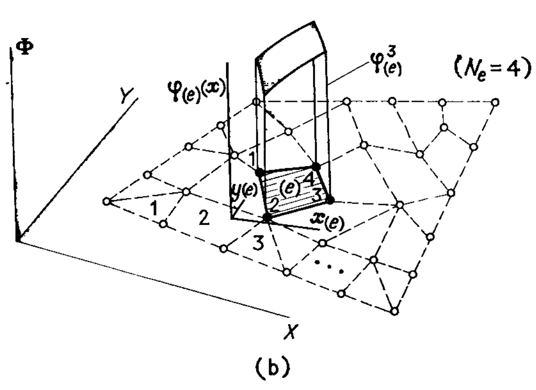


Рис. 6.3. Конечноэлементное представление скалярной функции, определенной в двумерной области.

7. КОНЕЧНОЭЛЕМЕНТНЫЕ МОДЕЛИ ФУНКЦИЙ ОБЩЕГО ВИДА [1]

Мы изложили в предыдущем параграфе основные идеи метода конечных элементов. Займемся теперь их обобщением, с тем чтобы построить конечноэлементные представления произвольных функций, определенных на пространствах любой конечной размерности k.

7.1. НЕКОТОРЫЕ ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ МАТЕМАТИКИ

Изложим кратко ряд понятий и фактов [2], полезных при исследовании свойств общих конечноэлементных моделей непрерывных полей.

Мы используем обычные теоретико-множественные обозначения [3]. Например, $a \in \mathscr{A}$ означает «a принадлежит множеству $\mathscr{A}$»; $a \notin \mathscr{A}$ означает, что a не принадлежит $\mathscr{A}$; $\mathscr{A} \subseteq \mathscr{B}$ — что $\mathscr{A}$ является подмножеством $\mathscr{B}$, а $\mathscr{A} \subset \mathscr{B}$ — что $\mathscr{A}$ является собственным подмножеством $\mathscr{B}$. Запись вида $\mathscr{A} = \{a \mid a$ обладает свойством $P\}$ используется для указания множеств, все элементы которых обладают определенным свойством P. Равенство двух множеств, записываемое в виде $\mathscr{A} = \mathscr{B}$, означает, что $\mathscr{A} \subseteq \mathscr{B}$ и $\mathscr{B} \subseteq \mathscr{A}$. Объединение, пересечение и разность двух множеств $\mathscr{A}$ и $\mathscr{B}$ обозначаются соответственно через $\mathscr{A} \cup \mathscr{B}$, $\mathscr{A} \cap \mathscr{B}$ и $\mathscr{A} \setminus \mathscr{B}$. Прямое (декартово) произведение двух множеств $\mathscr{A}$ и $\mathscr{B}$ — это множество $\mathscr{A} \times \mathscr{B}$ упорядоченных пар (a, b), т. е. $\mathscr{A} \times \mathscr{B} = \{(a, b) \mid a \in \mathscr{A},\ b \in \mathscr{B}\}$.

Пусть $\mathscr{A}$ — подмножество $\mathscr{B}$. Элемент $b \in \mathscr{B}$ называется *точкой накопления* или *предельной точкой* множества $\mathscr{A}$, если в любой окрестности b (т. е. в любом открытом множестве, содержащем b) имеется точка множества $\mathscr{A}$, отличная от b. Иначе говоря, если b — точка накопления для $\mathscr{A}$, то любая окрестность b содержит бесконечное число точек множества $\mathscr{A}$. Множество, состоящее из $\mathscr{A}$ и всех его точек накопления, называется *замыканием* $\mathscr{A}$. Если $\mathscr{A}$ и $\mathscr{B}$ — два таких множества, что замыкание $\mathscr{A}$ содержит в себе $\mathscr{B}$, то говорят, что $\mathscr{A}$ *плотно* в $\mathscr{B}$. Если же замыкание $\mathscr{A}$ равно $\mathscr{B}$, то говорят, что $\mathscr{A}$ *всюду плотно* в $\mathscr{B}$.

Термины «функция», «отображение» и «преобразование» используются как синонимы и имеют следующий смысл: если даны два множества $\mathscr{A}$ и $\mathscr{B}$, то отображение F множества $\mathscr{A}$ в множество $\mathscr{B}$, обозначаемое символом $F\colon \mathscr{A} \to \mathscr{B}$,— это правило, которое каждому элементу $a \in \mathscr{A}$ ставит в соответствие один и только один элемент $F(a) \in \mathscr{B}$. Формально F — это такое подмножество произведения $\mathscr{A} \times \mathscr{B}$, что $(a, b) \in F$ и $(a, c) \in F \Longrightarrow b = c$, где символ $\Longrightarrow$ читается «влечет за собой». Множество $\mathscr{A}$ называется *областью определения* функции F, а элемент $F(a) \in \mathscr{B}$ — *образом* элемента a при отображении F или *значением* функции в точке a. Вся совокупность образов $F(\mathscr{A}) = \{f(a) \mid a \in \mathscr{A}\}$ называется *образом отображения* F. Ото-

---

[1]) Материал этого параграфа в основном соответствует статьям Одена [1969а, 1969б]. См. также Оден [1967б], Оден и Агирре-Рамирес [1969].

[2]) Некоторые из этих понятий рассматриваются подробнее в § 9 и 10.

[3]) См., например, Биркгоф и Маклейн [1941], Мур [1962] или Мак-Кой [1960]. Доступно и полно линейная и абстрактная алгебра изложены в книге Мостова, Сэмпсона и Мейера (1963), а также у Финкбейнера [1966] и Гройба [1963]. С основами функционального анализа можно ознакомиться по книгам Колмогорова и Фомина [1972], Люстерника и Соболева [1965] или Тэйлора [1958].

бражение F называется отображением $\mathcal{A}$ *на* $\mathcal{B}$, если $F(\mathcal{A}) = \mathcal{B}$, и называется *взаимно однозначным*, если $f(a) = f(b) \Longrightarrow a = b$. Если F: $\mathcal{A} \to \mathcal{B}$ взаимно однозначное отображение на, то для каждого $b \in \mathcal{B}$ существует единственный элемент $a \in \mathcal{A}$, такой, что $b = f(a)$, т. е. существует *обратная функция* F^{-1}: $\mathcal{B} \to \mathcal{A}$.

Группой $\mathcal{G}$ называется алгебраическая система, состоящая из множества $\mathcal{A}$ и операции „$*$" (отображения из $\mathcal{A} \times \mathcal{A}$ в $\mathcal{A}$), ставящей в соответствие каждой упорядоченной паре (a, b) элементов a, $b \in \mathcal{A}$ третий элемент $c \in \mathcal{A}$, обозначаемый через $c = a * b$, такая, что

1° $(a * b) * c = a * (b * c)$;
2° существует элемент $e \in \mathcal{A}$, удовлетворяющий условию $e * a = a * e = a$ для любого $a \in \mathcal{A}$;
3° для любого $a \in \mathcal{A}$ существует элемент $a^{-1} \in \mathcal{A}$, такой, что $a^{-1} * a = a * a^{-1} = e$.

Если $a * b = b * a$, то группа $\mathcal{G}$ называется *абелевой* (или *коммутативной*).

Пусть R означает поле действительных (или комплексных) чисел, т. е. множество частично упорядоченных действительных (комплексных) чисел с обычными операциями сложения и умножения. *Линейным* (или *векторным*) *пространством* $\mathcal{V}$ называется абелева группа, образуемая множеством элементов $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, . . ., иногда называемых *векторами*, и операцией $+$, называемой *векторным сложением*, в совокупности с отображением $\mathrm{R} \times \mathcal{V} \to \mathcal{V}$, называемым *скалярным умножением*, которое удовлетворяет следующему условию: для каждой пары чисел α, $\beta \in \mathrm{R}$ и каждой пары векторов $\mathbf{a}$, $\mathbf{b} \in \mathcal{V}$

1° $(\alpha\beta)\,\mathbf{a} = \alpha\,(\beta\mathbf{a})$;
2° $(\alpha + \beta)\,\mathbf{a} = \alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{a}$;
$\alpha\,(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \alpha\mathbf{a} + \alpha\mathbf{b}$;
3° $1\mathbf{a} = \mathbf{a}$.

В дальнейшем, если только не будет сделано специальной оговорки, под R понимается поле действительных чисел.

Максимальное число k линейно независимых элементов векторного пространства $\mathcal{V}$ называется его *размерностью*. Для обозначения пространства размерности k используется символ $\mathcal{V}^k$. *Базисом* пространства $\mathcal{V}$ размерности k называется всякое множество k линейно независимых элементов этого пространства. Любой вектор $\mathbf{a} \in \mathcal{V}$ является линейной комбинацией элементов базиса.

Подмножество S линейного пространства $\mathcal{V}$ с операциями векторного сложения и скалярного умножения называется подпространством $\mathcal{V}$ в том и только в том случае, когда оно само является линейным пространством. Если $\mathcal{G}$ и $\mathcal{T}$ — подпространства линейного пространства $\mathcal{V}$, то *суммой* $\mathcal{G}$ и $\mathcal{T}$, обозначаемой через $\mathcal{G} + \mathcal{T}$, называется множество элементов вида $\mathbf{s} + \mathbf{t}$, где $\mathbf{s} \in \mathcal{G}$, $\mathbf{t} \in \mathcal{T}$. Пересечение $\mathcal{G} \cap \mathcal{T}$ подпространств $\mathcal{G}$ и $\mathcal{T}$ — это в соответствии с общим определением множество элементов, принадлежащих одновременно обоим подпространствам. Как $\mathcal{G} + \mathcal{T}$, так и $\mathcal{G} \cap \mathcal{T}$ являются подпространствами $\mathcal{V}$. Если $\mathcal{G} + \mathcal{T} = \mathcal{V}$ и $\mathcal{G} \cap \mathcal{T} = \varnothing$, где $\varnothing$ — пустое множество, то $\mathcal{V}$ называется *прямой суммой* $\mathcal{G}$ и $\mathcal{T}$; это записывается так: $\mathcal{V} = \mathcal{G} \oplus \mathcal{T}$.

Часто в линейном пространстве $\mathcal{V}$ можно каждому элементу $\mathbf{a}$ поставить в соответствие неотрицательное действительное число, обозначаемое через $\|\mathbf{a}\|$ и называемое *нормой* $\mathbf{a}$, такое, что выполнены условия:

1° $\|\mathbf{a}\| \geqslant 0$, причем равенство выполняется в том и только в том случае, если $\mathbf{a} = 0$;
2° $\|\lambda\mathbf{a}\| = |\lambda|\,\|\mathbf{a}\|$ для любого скаляра λ;
3° $\|\mathbf{a} + \mathbf{b}\| \leqslant \|\mathbf{a}\| + \|\mathbf{b}\|$.

Линейное пространство, в котором определена норма, называется *нормированным линейным пространством.* Понятие нормы является обобщением обычного понятия длины вектора.

Последовательность $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n, \ldots$, элементов нормированного линейного пространства (записывается коротко $\{\mathbf{a}_n\}$), обладающая свойством $\lim\limits_{m,n\to\infty} \| \mathbf{a}_m - \mathbf{a}_n \| = 0$, называется *последовательностью Коши.* Если существует $\mathbf{a}_0$, такое, что $\lim\limits_{n\to\infty} \| \mathbf{a}_n - \mathbf{a}_0 \| = 0$, то говорят, что последовательность $\{\mathbf{a}_n\}$ сходится (или сходится по норме $\|\cdot\|$) к $\mathbf{a}_0$. Ясно, что если последовательность $\{\mathbf{a}_n\}$ сходится, то она является последовательностью Коши. Иногда последовательность элементов линейного пространства может сходиться к элементу, не принадлежащему этому пространству. Если в нормированном линейном пространстве каждая последовательность Коши сходится к элементу этого же пространства, то оно называется *полным.* К каждому неполному нормированному линейному пространству всегда можно добавить дополнительные элементы, так, что получающееся в результате пространство, называемое *пополнением* исходного пространства, будет полным нормированным линейным пространством. Полное нормированное линейное пространство называется *банаховым пространством.* Если каждая последовательность элементов пространства обладает сходящейся подпоследовательностью, то пространство называется *компактным.*

Пусть $\mathscr{B}_1$ и $\mathscr{B}_2$ — банаховы пространства, $\mathscr{D}$ — произвольное подпространство $\mathscr{B}_1$ и A — отображение (функция) $\mathscr{D}$ в $\mathscr{B}_2$. В этом случае A обычно называют *оператором.* Говорят, что множество $\mathscr{D}$ есть *область определения* оператора A, а множество всех элементов из $\mathscr{B}_2$ вида $A\mathbf{a}$, где $\mathbf{a} \in \mathscr{D}$,— *образ* оператора A.

Оператор A называется *аддитивным,* если

$$A(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = A\mathbf{a} + A\mathbf{b},$$

и *однородным,* если

$$A(\lambda\mathbf{a}) = \lambda(A\mathbf{a}),$$

где λ — произвольное действительное число и $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathscr{D}$. Если оператор A аддитивен и однороден, то он называется *линейным*; в противном случае — *нелинейным.* Оператор A *ограничен,* если существует положительное действительное число M, такое, что

$$\| A\mathbf{a} \| \leqslant M \| \mathbf{a} \|,$$

где символы $\| \;\; \|$ означают нормы в пространствах $\mathscr{B}_1$ или $\mathscr{B}_2$.

Сумма двух операторов A_1 и A_2 определяется формулой

$$(A_1 + A_2)\,\mathbf{a} = A_1\mathbf{a} + A_2\mathbf{a},$$

а умножение оператора A на скаляр λ — формулой

$$(\lambda A)\,\mathbf{a} = \lambda(A\mathbf{a}).$$

Можно показать, что совокупность всех линейных ограниченных операторов в банаховом пространстве $\mathscr{B}$ сама образует банахово пространство, если некоторым естественным образом ввести норму оператора.

Среди операторов особый интерес представляют функционалы. Оператор Φ называется *функционалом,* если пространство его значений является множеством действительных чисел. Таким образом, линейный функционал — это оператор $\Phi(\mathbf{a}) = \lambda$, где $\mathbf{a} \in \mathscr{D}$ и λ — действительное (или комплексное) число, такой, что $\Phi(\lambda\mathbf{a}) = \lambda\Phi(\mathbf{a})$ и $\Phi(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \Phi(\mathbf{a}) + \Phi(\mathbf{b})$. Совокупность всех ограниченных линейных функционалов на банаховом пространстве сама является банаховым пространством при соответствующем определении нормы функционала, которое обозначается через $\mathscr{B}^*$ и называется *сопряженным* к пространству $\mathscr{B}$.

Пространством со скалярным произведением называется линейное пространство, в котором определено скалярное произведение. Под скалярным произведением понимается отображение $\mathscr{V}^0 \times \mathscr{V}^0$ в R, ставящее в соответствие каждой паре элементов (a, b) $\in \mathscr{V}^0 \times \mathscr{V}^0$ неотрицательное действительное число, обозначаемое через $\langle a, b \rangle$, которое удовлетворяет следующим аксиомам:

1° $\langle a, a \rangle \geqslant 0$, причем равенство выполняется тогда и только тогда, когда $a = 0$;
2° $\langle a, b \rangle = \langle b, a \rangle$;
3° $\langle \lambda a + \mu b, c \rangle = \lambda \langle a, c \rangle + \mu \langle b, c \rangle$.

Понятие скалярного произведения позволяет ввести понятия ортогональности (элемент a ортогонален элементу b, если $\langle a, b \rangle = 0$) и длины ($\| a \| = \sqrt{\langle a, a \rangle}$). Отсюда следует, что каждое пространство со скалярным произведением является нормированным линейным пространством. Бесконечномерное банахово пространство со скалярным произведением, полное по норме $\| a \| = \sqrt{\langle a, a \rangle}$, называется *гильбертовым пространством*.

Часто оказывается возможным определить скалярное произведение элементов двух различных векторных пространств $\mathscr{V}^0$ и $\overline{\mathscr{V}^0}$ над одним и тем же полем скаляров как отображение пар (a, $\bar{a}$), где $a \in \mathscr{V}^0$ и $\bar{a} \in \overline{\mathscr{V}^0}$, во множество действительных чисел. При этом требуется, чтобы для любых a и $\bar{a}$

1° $\langle \lambda a + \mu b, \bar{a} \rangle = \lambda \langle a, \bar{a} \rangle + \mu \langle b, \bar{a} \rangle$;

2° $\langle a, \lambda \bar{a} + \mu \bar{b} \rangle = \lambda \langle a, \bar{a} \rangle + \mu \langle a, \bar{b} \rangle$;

3° $\langle a, \bar{a} \rangle = 0$ при фиксированном $a \in \mathscr{V}^0 \Rightarrow \bar{a} = 0$ и $\langle \bar{a}, a \rangle = 0$ при фиксированном $a \in \mathscr{V}^0 \Rightarrow a = 0$.

В этом случае $\mathscr{V}^0$ и $\overline{\mathscr{V}^0}$ называются *дуальными* пространствами[1]). Если g_i — базис $\mathscr{V}^0$ и g^i — базис $\overline{\mathscr{V}^0}$ и $\langle g_i, g^j \rangle = \delta_i^j$, то говорят, что эти базисы образуют биортогональный базис для $\mathscr{V}^0$ и $\overline{\mathscr{V}^0}$. С алгебраической точки зрения нет существенной разницы между пространством $\overline{\mathscr{V}^0}$, дуальным к пространству $\mathscr{V}^0$ со скалярным произведением, и сопряженным к $\mathscr{V}^0$ пространством $\mathscr{V}^{0*}$; фактически $\overline{\mathscr{V}^0}$ изоморфно $\mathscr{V}^{0*}$. Вследствие этого термины «дуальное пространство» и «сопряженное пространство» часто используются как синонимы.

Всякое пространство со скалярным произведением является *метрическим пространством*; обратное утверждение, несправедливо. Метрическое пространство — это совокупность элементов X, Y, Z, . . ., называемых *точками*, вместе с функцией d (X, Y) (*метрикой*), ставящей в соответствие каждой паре точек X и Y некоторое неотрицательное действительное число. Это число называется «расстоянием между» точками X и Y. Должны выполняться следующие три аксиомы метрики:

1) $d(X, X) = 0$;
2) $d(X, Y) = d(Y, X)$;
3) $d(X, Y) \leqslant d(X, Z) + d(Z, Y)$.

Полагая $d(X, Y) = \| X - Y \|$ или $d(X, Y) = \sqrt{\langle X - Y, X - Y \rangle}$, нетрудно видеть, что каждое нормированное линейное пространство, а следовательно, и каждое пространство со скалярным произведением является метрическим пространством. Метрическое пространство $\mathscr{M}$ называется *сепарабельным*, если в нем существует счетное всюду плотное множество.

---

[1]) В этом случае говорят также, что пространства $\mathscr{V}^0$ и $\overline{\mathscr{V}^0}$ *находятся в двойственности*. — *Прим. ред.*

В последующих параграфах будет удобно говорить о точках k-мерного пространства, не вводя каких-либо систем координат. Это достигается с помощью понятия *точечного пространства* $\mathscr{E}^k$. Говорят, что непустое множество $\mathscr{R}^k$ образует точечное пространство $\mathscr{E}^k$, ассоциированное с пространством $\mathscr{V}^k$ со скалярным произведением, если существует функция g: $\mathscr{R}^k \times \mathscr{R}^k \to \mathscr{V}^k$ со следующими свойствами:

1° для каждого $\mathbf{X} \in \mathscr{R}^k$ и каждого $\mathbf{a} \in \mathscr{V}^k$ существует единственный элемент $\mathbf{Y} \in \mathscr{R}^k$, такой, что $g(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = \mathbf{a}$;

2° если $g(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = \mathbf{a}$, $g(\mathbf{X}, \mathbf{Z}) = \mathbf{b}$ и $g(\mathbf{Y}, \mathbf{Z}) = \mathbf{c}$, где $\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z} \in \mathscr{R}^k$ и $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in \mathscr{V}^k$, то $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{c}$.

Элементы $\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \ldots \in \mathscr{R}^k$ называются точками. Далее, говорят, что вектор $g(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = \mathbf{a}$ есть *разность* между точками $\mathbf{X}$ и $\mathbf{Y}$, и удобно писать

$$g(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = \mathbf{X} - \mathbf{Y} = \mathbf{a}.$$

Размерностью точечного пространства $\mathscr{E}^k$ называется размерность пространства $\mathscr{V}^k$.

Таким образом, разность между двумя точками $\mathbf{Y}$, $\mathbf{X}$ является вектором $\overrightarrow{\mathbf{XY}} = \mathbf{Y} - \mathbf{X}$. Однако в дальнейшем, когда это не будет вызывать недоразумений, мы будем предполагать, что фиксирована некоторая точка $\mathbf{0}_{\mathscr{E}} \in \mathscr{E}^k$, называемая *началом*, так что под $\mathbf{X}$ можно понимать просто вектор $\mathbf{X} - \mathbf{0}_{\mathscr{E}} = \overrightarrow{\mathbf{0}_{\mathscr{E}}\mathbf{X}}$ — *радиус-вектор* точки $\mathbf{X}$ относительно точки $\mathbf{0}_{\mathscr{E}}$. Каждому $\mathbf{X}$ (или $\mathbf{X} - \mathbf{0}_{\mathscr{E}}$) можно поставить в соответствие набор k действительных чисел $\mathbf{X} = (X^1, X^2, \ldots, X^k)$, называемых координатами точки $\mathbf{X}$. Эти координаты определяются выбором базиса $\mathscr{V}^k$. Например, если в качестве базиса $\mathscr{V}^k$ взято ортонормированное множество векторов $\{\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \ldots \ldots \mathbf{i}_k\}$ (т. е. $\langle \mathbf{i}_i, \mathbf{i}_j \rangle = \delta_{ij}$, $i, j = 1, 2, \ldots, k$), то $\mathbf{X} - \mathbf{0}_{\mathscr{E}} = X^i \mathbf{i}_i$, где по повторяющемуся индексу производится суммирование от 1 до k, при этом X^i называются *декартовыми координатами*, а пространство $\mathscr{E}^k$ называется *эвклидовым точечным пространством*. Отметим, что в общем случае координаты $X^1, X^2, \ldots, X^k$ не обязательно декартовы и пространство $\mathscr{E}^k$ не обязательно эвклидово.

Под r-окрестностью $\mathscr{N}(\mathbf{X}_0)$ точки $\mathbf{X}_0 \in \mathscr{E}^k$ понимается открытый шар, определяемый как множество всех $\mathbf{X} \in \mathscr{E}^k$, для которых $d(\mathbf{X}_0, \mathbf{X}) < r$, где r — действительное число, называемое *радиусом* этого шара. Пусть $\mathscr{S}$ — некоторое подмножество $\mathscr{E}^k$, т. е. $\mathscr{S} \subset \mathscr{E}^k$. Точка $\mathbf{X} \in \mathscr{E}^k$ называется *внешней точкой* для $\mathscr{S}$, если существует окрестность $\mathbf{X}$, не содержащая точек множества $\mathscr{S}$. Если в каждой окрестности $\mathbf{X}$ имеются хотя бы одна точка, принадлежащая $\mathscr{S}$, и хотя бы одна, не принадлежащая $\mathscr{S}$, то $\mathbf{X}$ называется *граничной точкой* для $\mathscr{S}$. Множество всех граничных точек множества $\mathscr{S}$ называется его *границей* и обозначается через $\partial\mathscr{S}$.

Пусть $\mathscr{A}_1$ и $\mathscr{A}_2$ — непустые подмножества $\mathscr{E}^k$. Если $\mathscr{A}_1$ и $\mathscr{A}_2$ не имеют общих элементов, т. е. пересечение $\mathscr{A}_1 \cap \mathscr{A}_2$ пусто, то $\mathscr{A}_1$ и $\mathscr{A}_2$ называются *непересекающимися* (или *дизъюнктными*). Множество $\mathscr{S} \subset \mathscr{E}^k$ называется *несвязным*, если $\mathscr{S} = \mathscr{A}_1 \cup \mathscr{A}_2$, где $\mathscr{A}_1$ и $\mathscr{A}_2$ — непустые непересекающиеся множества. В противном случае оно называется *связным*.

Некоторые связные подмножества $\mathscr{R} \subset \mathscr{E}^k$ принято называть *областями* k-мерного пространства $\mathscr{E}^k$. А именно областью называется открытое связное подмножество $\mathscr{E}^k$ вместе со всеми своими граничными точками, с частью их или вообще без них. Если область $\mathscr{R}$ не содержит своих граничных точек, то она называется *открытой областью*; если же $\mathscr{R}$ содержит все свои граничные точки — то *замкнутой областью*. Ясно, что область не обязательно должна быть открытой или замкнутой. Если для всех $\mathbf{X} \in \mathscr{R}$ норма $\| \mathbf{X} \| =$

$= \| \mathbf{X} - \mathbf{0}_{\mathscr{E}} \| < M$, где M — некоторая положительная константа, то область $\mathscr{R}$ *ограничена*, а если область $\mathscr{R}$ одновременно замкнута и ограничена, то она *компактна* [1]).

Мы будем в основном рассматривать аппроксимации различных непрерывных функций, определенных на компактных подмножествах k-мерного точечного пространства $\mathscr{E}^k$. Более точно, пусть $\mathscr{T}$ — некоторое множество элементов $\mathbf{T}$, $\mathbf{U}$, $\mathbf{V}$, . . ., в значительной мере произвольных. Почти во всех наших приложениях величины $\mathbf{T}$ будут действительными или комплексными числами, векторами или тензорами заданного порядка. Нами будут рассматриваться отображения: F: $\mathscr{R} \to \mathscr{T}$, которые ставят в соответствие каждой точке $\mathbf{X}$ некоторого компактного подмножества $\mathscr{R}$ пространства $\mathscr{E}^k$ элемент $\mathbf{T} \in \mathscr{T}$. Для обозначения таких функций мы будем использовать запись $\mathbf{T} = \mathbf{F}(\mathbf{X})$, где $\mathbf{T}$ — значение функции в точке $\mathbf{X}$. Область $\mathscr{R}$ есть область определения функции $\mathbf{F}(\mathbf{X})$. Предполагается, что $\mathbf{F}$ непрерывна на $\mathscr{R}$, т. е. для каждой точки $\mathbf{X}_0$ принадлежащей $\mathscr{R}$, $\mathbf{F}(\mathbf{X}) \to \mathbf{F}(\mathbf{X}_0)$ при $d(\mathbf{X}, \mathbf{X}_0) \to 0$. Отсюда следует, что образ $\mathbf{F}(\mathscr{R})$ тоже компактен. Если при этом $\mathbf{F}$ — взаимно однозначная функция, то существует $\mathbf{F}^{-1}$ и $\mathbf{F}$ называют тогда *топологическим отображением* или *гомеоморфизмом*.

7.2. ЗАМЕЧАНИЯ ОБ ОБОЗНАЧЕНИЯХ

В последующем изложении постоянно используются индексные обозначения и хорошо известное соглашение о суммировании. Индексированная величина есть общий элемент некоторого упорядоченного массива. Для получения всех элементов этого массива надо придать каждому индексу все значения от 1 до верхнего допустимого для этого индекса предела. По всем повторяющимся индексам, если только они не заключены в скобки, производится суммирование по всем допустимым значениям этих индексов. Например, равенства (6.5) и (6.14) можно записать в виде

$$X^{\Delta} = \overset{(e)}{\Lambda}{}^{\Delta}_{N} x^{N}_{(e)} \quad \text{и} \quad F^{\Delta} = \overset{(e)}{\Lambda}{}^{\Delta}_{N} f^{N}_{(e)},$$

где суммирование производится по повторяющемуся индексу от 1 до N_e, где N_e — общее число узлов элемента e. Равенства (6.8) и (6.15) можно записать в форме

$$x^{N}_{(e)} = \overset{(e)}{\Omega}{}^{N}_{\Delta} X^{\Delta} \quad \text{и} \quad f^{N}_{(e)} = \overset{(e)}{\Omega}{}^{N}_{\Delta} F^{\Delta};$$

суммирование производится по повторяющемуся индексу Δ от 1 до G, где G — общее число глобальных узлов связанной модели.

Для обозначения того факта, что символ относится к типичному (общему) конечному элементу, он наделяется идентификационной меткой, в качестве которой обычно используется буква e. Эта буква является пометой, а не индексом, и во избежание путаницы она обычно заключается в скобки.

Часто будет необходимо различать глобальные величины (т. е. величины, относящиеся к совокупности конечных элементов) и локальные (т. е. относящиеся к отдельному конечному элементу).

---

[1]) Напомним, что речь идет о конечномерном пространстве.— *Прим. ред.*

За небольшими исключениями, для обозначения глобальных величин используются прописные буквы. Строчные латинские индексы используются для обозначения элементов массива или компонент векторов и тензоров. Прописные греческие и латинские индексы используются для обозначения величин, определенных в узловых точках дискретной модели, причем греческие индексы относятся к глобальным узлам связанной модели, а латинские — к локальным узлам отдельных непересекающихся конечных элементов.

7.3. ДИСКРЕТНАЯ МОДЕЛЬ ОБЛАСТИ $\mathscr{R}$

Ясно, что построение конечноэлементной модели области $\mathscr{R}$ пространства $\mathscr{E}^k$ не зависит от полей $\mathbf{F}(\mathbf{X})$, для которых $\mathscr{R}$ может быть областью определения. Дискретная модель $\mathscr{R}$ строится следующим образом.

1. В $\mathscr{R}$ фиксируется конечное число G точек, которые обозначаются через $\mathbf{X}^1, \mathbf{X}^2, \ldots, \mathbf{X}^G$ или, в сокращенной записи, $\mathbf{X}^\Delta$ $(\Delta = 1, 2, \ldots, G)$. Эти точки называются *глобальными узловыми точками* или *глобальными узлами*. Конечное множество $\{\mathbf{X}^1, \mathbf{X}^2, \ldots, \mathbf{X}^G\}$ этих точек обозначается через $\overline{\mathscr{R}}_\mathbf{X}$.
2. Область $\mathscr{R}$ приближенно представляется другой областью $\overline{\mathscr{R}}$, которая содержит все узловые точки $\mathscr{R}$. Разность $\mathscr{R} \setminus \overline{\mathscr{R}}$ будем обозначать через $\mathscr{R}_\varepsilon$ и называть *областью отклонения*. Если множество $\mathscr{R}_\varepsilon$ пусто, то $\overline{\mathscr{R}}$ и $\mathscr{R}$ равны. Очевидно, что $\overline{\mathscr{R}}_\mathbf{X} \subset \overline{\mathscr{R}}$.
3. Теперь рассмотрим конечное число E не связанных между собой подмножеств r_e пространства $\mathscr{E}^k$, называемых конечными элементами. Хотя в конечном счете мы хотим «связать» эти элементы вместе, чтобы получить всю область $\overline{\mathscr{R}}$, мы пока считаем все конечные элементы замкнутыми и непересекающимися, не допуская даже частичного совпадения их границ. Границу любого элемента будем считать отличной от границ всех других элементов, хотя в связанной модели граничные точки двух конечных элементов могут совпадать. Эта дизъюнктность составляет *фундаментальное свойство конечных элементов*. Математически оно выражается следующим образом:

$$r_i \cap r_j = \varnothing, \qquad i \neq j; \qquad i, j = 1, 2, \ldots, E, \tag{7.1}$$

где, напомним, $\varnothing$ — пустое множество. Объединение

$$\mathscr{R}^* = \bigcup_{e=1}^{E} r_e \tag{7.2}$$

будем называть *несвязанной* или *несобранной областью*.

4. Рассмотрим типичный конечный элемент r_e, который пока считается полностью изолированным от совокупности других элементов. В тех случаях, когда это удобно, для *локальной* идентификации точек в r_e будет использоваться символ $\mathrm{x}^{(e)}$ [1]). Иногда под этим символом удобно понимать локальный радиус-вектор точки в r_e относительно некоторой фиксированной начальной точки $\mathrm{o}_{\varepsilon e}$. Можно также подразумевать под $\mathrm{x}^{(e)}$ упорядоченный набор k действительных чисел $\mathrm{x}^{(e)} = (x^{1(e)}, x^{2(e)}, \ldots, x^{k(e)})$, называемых *локальными координатами* точки элемента e. Однако на данном этапе удобно говорить о локальных точках, не прибегая к началам или системам координат.

   В r_e фиксируем конечное число N_e точек; обозначим их соответственно через $\mathrm{x}^1_{(e)}, \mathrm{x}^2_{(e)}, \ldots, \mathrm{x}^{N_e}_{(e)}$, или, более кратко, $\mathrm{x}^N_{(e)}$ $(N = 1, 2, \ldots, N_e)$. Эти точки называются *локальными узловыми точками* или просто *локальными узлами*. Конечное множество $\{\mathrm{x}^1_{(e)}, \mathrm{x}^2_{(e)}, \ldots, \mathrm{x}^{N_e}_{(e)}\}$ локальных узлов элемента r_e обозначается через $\mathscr{R}^*_{\mathrm{x}(e)}$.

5. До сих пор подобласти r_e никак не были связаны с $\overline{\mathscr{R}}$. Связанность дискретной модели для $\mathscr{R}$ достигается с помощью отображения $\mathscr{R}^*$ на $\overline{\mathscr{R}}$ или каждого элемента $\mathscr{R}^*_{\mathrm{x}(e)}$ на $\overline{\mathscr{R}}_{\mathrm{X}}$. По очевидным соображениям это отображение называется *связыванием элементов* (оно преобразует несвязанную область $\mathscr{R}^*$ в связанную область $\overline{\mathscr{R}}$). Если предположить на время, что существует надлежащее соответствие между узлами подобласти r_e и узлами в $\overline{\mathscr{R}}$, то связанность модели достигается с помощью отображения $\overset{(e)}{\Lambda}: \mathscr{R}^*_{\mathrm{x}(e)} \to \overline{\mathscr{R}}_{\mathrm{X}}$ (e фиксировано) следующим образом:

$$\mathrm{X}^{\Delta} = \overset{(e)}{\Lambda}{}^{\Delta}_{N} \mathrm{x}^{N}_{(e)}, \tag{7.3}$$

где $\Delta = 1, 2, \ldots, G$, по N производится суммирование от 1 до N_e, а $\overset{(e)}{\Lambda}{}^{\Delta}_{N}$ определяются выражениями, аналогичными (6.6), а именно,

$$\overset{(e)}{\Lambda}{}^{\Delta}_{N} = \begin{cases} 1, & \text{если для связанной модели узел } \Delta \text{ в } \overline{\mathscr{R}} \\ & \text{совпадает с узлом } N \text{ в } r_e, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases} \tag{7.4}$$

В (7.3) под X^{Δ} и $\mathrm{x}^{N}_{(e)}$ понимаются точки пространства $\mathscr{E}^k$, а не радиус-векторы (иначе вместо X^{Δ} надо было бы просто

[1]) Буква e является идентификационной меткой элемента, и не имеет никакого значения, где она расположена. Наряду с символом $\mathrm{x}^{(e)}$ для локального обозначения точек в r_e мы будем использовать и символ $\mathrm{x}_{(e)}$.

подставить вектор $\mathbf{X}^\Delta - \mathbf{B}^{(e)}$, где $\mathbf{B}^{(e)}$ — радиус-вектор начала $\mathbf{x}^N_{(e)}$ относительно начала $\mathbf{X}^\Delta$). Вопрос «переноса» начальных точек $o_{\varepsilon e}$ в 0_ε и т. д., таким образом, несуществен, поскольку отображение просто указывает, какие точки в $\mathscr{R}^*_{\mathbf{x}(e)}$ инцидентны заданной точке в $\bar{\mathscr{R}}_{\mathbf{X}}$. Вследствие этого говорят, что функция $\overset{(e)}{\Lambda}{}^\Delta_N$ определяет *отношение инцидентности* между $\bar{\mathscr{R}}_{\mathbf{X}}$ и $\mathscr{R}^*_{\mathbf{x}(e)}$ (или $\bar{\mathscr{R}}$ и $\mathscr{R}^*$). Поскольку задание узловых точек в $\bar{\mathscr{R}}$ и $\mathscr{R}^*_{\mathbf{x}(e)}$ произвольно, требуется, чтобы соответствие, обеспечивающее связанность, существовало для *всех* точек в $\bar{\mathscr{R}}$ и $\mathscr{R}^*$, так что (7.3) дает также отображение $\bar{\mathscr{R}}$ в $\mathscr{R}^*$. Таким образом, совокупность

$$\Lambda = \{\overset{(1)}{\Lambda}, \overset{(2)}{\Lambda}, \ldots, \overset{(E)}{\Lambda}\}$$

отображений элементов отображает всю совокупность $\bar{\mathscr{R}}$ в $\mathscr{R}^*$.

6. Процедура, обратная связыванию элементов в модель, называется *разбиением*. Процесс разбиения $\bar{\mathscr{R}}$ на конечные элементы предполагает просто перенумерацию глобальных узловых точек, связанных с элементом, таким образом, чтобы новая нумерация соответствовала схеме, принятой для локальных узлов. Это достигается с помощью отображения $\overset{(e)}{\Omega}$ множества $\bar{\mathscr{R}}_{\mathbf{X}}$ в $\mathscr{R}^*_{\mathbf{x}(e)}$, задаваемого формулой

$$\mathbf{x}^N_{(e)} = \overset{(e)}{\Omega}{}^N_\Delta X^\Delta, \tag{7.5}$$

где по повторяющемуся индексу Δ производится суммирование от 1 до G, а $\overset{(e)}{\Omega}{}^N_\Delta$ определяются формулами

$$\overset{(e)}{\Omega}{}^N_\Delta = \begin{cases} 1, & \text{если узел } N \text{ элемента } r_e \text{ совпадает} \\ & \text{с узлом } \Delta \text{ связанной модели } \bar{\mathscr{R}}, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases} \tag{7.6}$$

Массив $\overset{(e)}{\Omega}{}^N_\Delta$ — это просто результат транспозиции массива $\overset{(e)}{\Lambda}{}^\Delta_N$, определенного формулами (7.4).

Очевидно, что для фиксированного элемента r_e композиция $\overset{(e)}{\Lambda}\overset{(e)}{\Omega}$ есть тождественное отображение I_e множества локальных узлов $\mathscr{R}^*_{\mathbf{x}(e)}$ в себя:

$$\overset{(e)}{\Lambda}{}^\Delta_N \overset{(e)}{\Omega}{}^M_\Delta = \delta^M_N. \tag{7.7}$$

Аналогично композиция $\overset{(e)}{\Omega}\overset{(e)}{\Lambda}$ есть отображение $I_G^{(e)}$ совокупности глобальных узлов, соответствующих элементу e в себя:

$$\overset{(e)}{\Omega}{}_{\Delta}^{N}\overset{(e)}{\Lambda}{}_{N}^{\Gamma}=\begin{cases}\delta_{\Delta}^{\Gamma}, & \text{если } X^{\Gamma},\ X^{\Delta}\in r_e,\\ 0, & \text{если } X^{\Gamma},\ X^{\Delta}\notin r_e.\end{cases} \tag{7.8}$$

Совместимость. Ясно, что границы элементов и расположение узлов в них должны быть такими, чтобы, будучи объединенными вместе, наши непересекающиеся элементы могли образовать дискретную модель области $\mathscr{R}$. Существование функции $\overset{(e)}{\Lambda}{}_{N}^{\Delta}$, которая связывает элементы в единое целое, зависит от расположения узлов в конечных злементах и на их границах и от соответствия между этими узлами и глобальными узлами $\mathbf{X}^{\Delta}$ в области $\overline{\mathscr{R}}$.

Рассмотрим два конечных злемента r_e и r_f с границами ∂r_e и ∂r_f. Пусть эти конечные элементы примыкают друг к другу в связанной модели $\overline{\mathscr{R}}$. Тогда части $\partial r_e'$ и $\partial r_f'$ этих границ должны отображаться в некоторую общую границу в $\overline{\mathscr{R}}$, которую будем называть *межэлементной границей элементов* r_e и r_f. Должны выполняться следующие условия:

1. Каждой точке $\mathbf{x}^{(e)}\in\partial r_e'$ соответствует точка $\mathbf{x}^{(f)}\in\partial r_f'$.
2. Если связывание элементов переводит $\mathbf{x}^{(e)}\in\partial r_e'$ в точку $\mathbf{X}\in\overline{\mathscr{R}}$, то оно переводит точку $\mathbf{x}^{(f)}\in\partial r_f'$, которая по условию 1 отвечает $\mathbf{x}^{(e)}$, в *ту же самую* точку $\mathbf{X}$.
3. Каждой локальной узловой точке $\overset{N}{\mathbf{x}}_{(e)}\in\partial r_e'$ соответствует некоторая локальная узловая точка $\overset{M}{\mathbf{x}}_{(f)}\in\partial r_f'$.
4. Каждому локальному узлу $\overset{N}{\mathbf{x}}_{(e)}\in r_e$ соответствует один-единственный узел $\mathbf{X}^{\Delta}\in\overline{\mathscr{R}}$, и связывание элементов переводит $\overset{N}{\mathbf{x}}_{(e)}$ в соответствующий ему узел $\mathbf{X}^{\Delta}$.

Перечисленные выше требования будем называть *условиями совместимости* для дискретной модели. Они являются необходимыми и достаточными условиями существования функции $\overset{(e)}{\Lambda}{}_{N}^{\Delta}$, и ими обеспечивается возможность подогнать элементы друг к другу так, чтобы они образовали дискретную модель области $\mathscr{R}$. Очевидно, множества точек, составляющих $\partial r_e'$ и $\partial r_f'$ в $\mathscr{R}^*$, в соответствии с условием 2 отображаются на межэлементную границу в $\overline{\mathscr{R}}$. Условия 1—3 обеспечивают связывание элементов в их узлах при отображении и отсутствие разрывов и пересечений границ конечных элементов в связанной модели. Условие 4 учитывает возможность введения внутренних узлов (локальных узлов r_e, которые не попадают на границу элемента) и гарантирует сущест-

вование соответствующих узлов в $\overline{\mathscr{R}}$. Из условий 1—3 немедленно вытекает следующее интересное следствие:

5. Если отображение (7.3) переводит локальный узел $\mathbf{x}_{(e)}^N \in \partial r_e^*$ в узловую точку $\mathbf{X}^\Delta \in \overline{\mathscr{R}}$, то оно переводит локальный узел $\mathbf{x}_{(f)}^M \in \partial r_f'$, соответствующий $\mathbf{x}_{(e)}^N$, в ту же самую узловую точку $\mathbf{X}^\Delta$.

Отметим, что узловая точка $\mathbf{X}^\Delta$, о которой говорится в условии 5, находится на межэлементной границе в $\overline{\mathscr{R}}$.

Кратность граничных точек. Пусть $\mathbf{X}$ — точка, лежащая на межэлементной границе. Говорят, что эта точка имеет *кратность* m, если в ней встречаются m конечных элементов. Если же точка $\mathbf{X}$ не лежит на межэлементной границе, то ее кратность $m = 0$.

7.4. ДИСКРЕТНАЯ МОДЕЛЬ ФУНКЦИИ F

Описав способ построения конечноэлементной модели подмножества $\mathscr{R}$ пространства $\mathscr{E}^k$, вернемся к задаче построения дискретной модели непрерывной функции $\mathbf{F}$: $\mathscr{R} \to \mathscr{T}$. Мы начинаем с построения изложенным выше методом конечноэлементной модели $\overline{\mathscr{R}}$ области $\mathscr{R}$ определения функции $\mathbf{F}$. Эта модель $\overline{\mathscr{R}}$ будет служить областью определения другой функции $\overline{\mathbf{F}}$, которая должна аппроксимировать $\mathbf{F}$. Далее поступаем так.

1. Значение $\mathbf{F}(\mathbf{X})$ нашей функции в глобальном узле $\mathbf{X}^\Delta \in \mathscr{R}$ обозначаем через $\mathbf{F}^\Delta$:
$$\mathbf{F}^\Delta = \mathbf{F}(\mathbf{X}^\Delta). \tag{7.9}$$
Величины $\mathbf{F}^\Delta$ называются *глобальными значениями* функции $\mathbf{F}(\mathbf{X})$; множество глобальных значений $\{\mathbf{F}^1, \mathbf{F}^2, \ldots, \mathbf{F}^G\}$ обозначается через $\mathscr{G}$ и называется *глобальным множеством*, соответствующим функции $\mathbf{F}(\mathbf{X})$.
2. Теперь рассмотрим совокупность $\mathscr{R}^*$ несвязанных конечных элементов r_e. Каждый конечный элемент r_e считается областью определения некоторой локальной функции, обозначаемой через $\mathbf{f}^{(e)}$, того же типа, что и $\mathbf{F}$. Локальная функция $\mathbf{f}^{(e)}$ и значения функции $\mathbf{f}^{(e)}(\mathbf{x})$ определены *только для* $\mathbf{x} \in r_e$. Хотя в конечном счете после связывания между собой конечных элементов, дающего $\overline{\mathscr{R}}$, эти локализованные функции будут соединены для получения аппроксимации заданной функции $\mathbf{F}$, пока они рассматриваются порознь, совершенно независимо от $\mathbf{F}(\mathbf{X})$ и друг от друга. Функция $\mathbf{f}^{(e)}(\mathbf{x})$ называется ограничением $\mathbf{F}(\mathbf{X})$ на r_e.

3. Значение $\mathbf{f}^{(e)}(\mathbf{x})$ локальной функции $\mathbf{f}^{(e)}$ в локальном узле $\mathbf{x}_{(e)}^N$ элемента e обозначается через $\mathbf{f}_{(e)}^N$:

$$\mathbf{f}_{(e)}^N = \mathbf{f}^{(e)}(\mathbf{x}_{(e)}^N). \tag{7.10}$$

Величины $\mathbf{f}_{(e)}^N$ называются *локальными значениями* функций, соответствующих элементу r_e. Упорядоченные множества локальных значений $\{\mathbf{f}_{(1)}^1, \ldots, \mathbf{f}_{(1)}^{N_1}\}$,

$$\{\mathbf{f}_{(2)}^1, \ldots, \mathbf{f}_{(2)}^{N_2}\}, \ldots, \{\mathbf{f}_{(E)}^1, \ldots, \mathbf{f}_{(E)}^{N_E}\}$$

обозначаются через $\mathscr{L}_e$ и называются *локальными множествами*. Их объединение обозначается через $\mathscr{L}$:

$$\mathscr{L} = \bigcup_{e=1}^{E} \mathscr{L}_e.$$

4. Локальные функции аппроксимируются на соответствующих им конечных элементах непрерывными функциями вида

$$\mathbf{f}^{(e)}(\mathbf{x}) \approx \bar{\mathbf{f}}^{(e)}(\mathbf{x}) = \psi_{(e)}(\mathbf{x}, \mathbf{f}_{(e)}^N), \tag{7.11}$$

где функции $\psi_{(e)}(\mathbf{x}, \mathbf{f}_{(e)}^N)$ определены так, чтобы они обладали следующим свойством:

$$\psi_{(e)}(\mathbf{x}_{(e)}^M, \mathbf{f}_{(e)}^N) = \mathbf{f}_{(e)}^M \text{ в узле } \mathbf{x}^M \in r_e. \tag{7.12}$$

Поэтому в узловых точках элемента значения функций $\psi_{(e)}(\ )$ совпадают со значениями локальных функций [1].

Как правило, удобно выбирать аппроксимирующие функции $\psi_{(e)}(\mathbf{x}, \mathbf{f}_{(e)}^N)$, линейно зависящие от узловых значений $\mathbf{f}_{(e)}^N$:

$$\psi_{(e)}(\mathbf{x}, \mathbf{f}_{(e)}^N) = \mathbf{f}_{(e)}^N \psi_N^{(e)}(\mathbf{x}), \tag{7.13}$$

где по повторяющемуся индексу N производится суммирование от 1 до N_e, а $\psi_N^{(e)}(\mathbf{x})$ обозначает N_e скалярнозначных функций, соответствующих конечному элементу e. Вследствие (7.12)

$$\psi_N^{(e)}(\mathbf{x}^M) = \delta_N^M, \qquad \mathbf{x}^M \equiv \mathbf{x}_{(e)}^M \in r_e, \tag{7.14}$$

где δ_M^N $(M, N = 1, 2, \ldots, N_e)$ — символ Кронекера [2]. Функции $\psi_N^{(e)}(\ )$ сходны с интерполяционными полиномами

[1]) Отметим, что если локализованные функции $\mathbf{f}^{(e)}$ дифференцируемы класса C^r $(r \geqslant 1)$, то возможно построить функцию $\psi_{(e)}$, у которой не только значения в узлах совпадают со значениями $\mathbf{f}_{(e)}^N$, но и величины первых r частных производных совпадают с величинами соответствующих производных функции $\mathbf{f}^{(e)}(\mathbf{x})$. Такие аппроксимации высшего порядка будут рассмотрены в § 8.

[2]) Другие свойства локальных интерполяционных функций рассматриваются в § 9 и 10.

Лагранжа. Однако в рассматриваемом случае они не обязательно являются полиномами.

С учетом (7.13) равенство (7.11) записывается в виде

$$\bar{\mathbf{f}}^{(e)}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}^{N}_{(e)}\psi^{(e)}_{N}(\mathbf{x}). \tag{7.15}$$

5. Конечноэлементная модель $\mathbf{F}(\mathbf{X})$ получается в результате связывания всех наших непересекающихся элементов с помощью преобразования (7.3) и последовательных отображений $\overset{(e)}{\Lambda}: \mathscr{L}_e \to \mathscr{G}$ локальных множеств $\mathscr{L}_e$ в глобальное множество $\mathscr{G}$, определяемых (для фиксированного e) формулой

$$\mathbf{F}^{\Delta} = \overset{(e)}{\Lambda}{}^{\Delta}_{N}\mathbf{f}^{N}_{(e)}, \tag{7.16}$$

где $\overset{(e)}{\Lambda}{}^{\Delta}_{N}$ задается формулой (7.4). Иначе говоря, совокупность отображений

$$\Lambda = \sum_{e=1}^{E} \overset{(e)}{\Lambda} \quad \text{отображает} \quad \mathscr{L} = \bigcup_{e=1}^{E} \mathscr{L}_e \text{ в } \mathscr{G}.$$

6. С другой стороны, массив $\overset{(e)}{\Omega}{}^{N}_{\Delta}$, определяемый формулой (7.6), может использоваться для разбиения $\mathscr{G}$ на $\mathscr{L}_e$:

$$\mathbf{f}^{N}_{e} = \overset{(e)}{\Omega}{}^{N}_{\Delta}\mathbf{F}^{\Delta}. \tag{7.17}$$

7. Окончательная дискретная модель функции такова:

$$\mathbf{F}(\mathbf{X}) \approx \bar{\mathbf{F}}(\mathbf{x}) = \sum_{e=1}^{E} \bar{\mathbf{f}}^{(e)}(\mathbf{x}), \tag{7.18}$$

или, с учетом (7.16) и (7.17) [1]),

$$\bar{\mathbf{F}}(\mathbf{x}) = \sum_{e=1}^{E} \psi^{(e)}_{N}(\mathbf{x})\overset{(e)}{\Omega}{}^{N}_{\Delta}\mathbf{F}^{\Delta} = \Phi_{\Delta}(\mathbf{x})\,\mathbf{F}^{\Delta}. \tag{7.19}$$

---

[1]) Строго говоря, последующее соотношение справедливо в $\overline{\mathscr{R}}$ всюду, за исключением множества меры нуль. Если, например, $\overline{\mathbf{X}}$ — точка межэлементной границы в $\overline{\mathscr{R}}$ кратности m и $\overline{\mathbf{T}}$ — нужное значение дискретной модели функции $\mathbf{F}(\mathbf{X})$ в $\overline{\mathbf{X}}$, то (7.19) дает $m\overline{\mathbf{T}}$ вместо $\overline{\mathbf{T}}$. Для того чтобы избежать этого осложнения, можно просто переопределить $\Phi_{\Delta}(\mathbf{x})$ с помощью функции $r(\mathbf{x})$, которая равна единице, когда кратность точки $\mathbf{X}$ есть нуль, и равна кратности m этой точки, когда $m \neq 0$ [например, вместо $\Phi_{\Delta}(\mathbf{x})$ использовать $\Phi_{\Delta}(\mathbf{x})/r(\mathbf{x})$]. Впредь соотношения (7.18) — (7.20) будут применяться с соглашением, что на межэлементных границах вводится множитель $1/r(\mathbf{x})$. В пространствах с мерой это замечание несущественно, поскольку любые две функции, равные всюду, за исключением множества меры нуль, считаются равными, ибо интегралы Лебега от двух функций, равных всюду, за исключением множества меры нуль, равны между собой. См., например, Колмогоров и Фомин [1972].

Здесь $\Phi_\Delta(\mathbf{x})$ — *глобальные* аппроксимационные функции, определяемые равенством

$$\Phi_\Delta(\mathbf{x}) = \sum_{e=1}^{E} \overset{(e)}{\Omega}{}_\Delta^N \psi_N^{(e)}(\mathbf{x}). \tag{7.20}$$

Очевидно, что для $x \in r_e$

$$\overline{\mathbf{F}}(\mathbf{x}) = 0 + 0 + \ldots + \overset{(e)}{\Omega}{}_\Delta^N \psi_N^{(e)}(\mathbf{x})\,\mathbf{F}^\Delta + 0 + \ldots + 0 = \mathbf{f}_{(e)}^N \psi_N^{(e)}(\mathbf{x}) = \overline{\mathbf{f}}^{(e)}(\mathbf{x}).$$

Для узловой точки $\mathbf{x}_{(e)}^N \in r_e$, совпадающей с $\mathbf{X}^\Delta$ в связанной модели,

$$\overline{\mathbf{F}}(\mathbf{x}_{(e)}^N) = \overline{\mathbf{f}}^{(e)}(\mathbf{x}_{(e)}^N) \equiv \mathbf{f}_{(e)}^N = \overset{(e)}{\Omega}{}_\Delta^N \mathbf{F}^\Delta = \mathbf{F}^\Delta.$$

7.5. ПРИМЕРЫ

Широкие возможности использования метода конечных элементов обусловлены тем, что можно подробно исследовать аппроксимацию заданной функции $\mathbf{F}(\mathbf{X})$ в пределах некоторой малой подобласти области ее определения независимо от поведения функции в других подобластях. Это, например, означает, что при использовании концепции конечного элемента для исследования поведения твердого тела можно выделить типичный конечный элемент тела, аппроксимировать различные поля локально на элементе и полностью описать поведение элемента с помощью этих аппроксимаций независимо от его положения в модели, характера связей с примыкающими к нему элементами и поведения других элементов модели. После получения локальных аппроксимационных полей на типичных конечных элементах полная модель поля получается с помощью отображений (7.17) и (7.19).

Для уяснения основных положений метода рассмотрим несколько простых примеров.

Пример 7.1. Скалярная функция на двумерной области. Рассмотрим сначала область $\mathcal{R}$ двумерного пространства $\mathcal{E}^2$ (рис. 7.1, *a*), являющуюся областью определения скалярной функции $\Phi(X)$ рассмотренного в п. 6.2 типа. Точка $X \in \mathcal{R}$ задается координатами X^1 и X^2, так что можно записать

$$\Phi = \Phi(X^1, X^2).$$

Для простоты рассмотрим довольно грубую модель $\overline{\mathcal{R}}$ области $\mathcal{R}$, состоящую только из семи узлов и двух конечных элементов (рис. 7.1, *b*). Так что $G = 7$ и $E = 2$. Заметим также, что границы области $\overline{\mathcal{R}}$ выбраны так, чтобы она достаточно хорошо аппроксимировала $\mathcal{R}$; область отклонения $\mathcal{R}_\varepsilon$ на рисунке заштрихована. Хотя всегда желательно, чтобы $\overline{\mathcal{R}}$ возможно лучше аппроксимировала область $\mathcal{R}$ или даже совпадала с ней, часто оказывается невозможным или нецелесообразным выбирать в качестве границ $\overline{\mathcal{R}}$ границы $\mathcal{R}$. Это частично обусловлено тем, что предпочтительнее использовать конечные элементы простейших форм, для того чтобы легко можно было

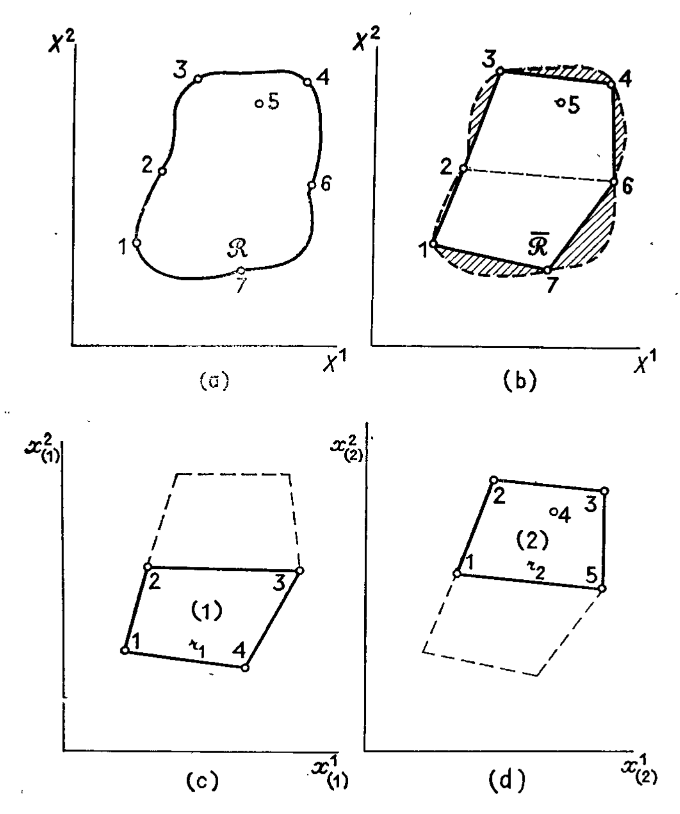


Рис. 7.1. Модель области в $\mathscr{E}^2$, состоящая из двух конечных элементов.

строить интерполяционные функции $\psi_N^{(e)}(x)$. Кроме того, в последующем от функций $\psi_N^{(e)}(x)$ придется потребовать удовлетворения некоторым условиям непрерывности в связанной модели, которые в свою очередь могут наложить жесткие ограничения на форму границ конечных элементов. Таким образом, в общем случае гладкая граница $\mathscr{R}$ аппроксимируется кусочно гладкой границей $\overline{\mathscr{R}}$.

Возвращаясь к глобальному описанию дискретной модели для Φ (X), пометим узлы в $\overline{\mathscr{R}}$ цифрами от 1 до 7. Тогда если Φ^Δ ($\Delta = 1, 2, \ldots, 7$) — значения нашей функции в узлах, то глобальное множество $\mathscr{G}$ будет таково:

$$\{\Phi^\Delta\} = \{\Phi^1, \Phi^2, \Phi^3, \Phi^4, \Phi^5, \Phi^6, \Phi^7\}. \tag{7.21}$$

Пометим два конечных элемента, показанных на рис. 7.1, *c* и *d*, символами (1) и (2) и введем в них системы локальных координат $\mathbf{x}_{(1)} = (x^1_{(1)}, x^2_{(1)})$ и $\mathbf{x}_{(2)} = (x^1_{(2)}, x^2_{(2)})$. На этом этапе элементы считаются никак не связанными друг с другом; системы локальных координат $x^1_{(1)}, x^2_{(1)}$ или $x^1_{(2)}, x^2_{(2)}$ могут не совпадать с системой глобальных координат X^1, X^2. Отметим, однако, что при исследовании задач, подобных рассматриваемой, удобно выбирать все локальные системы совпадающими с глобальной. При этом связывание

элементов сводится просто к установлению соответствия между глобальными и локальными узлами, пронумерованными различными способами.

Обозначим узлы элемента (1) цифрами 1, 2, 3 и 4 ($N_{e=1} = N_1 = 4$), а узлы элемента (2) цифрами от 1 до 5 ($N_{e=2} = N_2 = 5$). Части функции $\Phi(\mathbf{X})$, определенные на элементах (1) и (2), обозначим через $\varphi_{(1)}(\mathbf{x}_{(1)})$ и $\varphi_{(2)}(\mathbf{x}_{(2)})$ соответственно (не путать с функциями, введенными формулами (7.19) и (7.20)). Для простоты будем считать, что системы локальных координат $\mathbf{x}_{(1)}$ и $\mathbf{x}_{(2)}$ совпадают с системой глобальных координат $\mathbf{X}$, т. е. локальные функции можно обозначать просто через $\varphi_{(1)}(\mathbf{x})$ и $\varphi_{(2)}(\mathbf{x})$, а глобальную функцию — через $\Phi(\mathbf{X})$ или $\Phi(\mathbf{x})$.

Значения локальной функции $\varphi_{(1)}(\mathbf{x})$ в четырех узлах элемента (1) суть $\varphi^1_{(1)}$, $\varphi^2_{(1)}$, $\varphi^3_{(1)}$ и $\varphi^4_{(1)}$, а значения $\varphi_{(2)}(\mathbf{x})$ в пяти узлах элемента (2) — $\varphi^1_{(2)}$, $\varphi^2_{(2)}$, ..., $\varphi^5_{(2)}$. Таким образом, локальные множества $\mathscr{L}_1$ и $\mathscr{L}_2$ для элементов записываются в виде

$$\{\varphi^N_{(1)}\} = \{\varphi^1_{(1)}, \varphi^2_{(1)}, \varphi^3_{(1)}, \varphi^4_{(1)}\} \quad \text{и} \quad \{\varphi^N_{(2)}\} = \{\varphi^1_{(2)}, \varphi^2_{(2)}, \varphi^3_{(2)}, \varphi^4_{(2)}, \varphi^5_{(2)}\}. \tag{7.22}$$

В каждом конечном элементе строим аппроксимации локальных полей

$$\varphi_1(\mathbf{x}) \approx \overline{\varphi}_{(1)}(\mathbf{x}) = \varphi^1_{(1)}\psi^{(1)}_1(\mathbf{x}) + \varphi^2_{(1)}\psi^{(1)}_2(\mathbf{x}) + \varphi^3_{(1)}\psi^{(1)}_3(\mathbf{x}) + \varphi^4_{(1)}\psi^{(1)}_4(\mathbf{x}), \tag{7.23а}$$

$$\varphi_2(\mathbf{x}) \approx \overline{\varphi}_{(2)}(\mathbf{x}) = \varphi^1_{(2)}\psi^{(2)}_1(\mathbf{x}) + \varphi^2_{(2)}\psi^{(2)}_2(\mathbf{x}) + \varphi^3_{(2)}\psi^{(2)}_3(\mathbf{x}) + \varphi^4_{(2)}\psi^{(2)}_4(\mathbf{x}) + \varphi^5_{(2)}\psi^{(2)}_5(\mathbf{x}), \tag{7.23б}$$

или, более кратко,

$$\left.\begin{aligned} \varphi_{(1)}(\mathbf{x}) &\approx \varphi^N_{(1)}\psi^{(1)}_N(\mathbf{x}), \quad N = 1, 2, 3, 4, \\ \varphi_{(2)}(\mathbf{x}) &\approx \varphi^N_{(2)}\psi^{(2)}_N(\mathbf{x}), \quad N = 1, 2, 3, 4, 5, \end{aligned}\right\}. \tag{7.24}$$

где функции $\psi^{(e)}_N(\mathbf{x})$ обладают свойством (7.14).

Предположим, что точки границ $\overline{23}$ и $\overline{15}$ элементов (1) и (2) находятся во взаимно однозначном соответствии с точками отрезка $\overline{26}$ в связанной модели $\overline{\mathscr{R}}$ (показанного на рис. 7.1, *b* пунктиром) и что соответствие между всеми узловыми точками в $\mathscr{R}^*$ и $\overline{\mathscr{R}}$ отвечает условиям совместимости. Ясно, что, если, исходя из области $\overline{\mathscr{R}}$, осуществлять ее разбиение на конечные элементы, всегда можно выбрать элементы и узловые точки таким образом, чтобы условия совместимости удовлетворялись. Введем массив $\overset{(e)}{\Lambda}{}^{\Delta}_N$ по формуле (7.4) и свяжем наши элементы в единую модель $\Phi(\mathbf{X})$ отображениями $\overset{(e)}{\Lambda}: \mathscr{L}_e \to \mathscr{G}$:

$$\Phi^{\Delta} = \overset{(e)}{\Lambda}{}^{\Delta}_N \varphi^N_{(e)}, \tag{7.25}$$

где $e = 1, 2$; $N = 1, 2, 3, 4$ при $e = 1$ и $N = 1, 2, 3, 4, 5$ при $e = 2$; $\Delta = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$. Имеем:

$$\begin{aligned} e = 1: \quad & \Phi^1 = \overset{(1)}{\Lambda}{}^1_1\varphi^1_{(1)} + \ldots + \overset{(1)}{\Lambda}{}^1_4\varphi^4_{(1)} = \varphi^1_{(1)}, \\ & \Phi^2 = \overset{(1)}{\Lambda}{}^2_1\varphi^1_{(1)} + \ldots + \overset{(1)}{\Lambda}{}^2_4\varphi^4_{(1)} = \varphi^2_{(1)}, \\ & \Phi^6 = \overset{(1)}{\Lambda}{}^6_1\varphi^1_{(1)} + \ldots + \overset{(1)}{\Lambda}{}^6_4\varphi^4_{(1)} = \varphi^3_{(1)}, \\ & \Phi^7 = \overset{(1)}{\Lambda}{}^7_1\varphi^1_{(1)} + \ldots + \overset{(1)}{\Lambda}{}^7_4\varphi^4_{(1)} = \varphi^4_{(1)}, \end{aligned} \tag{7.26а}$$

$$\begin{aligned} e = 2: \quad & \Phi^2 = \overset{(2)}{\Lambda}{}^2_1\varphi^1_{(2)} + \ldots + \overset{(2)}{\Lambda}{}^2_5\varphi^5_{(2)} = \varphi^1_{(2)}, \\ & \Phi^3 = \overset{(2)}{\Lambda}{}^3_1\varphi^1_{(2)} + \ldots + \overset{(2)}{\Lambda}{}^3_5\varphi^5_{(2)} = \varphi^2_{(2)}, \end{aligned}$$

$$\Phi^4 = \overset{(2)}{\Lambda}{}^4_1 \varphi^1_{(2)} + \ldots + \overset{(2)}{\Lambda}{}^4_5 \varphi^5_{(2)} = \varphi^3_{(2)},$$
$$\Phi^5 = \overset{(2)}{\Lambda}{}^5_1 \varphi^1_{(2)} + \ldots + \overset{(2)}{\Lambda}{}^5_5 \varphi^5_{(2)} = \varphi^4_{(2)}, \quad (7.26б)$$
$$\Phi^6 = \overset{(2)}{\Lambda}{}^6_1 \varphi^1_{(2)} + \ldots + \overset{(2)}{\Lambda}{}^6_5 \varphi^5_{(2)} = \varphi^5_{(2)}.$$

Точно так же

$$\varphi^N_{(e)} = \overset{(e)}{\Omega}{}^N_\Delta \Phi^\Delta, \quad (7.27)$$

или 58

$$\varphi^1_{(1)} = \overset{(1)}{\Omega}{}^1_1 \Phi^1 + \overset{(1)}{\Omega}{}^1_2 \Phi^2 + \ldots + \overset{(1)}{\Omega}{}^1_7 \Phi^7 = \Phi^1,$$
$$\varphi^2_{(1)} = \overset{(1)}{\Omega}{}^2_1 \Phi^1 + \overset{(1)}{\Omega}{}^2_2 \Phi^2 + \ldots + \overset{(1)}{\Omega}{}^2_7 \Phi^7 = \Phi^2, \quad (7.28)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\varphi^5_{(2)} = \overset{(2)}{\Omega}{}^5_1 \Phi^1 + \overset{(2)}{\Omega}{}^5_2 \Phi^2 + \ldots + \overset{(2)}{\Omega}{}^5_7 \Phi^7 = \Phi^6.$$

Таким образом,

$$\Phi^1 = \varphi^1_{(1)}, \quad \Phi^2 = \varphi^2_{(1)} = \varphi^1_{(2)}, \quad \Phi^3 = \varphi^2_{(2)},$$
$$\Phi^4 = \varphi^3_{(2)}, \quad \Phi^5 = \varphi^4_{(2)}, \quad \Phi^6 = \varphi^3_{(1)} = \varphi^5_{(2)}, \quad (7.29)$$
$$\Phi^7 = \varphi^4_{(1)}.$$

Окончательно, дискретная модель функции $\Phi(\mathrm{X})$ такова:

$$\bar{\Phi}(\mathrm{x}) = \sum_{e=1}^{2} \bar{\varphi}_{(e)}(\mathrm{x}) = \bar{\varphi}_{(1)}(\mathrm{x}) + \bar{\varphi}_{(2)}(\mathrm{x}), \quad (7.30)$$

или в силу (7.23)

$$\bar{\Phi}(\mathrm{x}) = \psi^1_{(1)}\varphi^{(1)}_1(\mathrm{x}) + \psi^2_{(1)}\psi^{(1)}_2(\mathrm{x}) + \varphi^3_{(1)}\psi^{(1)}_3(\mathrm{x}) + \varphi^4_{(1)}\psi^{(1)}_4(\mathrm{x}) + \varphi^1_{(2)}\psi^{(2)}_1(\mathrm{x}) +$$
$$+ \varphi^2_{(2)}\psi^{(2)}_2(\mathrm{x}) + \varphi^3_{(2)}\psi^{(2)}_3(\mathrm{x}) + \varphi^4_{(2)}\psi^{(2)}_4(\mathrm{x}) + \varphi^5_{(2)}\psi^{(2)}_5(\mathrm{x}). \quad (7.31)$$

Используя (7.29), получаем

$$\bar{\Phi}(\mathrm{x}) = \Phi^1\psi^{(1)}_1(\mathrm{x}) + \Phi^2[\psi^{(1)}_2(\mathrm{x}) + \psi^{(2)}_1(\mathrm{x})] + \Phi^3\psi^{(2)}_2(\mathrm{x}) + \Phi^4\psi^{(2)}_3(\mathrm{x}) +$$
$$+ \Phi^5\psi^{(2)}_4(\mathrm{x}) + \Phi^6[\psi^{(1)}_3(\mathrm{x}) + \psi^{(2)}_5(\mathrm{x})] + \Phi^7\psi^{(1)}_4(\mathrm{x}), \quad (7.32)$$

чем и заканчивается построение конечноэлементной модели для $\Phi(\mathrm{X})$.

Нетрудно убедиться, что $\bar{\Phi}(\mathrm{x})$ совпадает с $\Phi(\mathrm{X})$ в семи узловых точках $\bar{\mathscr{R}}$ и что в остальных точках $\Phi(\mathrm{X})$ достаточно хорошо аппроксимируется функцией $\bar{\Phi}(\mathrm{x})$. По определению функции $\psi^{(1)}_N(\mathrm{x})$ тождественно равны нулю в элементе (2), а $\psi^{(2)}_N(\mathrm{x})$ — в элементе (1). Например, если точка x элемента (1) находится вблизи узла X^6 области $\bar{\mathscr{R}}$, то можно положить $\psi^{(2)}_N(\mathrm{x}) = 0$ и заметить, что $\psi^{(1)}_1(\mathrm{x})$, $\psi^{(1)}_2(\mathrm{x})$ и $\psi^{(1)}_4(\mathrm{x}) \to 0$, а $\psi^{(1)}_3(\mathrm{x}) \to 1$ при $\mathrm{x} \to \mathrm{X}^6$. Если же точка x принадлежит элементу (2), то $\psi^{(1)}_N(\mathrm{x}) = 0$ и $\psi^{(2)}_1(\mathrm{x})$, $\psi^{(2)}_2(\mathrm{x})$, $\psi^{(2)}_3(\mathrm{x})$ и $\psi^{(2)}_4(\mathrm{x}) \to 0$, а $\psi^{(2)}_5(\mathrm{x}) \to 1$ при $\mathrm{x} \to \mathrm{X}^6$.

Узловая точка X^6 имеет кратность 2, так как она лежит на границе двух лементов. Следовательно [1]), ввиду (7.32)

$$\bar{\Phi}(\mathrm{X}^6) = 0 + \Phi^6[\psi^{(1)}_3(\mathrm{x}^3_{(1)}) + \psi^{(2)}_5(\mathrm{x}^5_{(2)})]/m(\mathrm{X}^6) + 0 = \Phi^6(1+1)/2 = \Phi^6.$$

Подобные же соотношения справедливы и для других граничных точек.

---

1) См. примечание на стр. 50

Отсюда следует, что наша аппроксимация $\overline{\Phi}$ (x) непрерывна в узловых точках 2 и 6 межэлементной границы $\overline{26}$. В дальнейшем мы будем требовать, чтобы форма элементов и свойства функций $\psi_N^{(e)}$ (x) обеспечивали непрерывность $\overline{\Phi}$ (x) во всех точках межэлементных границ.

Пример 7.2. Преобразования локальных координат. Как видно из предыдущего примера, введение системы локальных координат часто является лишь формальностью, призванной подчеркнуть тот факт, что при построении локальных аппроксимаций $\overline{f}_{(e)}$ (x) отдельные конечные элементы рассматриваются независимо от других. Часто модели можно строить, используя одни и те же координаты и в глобальных и во всех локальных системах, и вся разница между ними — формальная разница в обозначении локальных и глобальных узловых точек. Однако в некоторых случаях использование систем локальных координат, отличных от глобальных, имеет существенное значение. Как правило, эти случаи характеризуются тем, что окончательная конечноэлементная модель представляет собой ансамбль конечных элементов некоторой размерности, вложенных в пространство более высокой размерности, скажем локальные поля $\overline{f}_{(e)}$ (x) определены в пространстве размерности n, а окончательная модель — в пространстве размерности $k > n$. Одним из примеров такого типа является трехмерная ферма, состоящая из брусьев, локальное поведение которых может быть описано одномерными функциями. Локальные системы используются также в тех случаях, когда ориентация или расположение элемента в связанной модели либо его форма таковы, что введение локальных систем облегчает построение функций $\psi_N^{(e)}$ (x).

Рассмотрим простой пример области $\mathscr{R}$, состоящей из нескольких плоских фигур, которые, будучи связанными вместе, образуют кусочно-гладкую поверхность в трехмерном пространстве. Предполагается, что каждая плоская фигура имеет относительно простую форму многоугольника (например, треугольника, прямоугольника, шестиугольника). Удобно каждую такую плоскую фигуру считать конечным элементом, принять $\overline{\mathscr{R}} = \mathscr{R}$ и выбрать в качестве узловых точек элементов вершины многоугольников. Во многих приложениях с помощью подходящего набора таких плоских конечных элементов может представляться какая-либо гладкая поверхность, но сейчас это для нас несущественно.

Для описания геометрии модели введем систему глобальных координат X^i $(i = 1, 2, 3)$, для простоты прямоугольных декартовых. Кроме того, в каждом конечном элементе введем свою систему локальных координат $x_{(e)}^i$ $(i = 1, 2, 3)$, тоже прямоугольную декартову, у которой оси $x_{(e)}^1$ и $x_{(e)}^2$ лежат в плоскости элемента e, а ось $x_{(e)}^3$ перпендикулярна этой плоскости. Эта конечноэлементная модель изображена на рис. 7.2.

Мы решаем задачу аппроксимации кусочно-непрерывного поля Φ (x), которое локально для каждого конечного элемента является двумерным. Другими словами, если $\varphi_{(e)}$ (x) — локальное поле, соответствующее элементу r_e, то $\varphi_{(e)}$ (x) — функция только локальных координат $x_{(e)}^1$, $x_{(e)}^2$ в плоскости элемента e:

$$\varphi_{(e)} = \varphi_{(e)} (x_{(e)}^1, x_{(e)}^2), \qquad e = 1, 2, \ldots, E. \tag{7.33}$$

Поступая обычным образом, обозначим через $\varphi_{(e)}^N$ значения локальных полей в локальных узлах каждого элемента и аппроксимируем локальные поля функциями вида

$$\overline{\varphi}_{(e)} = \psi_N^{(e)} (x_{(e)}^1, x_{(e)}^2)\, \varphi_{(e)}^N, \qquad N = 1, 2, \ldots, N_e. \tag{7.34}$$

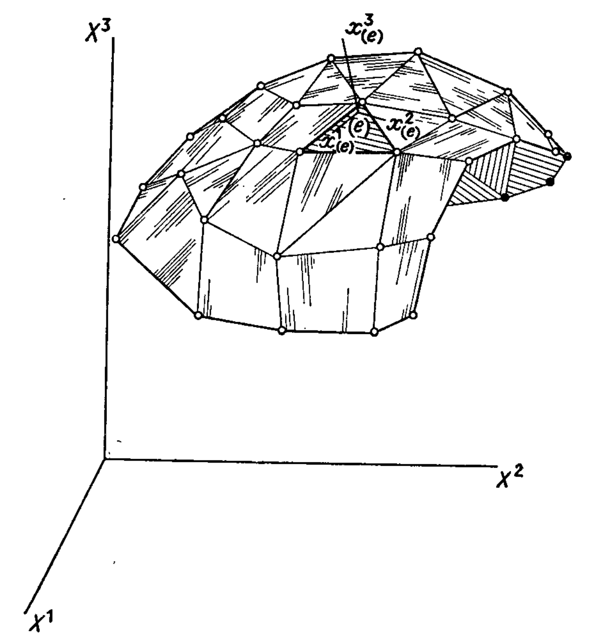


Рис. 7.2. Совокупность плоских двумерных элементов, вложенных в трехмерное пространство.

Тогда окончательная модель запишется так:

$$\overline{\Phi}\,(\mathbf{x})=\sum_e \overline{\varphi}_{(e)}\,(\mathbf{x})=\sum_e \overset{(e)}{\Omega}{}^N_\Delta \Phi^\Delta \psi_N^{(e)}\,(x^1_{(e)},\ x^2_{(e)}). \qquad (7.35)$$

В соответствии с (7.35) для вычисления приближенного значения поля в какой-либо точке, не являющейся узлом, необходимо указать элемент, которому принадлежит эта точка и ее локальные координаты в системе $x^i_{(e)}$. Глобальные координаты X^i служат для идентификации положения элементов и узлов в модели и используются для ее связывания, а в описании аппроксимирующего поля $\overline{\Phi}\,(\mathbf{x})$ (формула (7.35)) не участвуют. Однако в некоторых случаях удобно рассматривать все в одной общей системе координат, за которую естественнее всего выбрать систему глобальных координат X^i.

Для того чтобы осуществить связывание модели и дать описание аппроксимирующего поля в системе глобальных координат, введем другие системы локальных координат $\hat{x}^i_{(e)}$ $(i=1,\ 2,\ 3)$, совпадающие с X^i. Это означает, что в каждом элементе оси $\hat{x}^i_{(e)}$ параллельны осям X^i, а начала всех систем $\hat{x}^i_{(e)}$ совпадают с началом системы X^i. Локальные координаты $\hat{x}^i_{(e)}$ и $x^i_{(e)}$ связаны между собой преобразованиями

$$\begin{aligned}\hat{x}^i_{(e)}&=\overset{(e)}{\alpha}{}^i_j x^j_{(e)}+B^i_{(e)},\\ x^i_{(e)}&=\overset{(e)}{\alpha}{}^i_j\,(\hat{x}^j_{(e)}-B^j_{(e)}),\end{aligned} \qquad (7.36)$$

где $\overset{(e)}{\alpha}{}^i_j$ — направляющие косинусы осей X^i (или $\hat{x}^i_{(e)}$) относительно осей $x^j_{(e)}$, а $B^i_{(e)}$ — глобальные координаты начала системы $x^i_{(e)}$ относительно начала 0 системы X^i. Величины $\overset{(e)}{\alpha}{}^i_j$ обладают обычными свойствами:

$$\overset{(e)}{\alpha}{}^i_m \overset{(e)}{\alpha}{}^j_m = \delta^{ij}, \qquad \det \overset{(e)}{\alpha}{}^i_j = 1. \tag{7.37}$$

Связывание и разбиение модели осуществляются отображениями

$$X^{\Delta i} = \overset{(e)}{\Lambda}{}^{\Delta}_N \hat{x}^{Ni}_{(e)}, \qquad \hat{x}^{Ni}_{(e)} = \overset{(e)}{\Omega}{}^N_{\Delta} X^{\Delta i}, \tag{7.38}$$

где

$$\hat{x}^{Ni}_{(e)} = \overset{(e)}{\alpha}{}^i_j x^{Nj}_{(e)} + B^{Ni}_{(e)}. \tag{7.39}$$

Здесь $x^{Ni}_{(e)}$ — локальные координаты узла N элемента e $(x^{N3}_{(e)} = 0)$.

Локальные интерполяционные функции $\psi^{(e)}_N(\mathbf{x})$ выражаются через вспомогательные координаты $\hat{x}^i_{(e)}$ с помощью формул (7.36), а соотношение (7.35) принимает вид

$$\Phi(\hat{\mathbf{x}}) = \sum_e \overset{(e)}{\Omega}{}^N_{\Delta} \Phi^{\Delta} \psi^{(e)}_N(\hat{\mathbf{x}}), \tag{7.40}$$

где

$$\psi^{(e)}_N(\hat{\mathbf{x}}) = \psi^{(e)}_N [\overset{(e)}{\alpha}{}^1_j (\hat{x}^j_{(e)} - B^j_{(e)}), \quad \overset{(e)}{\alpha}{}^2_j (\hat{x}^j_{(e)} - B^j_{(e)})]. \tag{7.41}$$

В (7.41) вместо $\hat{x}^i_{(e)}$ можно написать X^i, если известно, что функции $\psi^{(e)}_N(\hat{\mathbf{x}})$ отличны от нуля лишь в соответствующем конечном элементе.

Пример 7.3. Векторные поля. Предыдущий пример относился к скалярному полю, заданному на эвклидовом пространстве в прямоуголь-

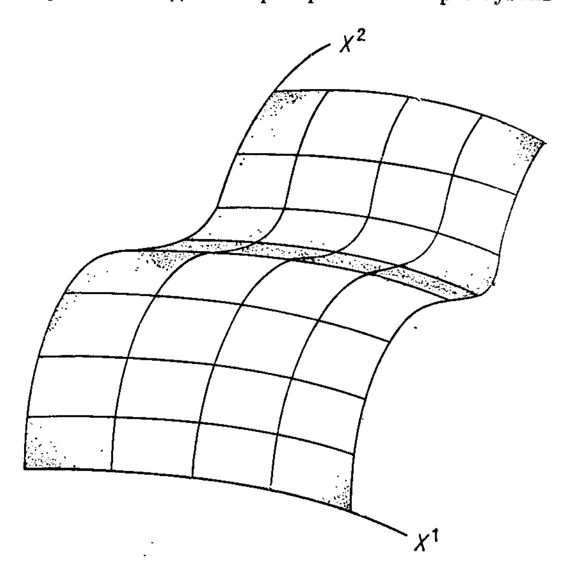


Рис. 7.3. Область определения векторного поля $\mathbf{V}(\mathbf{X})$, заданного в двумерном неэвклидовом пространстве.

ных декартовых координатах. Однако метод конечных элементов применим практически к любым векторным или тензорным полям, определенным как на эвклидовых, так и на неэвклидовых пространствах в произвольных криволинейных координатах.

Для подтверждения этого рассмотрим векторное поле $\mathbf{V}(\mathbf{X})$, заданное на некоторой области $\mathcal{R}$ произвольного (неэвклидова) пространства $\mathcal{E}^k$, точки которого определяются криволинейными координатами X^i ($i = 1, 2, \ldots, k$). Одна такая область в двумерном пространстве изображена на рис. 7.3 в виде ансамбля криволинейных конечных элементов. Пусть $\mathbf{v}_{(e)}(\mathbf{x})$ — локальное векторное поле, соответствующее элементу e, а $\mathbf{g}_{i(e)}$ и $\mathbf{g}^i_{(e)}$ — естественные ковариантные и контравариантные базисные векторы, связанные с системой координат $x^i_{(e)}$. Тогда

$$\mathbf{v}_{(e)} = v^i_{(e)}\mathbf{g}_{i(e)} = v_{i(e)}\mathbf{g}^i_{(e)}, \tag{7.42}$$

где $v^i_{(e)}$ и $v_{i(e)}$ — соответственно контравариантные и ковариантные компоненты локального векторного поля.

Предполагается, что векторные функции $\mathbf{g}_{i(e)}$ и $\mathbf{g}^i_{(e)}$ заданы заранее и каждую компоненту $v^i_{(e)}$ или $v_{i(e)}$ можно рассматривать как скалярное поле на r_e. Таким образом, можно воспользоваться аппроксимациями [1])

$$\bar{v}^i_{(e)} = v^{Ni}_{(e)}\psi^{(e)}_N(\mathbf{x}), \tag{7.43а}$$

$$\bar{v}^{(e)}_i = v^N_{i(e)}\psi^{(e)}_N(\mathbf{x}), \tag{7.43б}$$

где $v^{Ni}_{(e)}$ и $v^N_{i(e)}$ — контравариантные и ковариантные компоненты локального поля в узловой точке N элемента e. На основании (7.42) имеем

$$\bar{\mathbf{v}}_{(e)} = \mathbf{v}^N_{(e)}\psi^{(e)}_N(\mathbf{x}), \tag{7.44}$$

где $\mathbf{v}^N_{(e)}$ — значение локального векторного поля в узловой точке N элемента r_e:

$$\mathbf{v}^N_{(e)} = v^{Ni}_{(e)}\mathbf{g}^{(e)}_i = v^N_{i(e)}\mathbf{g}^i_{(e)}, \tag{7.45}$$

или

$$\mathbf{v}^N_{(e)} = \overset{(e)}{\Omega}{}^N_\Delta \mathbf{V}^\Delta. \tag{7.46}$$

Окончательно конечноэлементная модель векторного поля описывается формулой

$$\bar{\mathbf{v}}(\mathbf{x}) = \sum_e \overset{(e)}{\Omega}{}^N_\Delta \mathbf{V}^\Delta \psi^{(e)}_N(\mathbf{x}). \tag{7.47}$$

---

[1]) Ортогональные криволинейные координаты для построения конечных элементов цилиндрических оболочек использовались Богнером, Фоксом и Шмитом [1966, 1967] и другими авторами. Общие конечноэлементные представления ковариантных и контравариантных компонент векторов в неэвклидовых пространствах типа (7.35) применялись Оденом [1968а] при исследовании тонких оболочек. См. также Вемпнер, Оден и Кросс [1968], Вемпнер [1969] и Оден и Вемпнер [1967]. Эргатудис, Айронс и Зенкевич [1968а, 1968б] и Ахмад, Айронс и Зенкевич [1969] рассмотрели семейства «изопараметрических» конечных элементов с криволинейными границами. Подбирая полиномы с помощью заданных граничных точек, эти авторы сумели построить конечные элементы, аппроксимирующие достаточно общие границы. Более подробно такие элементы будут рассмотрены в п. 10.4.

Интересно отметить, что в рамках изложенной ранее теории можно построить другую аппроксимацию $\mathbf{V}(\mathbf{X})$. Вместо (7.43) положим

$$\bar{\mathbf{v}}_{(e)} = \mathbf{v}_{(e)}(\mathbf{x}^N)\,\psi_N^{(e)}(\mathbf{x}) \tag{7.48}$$

и запишем

$$\hat{\mathbf{v}}_{(e)} = \mathbf{v}_{(e)}^N \psi_N^{(e)}(\mathbf{x}). \tag{7.49}$$

Аппроксимации (7.44) и (7.49) совпадают в узлах, но различаются в других точках элемента. В самом деле,

$$\hat{\mathbf{v}}_{(e)}(\mathbf{x}) = \psi_N^{(e)}(\mathbf{x})\,(v_{(e)}^{Ni}\mathbf{g}_{(N)i}^{(e)}) = \psi_N^{(e)}(\mathbf{x})\,(v_{Ni}^{(e)}\mathbf{g}_{(N)(e)}^{i}), \tag{7.50}$$

в то время как

$$\bar{\mathbf{v}}_{(e)}(\mathbf{x}) = \psi_N^{(e)}(\mathbf{x})\,v_{(e)}^{Ni}\mathbf{g}_i^{(e)}(\mathbf{x}) = \psi_N^{(e)}(\mathbf{x})\,v_{i(e)}^{N}\mathbf{g}_{(e)}^{i}(\mathbf{x}), \tag{7.51}$$

где

$$\mathbf{g}_{(N)i}^{(e)} = \mathbf{g}_{e(i)}(\mathbf{x}^N), \qquad \mathbf{g}_{(N)(e)}^{i} = \mathbf{g}_{(e)}^{i}(\mathbf{x}^N). \tag{7.52а, б}$$

В аппроксимации (7.50) $\mathbf{v}_{(e)}(\mathbf{x})$ определяется через постоянные базисные векторы $\mathbf{g}_{(N)i}^{(e)}$, $\mathbf{g}_{(N)(e)}^{i}$ в узловых точках. В аппроксимации же (7.51) $\mathbf{v}_{(e)}(\mathbf{x})$ определяется через базис в точке $\mathbf{x}$, и такая аппроксимация, вообще говоря, лучше. Общая форма записи (7.47) для глобальной аппроксимации в обоих случаях одинакова.

Пример 7.4. Тензорные поля. Точно тот же метод может быть применен и к тензорным полям. Пусть, например, $\mathbf{T}(\mathbf{X})$ — поле тензоров второго ранга на некоторой области $\mathscr{R}$, а $\mathbf{t}_{(e)}(\mathbf{x})$ — локальное поле, соответствующее элементу e. Тогда [1])

$$\begin{aligned}\mathbf{t}_{(e)}(\mathbf{x}) &= t_{(e)}^{ij}\mathbf{g}_{i(e)} \otimes \mathbf{g}_{j(e)} = t_{(e)j}^{i\cdot}\mathbf{g}_{i(e)} \otimes \mathbf{g}^{j(e)} = t_{i(e)}^{\cdot j}\mathbf{g}_{(e)}^{i} \otimes \mathbf{g}_{j(e)} = \\ &= t_{ij(e)}\mathbf{g}_{(e)}^{i} \otimes \mathbf{g}_{(e)}^{j},\end{aligned} \tag{7.53}$$

где $t_{(e)}^{ij}$ и $t_{ij(e)}$ — контравариантные и ковариантные компоненты, а $t_{(e)j}^{i\cdot}$ и $t_{i(e)}^{\cdot j}$ — смешанные компоненты тензора $\mathbf{t}_{(e)}(\mathbf{x})$. Они аппроксимируются так:

$$\bar{t}_{(e)}^{ij} = t_{(e)}^{Nij}\psi_N^{(e)}(\mathbf{x}), \qquad \bar{t}_{(e)j}^{i\cdot} = t_{(e)j}^{Ni\cdot}\psi_N^{(e)}(\mathbf{x}), \tag{7.54а, б}$$

$$\bar{t}_{i}^{(e)\cdot j} = t_{(e)i}^{N\cdot j}\psi_N^{(e)}(\mathbf{x}), \qquad \bar{t}_{ij}^{(e)} = t_{(e)ij}^{N}\psi_N^{(e)}(\mathbf{x}), \tag{7.54в, г}$$

где $t_{(e)}^{Nij}, \ldots, t_{(e)ij}^{N}$ — значения соответствующих компонент в узловой точке N элемента e. Это означает, что

$$\mathbf{t}_{(e)}(\mathbf{x}) = \mathbf{t}_{(e)}^{N}\psi_N^{(e)}(\mathbf{x}), \tag{7.55}$$

где

$$\begin{aligned}\mathbf{t}_{(e)}^{N} &= t_{(e)}^{Nij}\mathbf{g}_i^{(e)} \otimes \mathbf{g}_j^{(e)} = t_{(e)\cdot j}^{Ni}\mathbf{g}_i^{(e)} \otimes \mathbf{g}_{(e)}^{j} = \\ &= t_{(e)i}^{N\cdot j}\mathbf{g}_{(e)}^{i} \otimes \mathbf{g}_j^{(e)} = t_{(e)ij}^{N}\mathbf{g}_{(e)}^{i} \otimes \mathbf{g}_{(e)}^{j}.\end{aligned} \tag{7.56}$$

Если $\mathbf{T}^{\Delta}$ — глобальные значения тензорного поля $\mathbf{T}(\mathbf{X})$, то

$$\mathbf{t}_{(e)}^{N} = \overset{(e)}{\Omega}{}_{\Delta}^{N}\mathbf{T}^{\Delta}. \tag{7.57}$$

---

[1]) Символы $\mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}_j$, $\mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}^j, \ldots, \mathbf{g}^i \otimes \mathbf{g}^j$ используются для обозначения тензорных произведений базисных векторов $\mathbf{g}_i$ и $\mathbf{g}^j$ ($i, j = 1, 2, \ldots, k$). Каждое из множеств диад $\mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}_j$, $\mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}^j$, $\mathbf{g}^i \otimes \mathbf{g}_j$, $\mathbf{g}^i \otimes \mathbf{g}^j$ служит базисом соответствующего k^2-мерного векторного пространства тензоров второго ранга.

Окончательно конечноэлементное представление тензорного поля имеет вид

$$\overline{\mathbf{T}}(\mathbf{x}) = \sum_e \overset{(e)}{\Omega}{}^N_\Delta \mathbf{T}^\Delta \psi^{(e)}_N(\mathbf{x}). \tag{7.58}$$

Отметим, что опять, используя вместо текущих значений $g_{(e)i}(\mathbf{x})$, $g^i_{(e)}(\mathbf{x})$ их значения в узлах $\overset{(e)}{g}_{(N)i}$ и $g^i_{(N)(e)}$, даваемые формулами (7.52), можно построить другую аппроксимацию типа (7.50).

Пример 7.5. Линейная интерполяция. Для полноты изложения и удобства дальнейших ссылок вернемся к рассмотренной в п. 6.1 одномерной задаче и приведем один из простейших примеров конечноэлементной модели непрерывной функции. Рассмотрим снова действительную функцию $F(X)$, заданную на замкнутом интервале $A \leqslant X \leqslant B$ действительной оси (рис. 6.1). Начнем, как всегда, с фиксации некоторого числа узловых точек в области $[A, B]$, причем возьмем $A = 1$, $B = G$. На рис. 6.1, *a* показан случай, когда $G = 5$. Вычисляем в этих точках значения функции $F^1 = F(X^1), \ldots, F^G = F(X^G)$. На рис. 6.2, *b* показаны отдельные конечные элементы, которые, будучи связанными друг с другом, представляют собой подынтервалы интервала $[A, B]$. Для выполнения условий совместимости модели мы в каждом конечном элементе задаем два локальных узла в концевых точках подынтервалов. Локальная функция, соответствующая элементу e, обозначается через $f_{(e)}(x)$, а локальные значения функций в локальных узлах 1 и 2 элемента обозначаются через $f^1_{(e)}$ и $f^2_{(e)}$ (рис. 6.2, *b*).

Пока все сказанное является просто повторением изложенного ранее. Теперь же рассмотрим локальные функции подробнее. Каждое локальное поле аппроксимируется функцией вида

$$\bar{f}_{(e)}(x) = f^N_{(e)}\psi^{(e)}_N(x) = f^1_{(e)}\psi^{(e)}_1(x) + f^2_{(e)}\psi^{(e)}_2(x). \tag{7.59}$$

В качестве иллюстрации возьмем *линейные* интерполяционные функции

$$\psi^{(e)}_1(x) = \frac{x^2_{(e)} - x_{(e)}}{L_{(e)}}, \qquad \psi^{(e)}_2(x) = \frac{x_{(e)} - x^1_{(e)}}{L_{(e)}}, \tag{7.60а, б}$$

где $L_{(e)} = x^2_{(e)} - x^1_{(e)}$ представляет собой длину элемента. Подчеркнем, однако, что на функции $\psi^{(e)}_N(x)$ пока не было наложено никаких ограничений, кроме условия непрерывности внутри элемента и условий (7.14). Хотя в рассматриваемом примере эти функции взяты линейными, в общем случае они могут быть и нелинейными. В самом деле, добавляя к функциям (7.60) любое произведение любых непрерывных функций, обращающихся в нуль в узлах $x^1_{(e)}$ и $x^2_{(e)}$, мы получим другие функции $\psi^{(e)}_N(x)$, которые тоже удовлетворяют условиям (7.14) [1]).

Замечая, как обычно, что

$$f^N_{(e)} = \overset{(e)}{\Omega}{}^N_\Delta F^\Delta, \tag{7.61}$$

где $N = 1, 2$ и $\Delta = 1, 2, \ldots, G$, окончательно получаем такое выражение для конечноэлементной модели $F(X)$ при кусочно-линейной аппроксимации:

$$\overline{F}(x) = \sum_e \bar{f}_{(e)}(x) = \sum_e \overset{(e)}{\Omega}{}^N_\Delta F^\Delta \psi^{(e)}_N(x). \tag{7.62}$$

---

[1]) Например, добавляя в правые части равенств (7.60а) и (7.60б) слагаемые $C(x^{(e)} - x^{(e)}_1)^m (x^{(e)} - x^{(e)}_2)^n$, где $m, n > 0$, замечаем, что по-прежнему $\psi^1_{(e)}(x_1) = 1$, $\psi^1_{(e)}(x_2) = 0$ и $\psi^2_{(e)}(x_1) = 0$, $\psi^2_{(e)}(x_2) = 1$. Дополнительные требования к функциям $\psi^N_{(e)}(x)$ рассматриваются в § 10.

8. ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ВЫСШЕГО ПОРЯДКА

Изучив основные свойства конечноэлементных моделей непрерывных функций, перейдем к вопросу построения конечноэлементных представлений высшего порядка.

8.1. ОБЩИЕ СВОЙСТВА МОДЕЛЕЙ ВЫСШЕГО ПОРЯДКА

Рассмотрим опять непрерывную функцию $\mathbf{F}(\mathbf{X}) = \mathbf{F}(X^1, X^2, \ldots, X^k)$, определенную на некоторой области $\mathscr{R}$ пространства $\mathscr{E}^k$. Если у $\mathbf{F}(\mathbf{X})$ существуют и непрерывны в $\mathscr{R}$ частные производные до порядка p включительно, то можно построить представления высшего порядка, которые не только совпадают с локальными значениями функций $\mathbf{f}_{(e)}(\mathbf{x})$ в каждом узле конечного элемента, но еще и обладают частными производными порядка $r \leqslant p$, совпадающими с частными производными заданной функции в узлах конечного элемента.

Удобно считать, что точки в $\mathscr{E}^k$ — это наборы из k глобальных координат X^i $(i = 1, 2, \ldots, k)$, которые связаны с локальными координатами $x^i_{(e)}$ $(i = 1, 2, \ldots, k;\ e = 1, 2, \ldots, E)$ посредством преобразования

$$X^i = X^i(x^1_{(e)},\ x^2_{(e)},\ \ldots,\ x^k_{(e)}), \tag{8.1}$$

причем предполагается, что для каждого e существуют единственные обратные преобразования

$$x^i_{(e)} = x^i_{(e)}(X^1,\ X^2,\ \ldots,\ X^k). \tag{8.2}$$

Для локальных представлений высшего порядка вместо (7.11) используется более общая формула:

$$\bar{\mathbf{f}}^{(e)}(\mathbf{x}) = \mathbf{H}_{(e)}(\mathbf{x};\ \mathbf{f}^N_{(e)};\ \mathbf{f}^N_{(e),1};\ \mathbf{f}^N_{(e),2};\ \ldots), \tag{8.3}$$

в которой применено обозначение

$$\mathbf{f}^N_{(e),\ i_1 i_2 \ldots i_r} \equiv \frac{\partial^r \mathbf{f}^{(e)}(\mathbf{x}^N)}{\partial x^{i_1}_{(e)}\, \partial x^{i_2}_{(e)} \ldots \partial x^{i_r}_{(e)}}, \tag{8.4}$$

где $i_1, i_2, \ldots, i_r = 1, 2, \ldots, k$. Функции $\mathbf{H}_{(e)}(\,)$ в (8.3) определяются таким образом, чтобы они обладали следующими свойствами:

1. сама $\mathbf{H}_{(e)}(\mathbf{x};\ \ldots)$ и все ее частные производные по x^i обращаются в нуль при $\mathbf{x} \notin r_e$;
2. $\mathbf{H}_{(e)}(\mathbf{x}^M;\ \ldots) = \mathbf{f}^M_{(e)}, \qquad \mathbf{x}^M \in r_e;$
3. $\dfrac{\partial \mathbf{H}_{(e)}(\mathbf{x}^M;\ \ldots)}{\partial x^i} = \mathbf{f}^M_{(e),\ i}, \qquad \mathbf{x}^M \in r_e;$ (8.5)
4. $\dfrac{\partial^r \mathbf{H}_{(e)}(\mathbf{x}^M;\ \ldots)}{\partial x^{i_1}\, \partial x^{i_2} \ldots \partial x^{i_r}} = \mathbf{f}^M_{(e),\ i_1 i_2 \ldots i_r}, \qquad \mathbf{x}^M \in r_e.$

Свойства функций $\mathbf{H}_{(e)}(\ )$ внутри элемента сходны со свойствами интерполяционных полиномов Эрмита (хотя они и не обязательно являются полиномами) [1]. В связи с этим функции $\mathbf{H}_{(e)}(\ )$ называются *обобщенными интерполяционными функциями Эрмита*. Как правило, их удобно выбирать такими, чтобы их частные производные были линейными относительно узловых значений соответствующих частных производных локального поля $\mathbf{f}_{(e)}(\mathbf{x})$:

$$\frac{\partial^r \mathbf{H}_{(e)}(\mathbf{x};\ \ldots)}{\partial x^{i_1}\partial x^{i_2}\ldots\partial x^{i_r}} = \mathbf{f}^N_{(e),\, i_1 i_2\ldots i_r}\psi_N^{(e)i_1 i_2\ldots i_r}(\mathbf{x}), \tag{8.6}$$

где $i_1, i_2, \ldots, i_r = 1, 2, \ldots, k$, а $N = 1, 2, \ldots, N_e$. Тогда (8.3) принимает вид

$$\bar{\mathbf{f}}^{(e)}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}^N_{(e)}\psi_N^{(e)0}(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^{k}\mathbf{f}^N_{(e),\,i}\psi_N^{(e)i}(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^{k}\Big(\sum_{j=i}^{k}\mathbf{f}^N_{(e),\,ij}\psi_N^{(e)ij}(\mathbf{x})\Big) + \ldots$$
$$\ldots + \sum_{i_1=1}^{k}\Big[\sum_{i_2=i_1}^{k}\Big(\ldots\sum_{i_r=i_{r-1}}^{k}\mathbf{f}^N_{(e),\,i_1 i_2\ldots i_r}\psi_N^{(e)i_1 i_2\ldots i_r}(\mathbf{x})\Big)\Big], \tag{8.7}$$

где k — размерность нашего пространства, и по повторяющемуся индексу N — производится суммирование от 1 до N_e. Скалярные функции $\psi_N^{(e)0}(\mathbf{x})$, $\psi_N^{(e)i}(\mathbf{x}), \ldots, \psi_N^{(e)i_1 i_2\ldots i_r}(\mathbf{x})$ обладают следующими свойствами:

1. Функции $\psi_N^{(e)0}(\mathbf{x})$, $\psi_N^{(e)i}(\mathbf{x}), \ldots, \psi_N^{(e)i_1 i_2\ldots i_r}(\mathbf{x})$ и все их частные производные обращаются в нуль при $\mathbf{x} \notin r_e$;
2. Среди множества функций $\psi_N^{(e)i_1 i_2\ldots i_r}(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in r_e$, только те отличны от нуля, для которых $i_1 \leqslant i_2 \leqslant i_3 \leqslant \ldots \ldots \leqslant i_{r-1} \leqslant i_r$;
3. Во всяком узле $\mathbf{x}^M \in r_e$

$$\frac{\partial^s \psi_N^{(e)i_1 i_2\ldots i_r}(\mathbf{x}^M)}{\partial x^{j_1}\partial x^{j_2}\ldots\partial x^{j_s}} = \begin{cases} 0, & \text{если } s \neq r,\\ \delta_M^N\delta_{j_1}^{i_1}\delta_{j_2}^{i_2}\ldots\delta_{j_s}^{i_r}, & \text{если } s = r.\end{cases} \tag{8.8}$$

Здесь $\delta_M^N, \delta_{j_1}^{i_1}, \ldots, \delta_{j_s}^{i_r}$ — символы Кронекера, $s = 0, 1, 2, \ldots \ldots, m$; $i_1 \leqslant i_2 \leqslant \ldots \leqslant i_r$; $j_1 \leqslant j_2 \leqslant \ldots \leqslant j_r$; $i_1, i_2, \ldots \ldots, i_r, j_1, j_2, \ldots, j_r = 1, 2, \ldots, k$; k — размерность пространства; $r \leqslant m$; $M, N = 1, 2, \ldots, N_e$.

[1] Интерполяционные формулы Эрмита и конечноэлементные представления высшего порядка при построении дискретных моделей одномерных и двумерных скалярных полей использовались многими авторами, среди прочих Богнером, Фоксом и Шмитом [1966], Пестелом [1966], Фелишпой [1966], Диком и Пайэном [1967], а также Точером и Харцом [1967]. Начальные сведения об интерполяционных полиномах Эрмита можно найти во многих книгах по численному анализу (например, у Гильдебранда [1956]). Родственные вопросы кусочной интерполяции и представлений высшего порядка рассматривались Курантом [1943], Фортом [1948], Биркгофом и Буром [1965], Ланхаром и Чу [1968] и другими авторами.

Указанные свойства обеспечивают совпадение значений функции $\bar{\mathbf{f}}^{(e)}(\mathbf{x})$ и ее частных производных по x^i до порядка m включительно со значениями $\mathbf{f}^{(e)}(\mathbf{x})$ и ее соответствующих производных во всех узловых точках элемента e.

Если представление высшего порядка $\bar{\mathbf{f}}^{(e)}(\mathbf{x})$ и его частные производные до порядка m включительно содержат по крайней мере один элемент множества $\psi_N^{(e)i_1i_2\ldots i_m}(\mathbf{x})$ и ни одного элемента порядка выше, чем m, то $\bar{\mathbf{f}}^{(e)}(\mathbf{x})$ называется представлением $(m+1)$-го порядка функции $\mathbf{f}^{(e)}(\mathbf{x})$. Так, (7.15) есть представление первого порядка. Отметим, что в представлении $(m+1)$-го порядка нормированные функции Эрмита $\psi_N^{(e)0}(\mathbf{x})$ *не* являются функциями Лагранжа $\psi_N^{(e)}(\mathbf{x})$, входящими в (7.15). Это объясняется тем, что в (7.15) не накладывалось никаких ограничений на производные функции $\psi_N^{(e)}(\mathbf{x})$, в то время как производные порядка $r \leqslant m$ функций $\psi_N^{(e)0}(\mathbf{x})$ должны обращаться в нуль во всех узловых точках конечного элемента. Действительно, от функции $\bar{\mathbf{f}}^{(e)}(\mathbf{x})$ в представлении первого порядка (7.15) требовалось лишь, чтобы она совпадала с $\mathbf{f}^{(e)}(\mathbf{x})$ в локальных узлах. Таким образом, только для представления первого порядка $\psi_N^{(e)}(\mathbf{x})$ и $\psi_N^{(e)0}(\mathbf{x})$ обязаны совпадать.

При осуществлении связывания конечноэлементных моделей, основанных на представлениях высшего порядка, необходимо ввести дополнительные глобальные и локальные множества узловых значений функций $\mathbf{F}(\mathbf{X})$ и $\mathbf{f}^{(e)}(\mathbf{x})$ и их частных производных. Например, можно положить

$$\mathscr{G}^0 = \{\mathbf{F}^\Delta\};\quad \mathscr{G}^i = \{\mathbf{F}^\Delta_{,i}\},\ \ldots,\ \mathscr{G}^{i_1i_2\ldots i_r} = \{\mathbf{F}^\Delta_{,i_1i_2\ldots i_r}\} \tag{8.9}$$

и

$$\mathscr{L}^0_{(e)} = \{\mathbf{f}^N_{(e)}\};\ \mathscr{L}^i_{(e)} = \{\mathbf{f}^N_{(e),\,i}\};\ \ldots;\ \mathscr{L}^{i_1i_2\ldots i_r}_{(e)} = \{\mathbf{f}^N_{(e),\,i_1i_2\ldots i_r}\}, \tag{8.10}$$

где $\mathbf{F}^\Delta_{,i}, \ldots, \mathbf{F}^\Delta_{,i_1i_2\ldots i_r}$ — значения различных частных производных от $\mathbf{F}(\mathbf{X})$ в узловой точке Δ области $\overline{\mathscr{R}}$. Отметим, что по определению

$$\mathbf{F}^\Delta_{,i} = \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{X}^\Delta)}{\partial X^i},\qquad \mathbf{f}^N_{(e),\,i} = \frac{\partial \mathbf{f}^{(e)}(\mathbf{x}^N)}{\partial x^i_{(e)}}\ \text{ и т. п.} \tag{8.11}$$

Итак, для осуществления связывания и разбиения системы вместо (7.16) и (7.17) надо использовать

$$\mathbf{F}^\Delta = \overset{(e)}{\Lambda}{}^\Delta_N \mathbf{f}^N_{(e)},\qquad \mathbf{F}^\Delta_{,i} = \frac{\partial x^j_{(e)}}{\partial X^i}\,\mathbf{f}^N_{(e),\,j}\overset{(e)}{\Lambda}{}^\Delta_N,$$
$$\mathbf{F}^\Delta_{,ij} = \frac{\partial x^r_{(e)}}{\partial X^i}\,\frac{\partial x^s_{(e)}}{\partial X^j}\,\mathbf{f}^N_{(e),\,rs}\overset{(e)}{\Lambda}{}^\Delta_N,\ \ldots \tag{8.12}$$

и

$$\mathbf{f}^N_{(e)} = \overset{(e)}{\Omega}{}^N_\Delta \mathbf{F}^\Delta, \qquad \mathbf{f}^N_{(e),\,i} = \frac{\partial X^j}{\partial x^i_{(e)}} \mathbf{F}^\Delta_{,\,j} \overset{(e)}{\Omega}{}^N_\Delta,$$
$$\mathbf{f}^N_{(e),\,ij} = \frac{\partial X^r}{\partial x^i_{(e)}} \frac{\partial X^s}{\partial x^j_{(e)}} \mathbf{F}^\Delta_{,\,rs} \overset{(e)}{\Omega}{}^N_\Delta, \ \ldots, \tag{8.13}$$

или, в общем виде,

$$\mathbf{f}^N_{(e),\,i_1 i_2 \ldots i_r} = \frac{\partial X^{j_1}}{\partial x^{i_1}_{(e)}} \frac{\partial X^{j_2}}{\partial x^{i_2}_{(e)}} \cdots \frac{\partial X^{j_r}}{\partial x^{i_r}_{(e)}} \mathbf{F}^\Delta_{,\,j_1 j_2 \ldots j_r} \overset{(e)}{\Omega}{}^N_\Delta. \tag{8.14}$$

Часто локальные координаты $x^i_{(e)}$ можно выбирать совпадающими с глобальными координатами X^i. Тогда $\partial X^i / \partial x^j_{(e)} = \delta^i_j$ и (8.14) сводится к

$$\mathbf{f}^N_{(e),\,i_1 i_2 \ldots i_r} = \overset{(e)}{\Omega}{}^N_\Delta \mathbf{F}^\Delta_{,\,i_1 i_2 \ldots i_r}. \tag{8.15}$$

Ясно, что построение и использование представлений высшего порядка, вообще говоря, гораздо сложнее, чем использование представлений первого порядка. Вопрос о том, окупаются ли повышением точности те трудности, которые связаны с построением представлений высшего порядка, еще не выяснен. Отметим, что, поскольку производные $\mathbf{F}_{,\,i_1 i_2 \ldots i_r}$ часто сами являются непрерывными функциями, можно использовать представления первого порядка не только для $\mathbf{F}(\mathbf{X})$, но и для ее производных.

8.2. ПРИМЕРЫ

Рассмотрим кратко некоторые примеры конечноэлементных представлений высшего порядка.

Пример 8.1. Представление второго порядка. Представление второго порядка локального поля, определенного на каком-либо элементе двумерного пространства, имеет вид

$$\bar{\mathbf{f}}^{(e)}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}^N_{(e)} \psi^{(e)0}_N(\mathbf{x}) + \mathbf{f}^N_{(e),\,1} \psi^{(e)1}_N(\mathbf{x}) + \mathbf{f}^N_{(e),\,2} \psi^{(e)2}_N(\mathbf{x}), \tag{8.16}$$

где $N = 1, 2, \ldots, N_e$. Первые частные производные от $\bar{\mathbf{f}}^{(e)}(\mathbf{x})$ таковы:

$$\frac{\partial \bar{\mathbf{f}}^{(e)}(\mathbf{x})}{\partial x^1} = \mathbf{f}^N_{(e)} \psi^0_{N,\,1} + \mathbf{f}^N_{(e),\,1} \psi^1_{N,\,1} + \mathbf{f}^N_{(e),\,2} \psi^2_{N,\,1},$$
$$\frac{\partial \bar{\mathbf{f}}^{(e)}(\mathbf{x})}{\partial x^2} = \mathbf{f}^N_{(e)} \psi^0_{N,\,2} + \mathbf{f}^N_{(e),\,1} \psi^1_{N,\,2} + \mathbf{f}^N_{(e),\,2} \psi^2_{N,\,2}, \tag{8.17}$$

где для большей ясности в некоторых местах опущена идентификационная метка элемента (e) и не указана явно зависимость $\psi_{N,i}$ и т. д. от $\mathbf{x}$ (т. е. $\psi^0_{N,1} \equiv \equiv \psi^{(e)0}_{N,1}(\mathbf{x})$ и т. д.).

Требуется, чтобы в узловых точках $\mathbf{x}^M \in r_e$ выполнялись равенства

$$\bar{\mathbf{f}}^{(e)}(\mathbf{x}^M) = \mathbf{f}^M_{(e)}, \quad \bar{\mathbf{f}}^{(e)}_{,1}(\mathbf{x}^M) = \mathbf{f}^M_{(e),1}, \quad \bar{\mathbf{f}}^{(e)}_{,2}(\mathbf{x}^M) = \mathbf{f}^M_{(e),2}. \quad (8.18а, б, в)$$

Значит, для всех узлов $\mathbf{x}^M \in r_e$

$$\psi^0_{N,1}(\mathbf{x}^M) = \psi^0_{N,2}(\mathbf{x}^M) = \psi^1_{N,2}(\mathbf{x}^M) = \psi^2_{N,1}(\mathbf{x}^M) = \psi^1_N(\mathbf{x}^M) = \psi^2_N(\mathbf{x}^M) = 0 \quad (8.19)$$

и, кроме того,

$$\psi^0_N(\mathbf{x}^M) = \psi^1_{N,1}(\mathbf{x}^M) = \psi^2_{N,2}(\mathbf{x}^M) = \delta^M_N = \begin{cases} 1, & \text{если } \mathbf{x}^N = \mathbf{x}^M, \\ 0, & \text{если } \mathbf{x}^N \neq \mathbf{x}^M. \end{cases} \quad (8.20)$$

Как отмечалось ранее, локальные узловые значения производных $\mathbf{f}^N_{(e),1}$ и $\mathbf{f}^N_{(e),2}$ и глобальные значения $\mathbf{F}^\Delta_{,1}$ и $\mathbf{F}^\Delta_{,2}$ перед связыванием элементов должны быть отнесены к общей системе координат. В рассматриваемом случае

$$\mathbf{f}^N_{(e)} = \overset{(e)}{\Omega}{}^N_\Delta \mathbf{F}^\Delta, \qquad F^\Delta = \overset{(e)}{\Lambda}{}^\Delta_N \mathbf{f}^N_{(e)}, \quad (8.21а, б)$$

$$\mathbf{f}^N_{(e),1} = \frac{\partial X^\alpha}{\partial x^1_{(e)}} \overset{(e)}{\Omega}{}^N_\Delta \mathbf{F}^\Delta_{,\alpha}, \qquad \mathbf{F}^\Delta_{,1} = \frac{\partial x^\alpha_{(e)}}{\partial X^1} \overset{(e)}{\Lambda}{}^\Delta_N \mathbf{f}^N_{(e),\alpha}, \quad (8.21в, г)$$

$$\mathbf{f}^N_{(e),2} = \frac{\partial X^\alpha}{\partial x^2_{(e)}} \overset{(e)}{\Omega}{}^N_\Delta \mathbf{F}^\Delta_{,\alpha}, \qquad \mathbf{F}^\Delta_{,2} = \frac{\partial x^\alpha_{(e)}}{\partial X^2} \overset{(e)}{\Lambda}{}^\Delta_N \mathbf{f}^N_{(e),\alpha}, \quad (8.21д, е)$$

где $\alpha = 1, 2$. Окончательно наша модель имеет вид

$$\bar{\mathbf{F}}(\mathbf{x}) = \sum_{e=1}^{E} \overset{(e)}{\Omega}{}^N_\Delta \left[\psi^{(e)0}_N(\mathbf{x})\, \mathbf{F}^\Delta + \frac{\partial X^\alpha}{\partial x^\beta_{(e)}} \psi^{(e)\beta}_N(\mathbf{x})\, \mathbf{F}^\Delta_{,\alpha} \right], \quad (8.22)$$

где $N = 1, 2, \ldots, N_e$; $\Delta = 1, 2, \ldots, G$; $\alpha, \beta = 1, 2$.

Пример 8.2. Эрмитова интерполяция. Здесь мы коротко рассмотрим представление высшего порядка действительной функции $F(X)$, определенной на интервале $A \leqslant X \leqslant B$ (см. рис. 6.1). После выбора глобальных узлов и конечных элементов построим локальную аппроксимацию $\bar{f}_{(e)}(x)$ на типичном конечном элементе. На этот раз функции $\bar{f}_{(e)}(x)$ выберем такими, чтобы в узловых точках, являющихся концами конечного элемента, значения $\bar{f}_{(e)}(x)$ и $d\bar{f}_{(e)}(x)/dx$ совпадали со значениями $f_{(e)}(x)$ и $df_{(e)}(x)/dx$. Локальные и глобальные координаты можно взять совпадающими.

Одной из аппроксимаций, удовлетворяющих этому требованию, является кубичный полином

$$\bar{f}_{(e)}(x) = \psi^0_1(x)\, f^1_{(e)} + \psi^0_2(x)\, f^2_{(e)} + \psi^1_1(x)\, f^1_{(e),1} + \psi^1_2(x)\, f^2_{(e),1}, \quad (8.23)$$

где

$$\psi^0_1(x) = 1 - 3\xi^2 + 2\xi^3, \quad (8.24а)$$

$$\psi^0_2(x) = 3\xi^2 - 2\xi^3, \quad (8.24б)$$

$$\psi^1_1(x) = L_{(e)}(\xi - 2\xi^2 + \xi^3), \quad (8.24в)$$

$$\psi^1_2(x) = -L_{(e)}(\xi^2 - \xi^3), \quad (8.24г)$$

а

$$\xi = \frac{x_{(e)} - x^1_{(e)}}{L_{(e)}}, \qquad L_{(e)} = x^2_{(e)} - x^1_{(e)}. \qquad (8.25\text{а, б})$$

Легко проверить, что

$$\begin{aligned} &\bar{f}_{(e)}(x^1) = f^1_{(e)}, \qquad \bar{f}_{(e)}(x^2) = f^2_{(e)}, \\ &\frac{d\bar{f}_{(e)}(x^1)}{dx} = f^1_{(e),\,1}, \qquad \frac{d\bar{f}_{(e)}(x^2)}{dx} = f^2_{(e),\,1}. \end{aligned} \qquad (8.26)$$

Функции (8.24) являются хорошо известными интерполяционными полиномами Эрмита, а полином (8.23) — единственным полиномом третьей степени, удовлетворяющим условиям (8.26). Используя полином пятой степени, можно дополнительно к (8.26) добиться, чтобы значения второй производной полинома в каждой узловой точке совпадали со значениями $d^2f_{(e)}(x)/dx^2$. Вообще если в узловых точках задавать $d^nf_{(e)}(x)/dx^n$, то можно обойтись полиномом степени $2n+1$. Подчеркнем, что полином (8.23) — всего лишь одна из бесчисленного множества функций, удовлетворяющих условию (8.26).

Окончательно конечноэлементная модель $F(X)$ описывается формулой

$$\bar{F}(x) = \sum_e \bar{f}_{(e)}(x) = \sum_e \overset{(e)}{\Omega}{}^N_\Delta \left[\psi^{(e)0}_N(x) F^\Delta + \psi^{(e)1}_N(x) F^\Delta_{,1}\right], \qquad (8.27)$$

где $N = 1, 2$ и $\Delta = 1, 2, \ldots, G$.

9. ТЕОРИЯ СОПРЯЖЕННЫХ АППРОКСИМАЦИЙ [1])

Одним из самых фундаментальных свойств конечноэлементных аппроксимаций является то, что рассмотренные ранее интерполяционные функции $\psi^{(e)}_N(\mathbf{x})$ образуют базис некоторого конечномерного подпространства пространства $\mathscr{H}$, которому принадлежит аппроксимируемая функция $\mathbf{F}(\mathbf{X})$. В случае когда на $\mathscr{H}$ задано скалярное произведение, функции $\psi^{(e)}_N(\mathbf{x})$, как правило, не ортогональны, и это наводит на мысль о построении другой системы функций, которые называются *сопряженно-аппроксимационными функциями*. В этом параграфе подробно рассматривается понятие сопряженно-аппроксимационной функции и показывается, что эти функции обладают некоторыми определенными свойствами, основополагающими для методов аппроксимации вообще и метода конечных элементов в частности.

9.1. СОПРЯЖЕННЫЕ ПРОСТРАНСТВА И БИОРТОГОНАЛЬНЫЕ БАЗИСЫ

В п. 7.1 уже говорилось, что совокупность всех линейных функционалов на линейном пространстве $\mathscr{V}$ сама является линейным пространством $\mathscr{V}^*$, называемым сопряженным к $\mathscr{V}$. Можно

[1]) Этот параграф основан на работе Браули и Одена [1971]. См. также Оден и Браули [1971а].

показать, что для некоторых пространств со скалярным произведением сопряженное пространство изоморфно дуальному пространству $\overline{\mathscr{V}}$ (надо использовать скалярное произведение для построения линейных функционалов на $\mathscr{V}$).

Пусть $\mathscr{B}$ — банахово пространство (полное нормированное линейное пространство) и $\mathscr{B}^*$ — его сопряженное. Пусть $\mathscr{B}$ и $\mathscr{B}^*$ оба сепарабельны, т. е. в $\mathscr{B}$ и в $\mathscr{B}^*$ существуют счетные всюду плотные множества элементов. Тогда говорят, что последовательности $\{x_n\} \in \mathscr{B}$ и $\{y^n\} \in \mathscr{B}^*$ образуют *счетный биортогональный базис* для $\mathscr{B}$ и $\mathscr{B}^*$, если выполняется условие

$$y^i(x_j) = \delta^i_j \tag{9.1}$$

и если для любых $x \in \mathscr{B}$ и $y \in \mathscr{B}^*$ справедливы разложения

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} a^i x_i, \qquad y = \sum_{i=1}^{\infty} a_i y^i. \tag{9.2}$$

Здесь $y^i(x)$ — линейные функционалы, определенные на $\mathscr{B}$, а сходимость рядов (9.2) — это сходимость по норме в $\mathscr{B}$ и $\mathscr{B}^*$ соответственно:

$$\Big\| x - \sum_{i=1}^{\infty} a^i x_i \Big\| \to 0, \quad \Big\| y - \sum_{i=1}^{\infty} a_i y^i \Big\| \to 0. \tag{9.3}$$

Из (9.1) и (9.2) следует, что коэффициенты a^i и a_i задаются выражениями

$$a^i = y^i(x), \qquad a_i = y(x_i). \tag{9.4}$$

Важным свойством сепарабельных пространств является то, что при заданном счетном биортогональном базисе возможно представить $\mathscr{B}$ и $\mathscr{B}^*$ в виде прямой суммы конечномерного и бесконечномерного пространств:

$$x = \sum_{i=1}^{n} a^i x_i + \sum_{i=n+1}^{\infty} a^i x_i, \tag{9.5а}$$

$$y = \sum_{i=1}^{n} a_i y^i + \sum_{i=n+1}^{\infty} a_i y^i. \tag{9.5б}$$

Разложения (9.5) определяют операторы проектирования Π: $\mathscr{B} \to \mathscr{B}'$ и Π^*: $\mathscr{B}^* \to \mathscr{B}^{*\prime}$ пространств $\mathscr{B}$ и $\mathscr{B}^*$ на конечномерные подпространства $\mathscr{B}'$ и $\mathscr{B}^{*\prime}$ соответственно, т. е.

$$\Pi x = \sum_{i=1}^{n} a^i x_i, \qquad \Pi^* y = \sum_{i=1}^{n} a_i y^i. \tag{9.6}$$

Это означает, что каждый элемент $x \in \mathscr{B}$ единственным образом представим в виде суммы элемента $\Pi x \in \mathscr{B}'$ и элемента вида

$$\sum_{i=n+1}^{\infty} a^i x_i,$$

принадлежащего некоторому подпространству $\mathscr{B}''$ пространства $\mathscr{B}$ (т. е. $\mathscr{B} = \mathscr{B}' \oplus \mathscr{B}''$). То же самое можно сказать и об элементах $y \in \mathscr{B}^*$, т. е. $\mathscr{B}^* = \mathscr{B}^{*\prime} \oplus \mathscr{B}^{*\prime\prime}$, и $y = \Pi^* y + y''$, где $\Pi^* y \in \mathscr{B}^{*\prime}$, а

$$y'' = \sum_{i=n+1}^{\infty} a_i y^i \in \mathscr{B}^{*\prime\prime}.$$

Подпространства $\mathscr{B}^{*\prime\prime}$ и $\mathscr{B}^{*\prime}$ являются ортогональными дополнениями к $\mathscr{B}'$ и $\mathscr{B}''$ соответственно, и $\mathscr{B}'$, $\mathscr{B}^{*\prime}$ и $\mathscr{B}''$, $\mathscr{B}^{*\prime\prime}$ образуют дуальные пары.

9.2. СОПРЯЖЕННЫЕ ПОДПРОСТРАНСТВА

Для простоты мы ограничимся рассмотрением гильбертовых пространств, т. е. полных бесконечномерных пространств со скалярным произведением. Гильбертовы пространства обладают весьма удобным свойством: они самосопряжены в том смысле, что топологическое сопряженное к гильбертову пространству изоморфно ему. Напомним, что гильбертово пространство $\mathscr{H}$ является также банаховым пространством, так как $\mathscr{H}$ полно по норме $\| x \| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$, где $\langle x, x \rangle$—определенное на $\mathscr{H}$ скалярное произведение.

Таким образом, рассматривается гильбертово пространство $\mathscr{H}$, элементами которого будут функции, определенные на некоторой ограниченной области $\mathscr{R}$ эвклидова n-мерного пространства. Элементы пространства $\mathscr{H}$ обозначаются через $F(\mathbf{X})$, $G(\mathbf{X})$, ..., где $\mathbf{X}$ — точка области $\mathscr{R}$. Скалярное произведение на $\mathscr{H} \times \mathscr{H}$ обозначается через $\langle F, G \rangle$, и используется обычная норма $\| F \| = \sqrt{\langle F, F \rangle}$.

Для многих приложений важен частный случай, когда $\mathscr{H}$ — пространство квадратично интегрируемых функций на $\mathscr{R}$. При этом скалярное произведение двух элементов $F(\mathbf{X})$ и $G(\mathbf{X})$, принадлежащих $\mathscr{H}$, определяется формулой

$$\langle F, G \rangle = \int_{\mathscr{R}} F(\mathbf{X})\, G(\mathbf{X})\, d\mathscr{R}, \tag{9.7}$$

где под интегралом понимается интеграл Лебега. Функции $F(\mathbf{X})$ и $G(\mathbf{X})$ *ортогональны*, если $\langle F, G \rangle = 0$. Для любой функции $F(\mathbf{X}) \in \mathscr{H}$

$$\langle F, F \rangle < +\infty. \tag{9.8}$$

Представим $\mathscr{H}$ в виде суммы двух подпространств Φ и $\mathscr{H}'$, где Φ — подпространство конечной размерности G. Для осуществления этого разложения выберем в качестве базиса подпространства Φ какое-нибудь множество G линейно независимых функций $\{\Phi_\Delta(\mathbf{X})\}$ [1]) пространства $\mathscr{H}$, где $\Delta = 1, 2, \ldots, G$. Тогда каждый элемент $F(\mathbf{X}) \in \mathscr{H}$ можно представить в виде суммы некоторого элемента подпространства Φ и некоторого элемента подпространства $\mathscr{H}'$:

$$F(\mathbf{X}) = \bar{F}(\mathbf{X}) + \hat{F}(\mathbf{X})\,^{2)}, \tag{9.9}$$

где $\bar{F}(\mathbf{X}) \in \Phi$ и $\hat{F}(\mathbf{X}) \in \mathscr{H}'$. Поскольку множество $\{\Phi_\Delta(\mathbf{X})\}$ образует базис для Φ, каждый элемент $\bar{F}(\mathbf{X}) \in \Phi$ можно единственным образом представить в виде линейной комбинации функций $\Phi_\Delta(\mathbf{X})$:

$$\bar{F}(\mathbf{X}) = F^\Delta \Phi_\Delta(\mathbf{X}), \tag{9.10}$$

где по повторяющемуся индексу Δ производится суммирование от 1 до G. Коэффициенты F^Δ называются *компонентами* $\bar{F}(\mathbf{X})$ относительно базиса $\{\Phi_\Delta(\mathbf{X})\}$.

Заданием множества функций $\Phi_\Delta(\mathbf{X})$ определяется оператор проектирования Π: $\mathscr{H} \to \Phi$, который отображает $\mathscr{H}$ на конечномерное подпространство. Таким образом, мы можем записать

$$\bar{F}(\mathbf{X}) = \Pi F(\mathbf{X}). \tag{9.11}$$

Необходимо иметь в виду, что функции $\Phi_\Delta(\mathbf{X})$ не обязательно ортогональны. Введем симметричную $G \times G$-матрицу

$$C_{\Delta\Gamma} \equiv \langle \Phi_\Delta, \Phi_\Gamma \rangle, \qquad \Delta, \Gamma = 1, 2, \ldots, G, \tag{9.12}$$

которая называется *фундаментальной матрицей* [3]) подпространства Φ. Функции $\Phi_\Delta(\mathbf{X})$ ортогональны в том и только в том случае,

---

[1]) Использование в качестве индекса символа Δ, который ранее применялся для идентификации глобальных узлов, не случайно. Далее в п. 9.6 будет показано, что функции $\Phi_\Delta(X)$ образуют базис для конечноэлементных аппроксимаций на $\bar{\mathscr{R}}$.

[2]) Излагаемый здесь подход не использует сепарабельности $\mathscr{H}$ и пригоден для пространств более общего вида. Если $\mathscr{H}$ сепарабельно, то часто ищут *бесконечное* множество базисных функций $\Phi_\Delta(\mathbf{X})$ и тогда

$$\hat{F}(\mathbf{X}) = \sum_{\Delta=G+1}^{\infty} F^\Delta \Phi_\Delta(\mathbf{X}).$$

Здесь же мы просто определяем подпространство Φ, строя некоторое множество линейно независимых функций. Способ построения такого множества базисных функций рассматривался в п. 7.4 и изучается более подробно в п. 9.6.

[3]) Матрица $C_{\Delta\Gamma}$ иногда называется *матрицей Грама* базисных функций $\{\Phi_\Delta\}$. Если пространство $\mathscr{H}$ комплексное, то для $C_{\Delta\Gamma}$ транспонированная матрица совпадает с комплексно сопряженной.

когда

$$C_{\Delta\Gamma} = c_{(\Delta)}\delta_{\Delta\Gamma}, \tag{9.13}$$

где $\delta_{\Delta\Gamma}$ — символ Кронекера, т. е. $\Phi_\Delta(\mathbf{X})$ ортогональны, если матрица $C_{\Delta\Gamma}$ диагональна.

Поскольку $\{\Phi_\Delta(\mathbf{X})\}$ — множество линейно независимых функций, матрица $C_{\Delta\Gamma}$ регулярна и элементы ее непосредственно вычисляются по формулам (9.12). Матрицу, обратную к $C_{\Delta\Gamma}$, обозначим через $C^{\Delta\Gamma}$, т. е.

$$(C_{\Delta\Gamma})^{-1} \equiv C^{\Delta\Gamma}, \tag{9.14}$$

или

$$C_{\Delta\Lambda}C^{\Lambda\Gamma} = \delta_\Delta^\Gamma, \tag{9.15}$$

где $\Delta, \Lambda, \Gamma = 1, 2, \ldots, G$. Матрицы $C_{\Delta\Gamma}$ и $C^{\Delta\Gamma}$ играют важную роль в теории сопряженных аппроксимаций.

Опишем теперь сопряженное пространство Φ^*, введя конечный набор $\{\Phi^\Delta\}$ линейных функционалов на Φ. Пусть $\{\Phi^\Delta(\mathbf{X})\}$ — множество G линейно независимых функций на $\mathcal{R}$, удовлетворяющих условию

$$\langle\Phi^\Delta, \Phi_\Gamma\rangle = \delta_\Gamma^\Delta. \tag{9.16}$$

Напомним, что сопряженное пространство $\mathscr{H}^*$ для пространства $\mathscr{H}$ — это совокупность всех линейных функционалов, определенных на $\mathscr{H}$. Поскольку (9.16) определяет множество G линейных функционалов на $\mathscr{H}$ и функции $\Phi^\Delta(\mathbf{X})$ линейно независимы, множество $\{\Phi^\Delta(\mathbf{X})\}$ определяет проекцию Π^* пространства $\mathscr{H}^*$ на некоторое конечномерное подпространство Φ^*, которое является сопряженным к Φ. Согласно (9.16), два множества $\{\Phi_\Delta(\mathbf{X})\}$ и $\{\Phi^\Delta(\mathbf{X})\}$ образуют счетный биортогональный базис для Φ. Множество $\{\Phi^\Delta(\mathbf{X})\}$ будем называть *сопряженным базисом* для Φ.

Соотношение (9.16) выражает свойство, которым должны обладать функции $\Phi^\Delta(\mathbf{X})$, чтобы их можно было считать сопряженными базисными функциями. Однако этого свойства недостаточно для однозначного определения совокупности независимых функций $\Phi^\Delta(\mathbf{X})$. Для устранения этой неопределенности построим функции $\Phi^\Delta(\mathbf{X})$ по формулам

$$\Phi^\Delta(\mathbf{X}) = C^{\Delta\Gamma}\Phi_\Gamma(\mathbf{X}), \tag{9.17}$$

где $C^{\Delta\Gamma}$ — матрица, обратная к фундаментальной матрице (см. (9.14)). Тогда имеем также

$$\Phi_\Delta(\mathbf{X}) = C_{\Delta\Gamma}\Phi^\Gamma(\mathbf{X}). \tag{9.18}$$

Легко показать, что функции $\Phi^\Delta(\mathbf{X})$, определяемые формулами (9.17), линейно независимы. В самом деле,

$$K^\Delta\Phi_\Delta(\mathbf{X}) = 0 \Rightarrow K^\Delta = 0, \qquad \Delta = 1, 2, \ldots, G.$$

Отсюда ясно, что если

$$K_\Delta \Phi^\Delta (X) = K_\Delta C^{\Delta\Gamma} \Phi_\Gamma (X) = 0,$$

то $K_\Delta C^{\Delta\Gamma} = K^\Gamma = 0$. Но это означает, что $K_\Delta = 0$, ибо $C^{\Delta\Gamma}$ — положительно определенная матрица. Таким образом,

$$K_\Delta \Phi^\Delta (X) = 0 \Rightarrow K_\Delta = 0 \qquad (\Delta = 1, 2, \ldots, G),$$

и, значит, функции $\Phi^\Delta (X)$ линейно независимы. Кроме того, умножая (9.17) скалярно на $\Phi_\Gamma (X)$, находим

$$\langle \Phi^\Delta, \Phi_\Gamma \rangle = \langle C^{\Delta\Lambda} \Phi_\Lambda, \Phi_\Gamma \rangle = C^{\Delta\Lambda} \langle \Phi_\Lambda, \Phi_\Gamma \rangle = C^{\Delta\Lambda} C_{\Lambda\Gamma}, \qquad (9.19)$$

или в силу (9.15)

$$\langle \Phi^\Delta, \Phi_\Gamma \rangle = \delta^\Delta_\Gamma, \qquad (9.20)$$

что в точности совпадает с условием (9.16). Это означает, что (9.17) единственным образом определяет биортогональный базис подпространств Φ и Φ^*.

Из (9.17) непосредственно получаются два важных свойства пространства Φ^*. Во-первых, заметим, что вследствие (9.17) каждый элемент множества $\{\Phi^\Delta (X)\}$ является линейной комбинацией первоначальных базисных функций $\Phi_\Delta (X)$. Поэтому функции $\Phi^\Delta (X)$ из Φ^* принадлежат и Φ, значит, Φ и его сопряженное Φ^* совпадают, т. е. подпространство Φ *самосопряженное*. Следовательно, каждый элемент $\bar{F} (X) \in \Phi$ можно представить в виде линейных комбинаций либо функций $\Phi_\Delta (X)$, либо функций $\Phi^\Delta (X)$. Вместо (9.10) можно записать

$$\bar{F} (X) = F^\Delta \Phi_\Delta (X) = F_\Delta \Phi^\Delta (X), \qquad (9.21)$$

где коэффициенты F_Δ можно рассматривать как компоненты $\bar{F} (X)$ относительно базиса $\Phi^\Delta (X)$. Запись (9.21) позволяет считать F_Δ и F^Δ ковариантными и контравариантными компонентами $\bar{F} (X)$.

Во-вторых, мы видим, что

$$\langle \Phi^\Delta, \Phi^\Gamma \rangle = C^{\Delta\Lambda} \langle \Phi_\Lambda, \Phi^\Gamma \rangle = C^{\Delta\Lambda} \delta^\Gamma_\Lambda, \qquad (9.22)$$

или

$$\langle \Phi^\Delta, \Phi^\Gamma \rangle = C^{\Delta\Gamma}. \qquad (9.23)$$

Поэтому *обратной к фундаментальной матрице* $C_{\Delta\Gamma}$ *подпространства* Φ *является фундаментальная матрица сопряженного подпространства* Φ^*.

Возвращаясь к (9.21), отметим, что

$$\langle \bar{F}, \Phi^\Delta \rangle = \langle F^\Gamma \Phi_\Gamma, \Phi^\Delta \rangle = F^\Gamma \langle \Phi_\Gamma, \Phi^\Delta \rangle = F^\Delta, \qquad (9.24)$$

$$\langle \bar{F}, \Phi_\Delta \rangle = \langle F_\Gamma \Phi^\Gamma, \Phi_\Delta \rangle = F_\Gamma \langle \Phi^\Gamma, \Phi_\Delta \rangle = F_\Delta \text{ [1]}. \qquad (9.25)$$

[1] С другой стороны, если функция $F (X)$ известна, то в качестве компонент $\bar{F} (X)$ лучше брать $F^\Delta = \langle F, \Phi^\Delta \rangle$ вместо (9.24) и $F_\Delta = \langle F, \Phi_\Delta \rangle$ вместо (9.25); см. п. 9.3.

Кроме того, в силу (9.17) и (9.18) компоненты F^Δ и F_Δ связаны между собой соотношениями

$$F^\Delta = C^{\Delta\Gamma}F_\Gamma, \tag{9.26}$$

$$F_\Delta = C_{\Delta\Gamma}F^\Gamma, \tag{9.27}$$

так что с помощью фундаментальных матриц можно «поднимать» и «опускать» индексы компонент функций из Φ.

Скалярные произведения и нормы. Пусть $\bar{F}(\mathbf{X})$ и $\bar{G}(\mathbf{X})$ — две функции, принадлежащие подпространству Φ:

$$\begin{aligned} \bar{F}(\mathbf{X}) &= F^\Delta\Phi_\Delta(\mathbf{X}) = F_\Delta\Phi^\Delta(\mathbf{X}),\\ \bar{G}(\mathbf{X}) &= G^\Delta\Phi_\Delta(\mathbf{X}) = G_\Delta\Phi^\Delta(\mathbf{X}). \end{aligned} \tag{9.28}$$

Тогда скалярное произведение $\bar{F}$ и $\bar{G}$ определяется формулами

$$\begin{aligned} \langle\bar{F}, \bar{G}\rangle &= \langle F^\Delta\Phi_\Delta, G^\Gamma\Phi_\Gamma\rangle = \langle F^\Delta\Phi_\Delta, G_\Gamma\Phi^\Gamma\rangle = \\ &= \langle F_\Delta\Phi^\Delta, G^\Gamma\Phi_\Gamma\rangle = \langle F_\Delta\Phi^\Delta, G_\Gamma\Phi^\Gamma\rangle, \end{aligned} \tag{9.29}$$

или

$$\langle\bar{F}, \bar{G}\rangle = C_{\Delta\Gamma}F^\Delta G^\Gamma = F^\Delta G_\Delta = F_\Delta G^\Delta = C^{\Delta\Gamma}F_\Delta G_\Gamma. \tag{9.30}$$

В частности,

$$\|\bar{F}\|^2 = \langle\bar{F}, \bar{F}\rangle = C_{\Delta\Gamma}F^\Delta F^\Gamma = F^\Delta F_\Delta = C^{\Delta\Gamma}F_\Delta F_\Gamma \geqslant 0, \tag{9.31}$$

чем доказана отмечавшаяся ранее положительная определенность матрицы $C_{\Delta\Gamma}$.

Аффинные преобразования. Пусть $\{\Upsilon_\Delta(\mathbf{X})\}$ — еще одно множество G линейно независимых функций. Если это множество является подмножеством Φ, то всегда можно найти матрицу A_Δ^Γ, описывающую аффинное преобразование множества $\{\Upsilon_\Delta\}$ в $\{\Phi_\Delta\}$. При этом если матрица A_Δ^Γ невырождена, то ее обратная $\hat{A}_\Delta^\Gamma$ преобразует $\{\Phi_\Delta\}$ в $\{\Upsilon_\Delta\}$:

$$\Phi_\Delta(\mathbf{X}) = A_\Delta^\Gamma\Upsilon_\Gamma(\mathbf{X}), \qquad \Upsilon_\Delta(\mathbf{X}) = \hat{A}_\Delta^\Gamma\Phi_\Gamma(\mathbf{X}). \tag{9.32}$$

Аналогично можно показать, что

$$\Phi^\Delta(\mathbf{X}) = \hat{A}_\Gamma^\Delta\Upsilon^\Gamma(\mathbf{X}), \qquad \Upsilon^\Delta(\mathbf{X}) = A_\Gamma^\Delta\Phi^\Gamma(\mathbf{X}). \tag{9.33}$$

Пусть F_*^Δ и F_Δ^* — компоненты некоторого элемента $\bar{F}(\mathbf{X}) \in \Phi$ относительно нового биортогонального базиса $\{\Upsilon_\Delta\}$, $\{\Upsilon^\Delta\}$. Легко показать, что если функция $\bar{F}(\mathbf{X})$ инвариантна относительно пре-

образований типа (9.32) и (9.33), то

$$F_*^\Delta = A_\Gamma^\Delta F^\Gamma, \qquad F_\Delta^* = \hat{A}_\Delta^\Gamma F_\Gamma, \tag{9.34}$$

а

$$\overline{F}(\mathbf{X}) = F^\Delta \Phi_\Delta(\mathbf{X}) = F_\Delta \Phi^\Delta(\mathbf{X}) = F_*^\Delta \Upsilon_\Delta(\mathbf{X}) = F_\Delta^* \Upsilon^\Delta(\mathbf{X}). \tag{9.35}$$

Отметим также, что

$$C_{\Delta\Gamma} = A_\Delta^\Lambda \overline{C}_{\Lambda\Omega} A_\Gamma^\Omega, \qquad \overline{C}_{\Delta\Gamma} = \hat{A}_\Delta^\Lambda C_{\Lambda\Omega} \hat{A}_\Gamma^\Omega, \tag{9.36}$$

$$C^{\Delta\Gamma} = \hat{A}_\Lambda^\Delta \overline{C}^{\Lambda\Omega} \hat{A}_\Omega^\Gamma, \qquad \overline{C}^{\Delta\Gamma} = A_\Lambda^\Delta C^{\Lambda\Omega} A_\Omega^\Gamma, \tag{9.37}$$

где

$$\langle \Upsilon_\Delta, \Upsilon_\Gamma \rangle = \overline{C}_{\Delta\Gamma}, \qquad \langle \Upsilon^\Delta, \Upsilon^\Gamma \rangle = \overline{C}^{\Delta\Gamma}, \qquad \langle \Upsilon_\Delta, \Upsilon^\Gamma \rangle = \delta_\Delta^\Gamma. \tag{9.38}$$

Формулы (9.32) и (9.33) описывают довольно частные случаи изменения базиса, поскольку предполагалось, что функции $\Upsilon_\Delta(\mathbf{X})$ принадлежат подпространству Ф. Нетрудно ввести множество базисных функций, не принадлежащих Ф. В этом случае преобразований типа (9.32) и (9.33) не существует.

Резюме. В виде краткого резюме повторим изложенные ранее основные положения и результаты. Для аппроксимации функции $F(\mathbf{X})$ прежде всего определяется конечномерное подпространство Ф заданного гильбертова пространства $\mathscr{H}$, которому принадлежит $F(\mathbf{X})$. С этой целью фиксируется какая-либо совокупность G линейно независимых элементов $\Phi_\Delta(\mathbf{X})$ пространства $\mathscr{H}$. Проекция элемента $F(\mathbf{X}) \in \mathscr{H}$ на подпространство Ф обозначается через $\overline{F}(\mathbf{X})$; она может быть выражена в виде линейной комбинации базисных функций $\Phi_\Delta(\mathbf{X})$ (т. е. $\overline{F}(\mathbf{X}) = F^\Delta \Phi_\Delta(\mathbf{X})$; $\Delta = 1, 2, \ldots, G$). Затем строится еще одно множество сопряженных базисных функций $\Phi^\Delta(\mathbf{X})$ по формулам

$$\Phi^\Delta(X) = C^{\Delta\Gamma} \Phi_\Gamma(\mathbf{X}). \tag{9.39}$$

Здесь $C^{\Delta\Gamma}$ — матрица, обратная к невырожденной положительно определенной матрице $C_{\Delta\Gamma}$, определяемой соотношением

$$C_{\Delta\Gamma} = \langle \Phi_\Delta, \Phi_\Gamma \rangle, \tag{9.40}$$

где $\langle\ ,\ \rangle$ — скалярное произведение в $\mathscr{H}$. Ясно, что

$$\Phi_\Delta(\mathbf{X}) = C_{\Delta\Gamma} \Phi^\Gamma(\mathbf{X}). \tag{9.41}$$

Так как формулы (9.39) единственным образом определяют множество сопряженных базисных функций, удовлетворяющих условию

$$\langle \Phi^\Delta, \Phi_\Gamma \rangle = \delta_\Gamma^\Delta, \tag{9.42}$$

два множества функций $\{\Phi_\Delta(\mathbf{X})\}$ и $\{\Phi^\Delta(\mathbf{X})\}$ образуют счетный биортогональный базис для Ф. Кроме того, поскольку (9.42)

явно задает множество из G линейных функционалов на Φ, то функции $\{\Phi^\Delta(X)\}$ образуют базис G-мерного пространства Φ^*, сопряженного с Φ. Таким образом, элементы Φ^* представляются в виде линейных комбинаций функций $\Phi^\Delta(\mathbf{X})$ (т. е. $\overline{F}^*(\mathbf{X}) = F_\Delta \Phi^\Delta(\mathbf{X})$; $\Delta = 1, 2, \ldots, G$). Однако (9.17) показывает, что каждая функция $\Phi^\Delta(\mathbf{X})$ является линейной комбинацией первоначальных базисных функций. Это означает, что $\Phi^\Delta(\mathbf{X}) \in \Phi$ и, следовательно, пространства Φ и Φ^* совпадают. Отсюда следует, что каждый элемент $\overline{F}(\mathbf{X}) \in \Phi$ можно единственным образом представить в виде линейной комбинации как функций $\Phi_\Delta(\mathbf{X})$, так и функций $\Phi^\Delta(\mathbf{X})$. Действительно,

$$\overline{F}(\mathbf{X}) = F^\Delta \Phi_\Delta(\mathbf{X}) = F_\Delta \Phi^\Delta(\mathbf{X}), \tag{9.43}$$

где

$$F^\Delta = \langle \overline{F}, \Phi^\Delta \rangle, \qquad F_\Delta = \langle \overline{F}, \Phi_\Delta \rangle, \tag{9.44}$$

или

$$F_\Delta = C_{\Delta\Gamma} F^\Gamma, \qquad F^\Delta = C^{\Delta\Gamma} F_\Gamma. \tag{9.45}$$

Скалярное произведение двух функций и норма функции в Φ определяются формулами (9.30) и (9.31). Наконец, аффинные преобразования биортогонального базиса в пространстве Φ описываются формулами (9.32) и (9.33).

9.3. НАИЛУЧШАЯ АППРОКСИМАЦИЯ

Рассмотрим теперь задачу определения наилучшей аппроксимации заданной функции $F(\mathbf{X}) \in \mathcal{H}$ в пространстве Φ, базисом которого является заданное множество функций $\Phi_\Delta(\mathbf{X})$. Под «наилучшей аппроксимацией» мы понимаем элемент из Φ, ближайший к $F(\mathbf{X})$ относительно естественной метрики

$$d[F(\mathbf{X}), G(\mathbf{X})] = \| F(\mathbf{X}) - G(\mathbf{X}) \| \text{ в } \mathcal{H}.$$

Пусть Λ^Δ — произвольные G чисел, так что $\Lambda^\Delta \Phi_\Delta(\mathbf{X}) \in \Phi$. Нам надо определить Λ^Δ, минимизирующие функционал

$$J(\Lambda^\Delta) = \langle F - \Lambda^\Delta \Phi_\Delta, F - \Lambda^\Delta \Phi_\Delta \rangle, \tag{9.46}$$

который ввиду равенства $J(\Lambda^\Delta) = d^2[F(\mathbf{X}), \Lambda^\Delta \Phi_\Delta(\mathbf{X})]$ является мерой расстояния между $F(\mathbf{X})$ и $\Lambda^\Delta \Phi_\Delta(\mathbf{X})$. Возвращаясь к (9.9) и (9.25), мы видим, что

$$\langle F, \Phi_\Delta \rangle = \langle \overline{F} + \hat{F}, \Phi_\Delta \rangle = F_\Delta + \hat{F}_\Delta, \tag{9.47}$$

где использовано обозначение $\langle \hat{F}, \Phi_\Delta \rangle = \hat{F}_\Delta$. Используя этот факт и (9.30), убеждаемся, что (9.46) можно переписать в виде

$$J(\Lambda^\Delta) = C_{\Delta\Gamma} F^\Delta F^\Gamma + \| \hat{F} \|^2 + 2F^\Delta \hat{F}_\Delta - 2\Lambda^\Delta (F_\Delta + \hat{F}_\Delta) + C_{\Delta\Gamma} \Lambda^\Delta \Lambda^\Gamma. \tag{9.48}$$

Для того чтобы найти Λ^Δ, которые минимизируют $J(\Lambda^\Delta)$, положим

$$\frac{\partial J(\Lambda^\Gamma)}{\partial \Lambda^\Delta}=0 \tag{9.49}$$

и решим эту систему линейных уравнений. Мы получим

$$\Lambda^\Delta_{\min}=F^\Delta+C^{\Delta\Gamma}\hat{F}_\Gamma. \tag{9.50}$$

Смысл этого результата станет понятен, если заметить, что, подобно (9.47),

$$\langle F,\ \Phi^\Delta\rangle=\langle \overline{F}+\hat{F},\ \Phi^\Delta\rangle=F^\Delta+C^{\Delta\Gamma}\hat{F}_\Gamma=\Lambda^\Delta_{\min}. \tag{9.51}$$

Таким образом, *наилучшей аппроксимацией заданной функции* $F(X)$ *в подпространстве* Φ *является функция* $\overline{F}(X)\in\Phi$, *компоненты которой относительно базиса* $\{\Phi_\Delta\}$ *равны скалярным произведениям* $F(X)$ *с сопряженными базисными функциями* $\Phi^\Delta(X)$.

Отметим, что в приложениях, как правило, $F(X)$ — неизвестная функция, и лучшее, что можно сделать,— это использовать компоненты F^Δ и F_Δ, определенные формулами (9.24) и (9.25). Однако если функция $F(X)$ задана, то коэффициенты, определяющие ее наилучшую аппроксимацию в Φ, находятся с помощью (9.51). Если через $F^\Delta_{(b)}$ и $F^{(b)}_\Delta$ обозначить коэффициенты наилучшей аппроксимации, то

$$F^\Delta_{(b)}=F^\Delta+\langle\hat{F},\ \Phi^\Delta\rangle,\qquad F^{(b)}_\Delta=F_\Delta+\langle\hat{F},\ \Phi_\Delta\rangle. \tag{9.52}$$

В случае когда можно получать коэффициенты $F^\Delta_{(b)}$ и $F^{(b)}_\Delta$ в форме (9.52), нетрудно установить еще одно интересное свойство подпространств Φ и Φ^*. В этом случае вместо (9.43) используется соотношение

$$\overline{F}(X)=F^\Delta_{(b)}\Phi_\Delta(X)=F^{(b)}_\Delta\Phi^\Delta(X). \tag{9.53}$$

Тогда[1])

$$\begin{aligned}\langle\hat{F},\ \Phi_\Delta\rangle&=\langle F-\overline{F},\ \Phi_\Delta\rangle=0,\\ \langle\hat{F},\ \Phi^\Delta\rangle&=\langle F-\overline{F},\ \Phi^\Delta\rangle=0,\end{aligned} \tag{9.54}$$

т. е. пространство Φ (или Φ^*) является ортогональным дополнением к $\mathscr{H}'$ (или $\mathscr{H}^{*\prime}$). Далее предположим, что (9.53) и (9.54) выполняются; тогда мерой E ошибки представления функции $F(X)$ ее проекцией $\overline{F}(X)=\Pi F(X)$ будет

$$E=\|F-\overline{F}\|^2=\|\hat{F}\|^2, \tag{9.55}$$

[1]) Определяемый последующими формулами выбор $\overline{F}$, при котором функция $F-\overline{F}$ ортогональна к Φ, мотивируется классической теоремой о проекциях в гильбертовых пространствах. См. теорему 10.8.

поскольку $\bar{F}$ и $\hat{F}$ ортогональны. Так как в общем случае норма $\|\hat{F}\|$ может быть неограниченной, ошибка E мала только в том случае, если функция $F(\mathbf{X})$ близка к подпространству Φ.

Обобщение. Нетрудно обобщить приведенные выше результаты на случай дуальных несамосопряженных пространств. Коротко остановимся на этом. Пусть $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$ — дуальные пространства, элементами которых являются функции, обозначаемые через f и g, и пусть $\langle f, g\rangle$ — скалярное произведение «между» $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$. Далее, пусть Φ — некоторое конечномерное подпространство в $\mathcal{F}$, а Ψ — дуальное ему подпространство в $\mathcal{G}$. Пространства Φ и Ψ порождаются биортогональным базисом $\Phi_\Delta \in \Phi$, $\Psi^\Delta \in \Psi$, где

$$\langle \Phi_\Delta, \Psi^\Gamma\rangle = \delta_\Delta^\Gamma, \qquad \Delta, \Gamma = 1, 2, \ldots, G. \tag{9.56}$$

Если F и G[1]) — проекции f и g на Φ и Ψ, то

$$F = F^\Delta \Phi_\Delta, \qquad G = G_\Delta \Psi^\Delta, \tag{9.57}$$

где по повторяющимся индексам производится суммирование от 1 до G, а

$$F^\Delta = \langle f, \Psi^\Delta\rangle, \qquad G_\Delta = \langle g, \Phi_\Delta\rangle. \tag{9.58}$$

Пусть $\Lambda^\Delta \Phi_\Delta$ и $M_\Delta \Psi^\Delta$ — произвольные элементы из Φ и Ψ. Рассмотрим билинейный функционал

$$J(\Lambda^\Delta, M_\Gamma) = \langle f - \Lambda^\Delta \Phi_\Delta, g - M_\Gamma \Psi^\Gamma\rangle, \tag{9.59}$$

который после некоторых выкладок можно записать в виде

$$J(\Lambda^\Delta, M_\Gamma) = \langle f - F, g - G\rangle + \langle F^\Delta - \Lambda^\Delta\rangle \langle G_\Gamma - M_\Gamma\rangle. \tag{9.60}$$

Ясно, что при подстановке любой из определяемых формулами (9.57) проекций второй член в (9.60) обращается в нуль. Если мы введем линейное положительно определенное регулярное отображение $\varkappa$ пространства $\mathcal{F}$ в $\mathcal{G}$, такое, что $\varkappa(\Phi) \subset \Psi$, то $\varkappa$ определяет матрицу $\varkappa_{\Gamma\Delta} = \langle \Phi_\Delta, \varkappa(\Phi_\Gamma)\rangle$, такую, что

$$\varkappa_{\Gamma\Delta} \Lambda^\Delta = M_\Gamma. \tag{9.61}$$

Поэтому функционал $J(\Lambda^\Delta, M_\Gamma) = J(\Lambda^\Delta, \varkappa_{\Gamma\Omega}\Lambda^\Omega)$ является положительно определенной квадратичной формой

$$J(\Lambda^\Delta) = \langle f - F, \varkappa(f - F)\rangle + \varkappa_{\Delta\Gamma}(\Lambda^\Delta - F^\Delta)(\Lambda^\Gamma - F^\Gamma). \tag{9.62}$$

Следовательно, если Λ^Δ выбраны в соответствии с (9.58), то функционал (9.62) принимает минимальное значение.

[1]) Не нужно путать это G с размерностью подпространства Φ. — *Прим. перев.*

9.4. НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА СОПРЯЖЕННЫХ АППРОКСИМАЦИЙ

Предположим, что мы расширили пространство $\mathscr{H}$ таким образом, что оно включает в себя функции типа дельта-функции Дирака [1]) $\delta(\mathbf{X}-\mathbf{A})$, $\mathbf{A} \in \mathscr{R}$, определяемой условиями

$$\delta(\mathbf{X}-\mathbf{A}) = \begin{cases} 0, & \mathbf{X} \neq \mathbf{A}, \\ \infty, & \mathbf{X} = \mathbf{A}, \end{cases} \qquad \int_{\mathscr{R}} (\mathbf{X}-\mathbf{A})\, d\mathscr{R} = 1. \tag{9.63}$$

Здесь $\mathbf{A}$ — фиксированная точка области $\mathscr{R}$.

Пусть $\Delta(\mathbf{X}-\mathbf{A})$ — проекция функции Дирака $\delta(\mathbf{X}-\mathbf{A})$ на подпространство Φ:

$$\Delta(\mathbf{X}-\mathbf{A}) = \Pi\delta(\mathbf{X}-\mathbf{A}) = \Delta^{\Delta}\Phi_{\Delta}(\mathbf{X}) = \Delta_{\Delta}\Phi^{\Delta}(\mathbf{X}), \tag{9.64}$$

где в соответствии с (9.24) и (9.25) [или (9.44)]

$$\Delta^{\Delta} = \langle \delta(\mathbf{X}-\mathbf{A}),\ \Phi^{\Delta}(\mathbf{X}) \rangle = \Phi^{\Delta}(\mathbf{A}), \tag{9.65}$$

$$\Delta_{\Delta} = \langle \delta(\mathbf{X}-\mathbf{A}),\ \Phi_{\Delta}(\mathbf{X}) \rangle = \Phi_{\Delta}(\mathbf{A}). \tag{9.66}$$

Следовательно,

$$\Delta(\mathbf{X}-\mathbf{A}) = \Phi^{\Delta}(\mathbf{A})\,\Phi_{\Delta}(\mathbf{X}) = \Phi_{\Delta}(\mathbf{A})\,\Phi^{\Delta}(\mathbf{X}). \tag{9.67}$$

Таким образом, *значения функций* $\Phi^{\Delta}(\mathbf{X})$ (*или* $\Phi_{\Delta}(\mathbf{X})$) *в произвольной точке* $\mathbf{A} \in \mathscr{R}$ *равны компонентам* Δ^{Δ} (*или* Δ_{Δ}) *проекции дельта-функции* $\delta(\mathbf{X}-\mathbf{A})$ *на* Φ.

Отметим, что в то время как функция $\delta(\mathbf{X}-\mathbf{A})$ отлична от нуля только в точке $\mathbf{A}$, проекция $\Delta(\mathbf{X}-\mathbf{A})$ может быть отличной от нуля почти всюду в области определения функций из Φ. Однако основные свойства функции $\delta(\mathbf{X}-\mathbf{A})$ сохраняются при проектировании Π: $\mathscr{H} \to \Phi$. Например, видно, что

$$\begin{aligned} \langle \Delta(\mathbf{X}-\mathbf{A}),\ \bar{F}(\mathbf{X}) \rangle &= \langle \Phi_{\Delta}(\mathbf{A})\,\Phi^{\Delta}(\mathbf{X}),\ F^{\Gamma}\Phi_{\Gamma}(\mathbf{X}) \rangle = \\ &= \Phi_{\Delta}(\mathbf{A})\,F^{\Gamma}\langle \Phi^{\Delta},\ \Phi_{\Gamma} \rangle = \\ &= F^{\Delta}\Phi_{\Delta}(\mathbf{A}) = \bar{F}(\mathbf{A}). \end{aligned} \tag{9.68}$$

В частности, если $\bar{F}(\mathbf{X}) = 1$ является элементом пространства Φ, то

$$\langle \Delta(\mathbf{X}-\mathbf{A}),\ 1 \rangle = 1. \tag{9.69}$$

Чтобы установить еще одно свойство функций $\Phi_{\Delta}(\mathbf{X})$, предположим, что в $\mathscr{R}$ фиксировано конечное число G *узловых точек*

[1]) Напомним, что $\delta(\mathbf{X}-\mathbf{A})$ не является квадратично интегрируемой функцией. Поэтому наши результаты, касающиеся наилучшей аппроксимации элементов из $\mathscr{H}$, к ней неприменимы. Однако проекция $\Pi\delta(\mathbf{X}-\mathbf{A})$ корректно определена.

$\mathbf{X}^{\Delta}$ ($\Delta = 1, 2, \ldots, G$). Предположим, далее, что функция $\Phi_{\Delta}(\mathbf{X})$ в узле $\mathbf{X}^{\Gamma}$ равна единице, а в других узлах обращается в нуль, т. е.

$$\Phi_{\Delta}(\mathbf{X}^{\Gamma}) = \delta_{\Delta}^{\Gamma}. \tag{9.70}$$

Тогда проекция дельта-функции (9.64) принимает вид

$$\Delta(\mathbf{X} - \mathbf{X}^{\Gamma}) = \Phi_{\Delta}(\mathbf{X}^{\Gamma})\,\Phi^{\Delta}(\mathbf{X}) = \Phi^{\Gamma}(\mathbf{X}). \tag{9.71}$$

Базисные функции $\Phi_{\Delta}(\mathbf{X})$, обладающие свойством (9.70), будем называть *нормализованными* относительно G узлов $\mathbf{X}^{\Delta}$. В п. 9.6 рассматривается способ построения таких нормализованных базисных функций для конечноэлементных аппроксимаций. Равенство (9.71) показывает, что сопряженные функции $\Phi^{\Delta}(\mathbf{X})$ представляют собой проекции дельта-функций $\delta(\mathbf{X} - \mathbf{X}^{\Delta})$ узлов $\mathbf{X}^{\Delta}$.

Моменты и объемы. В некоторых приложениях, в случае когда $\mathscr{H}$ — гильбертово пространство со скалярным произведением, задаваемым формулой (9.7), удобно ввести в рассмотрение моменты M_{Δ} и M^{Δ}, определяемые формулами

$$M_{\Delta} = \int_{\mathscr{R}} \Phi_{\Delta}(\mathbf{X})\,d\mathscr{R}, \tag{9.72}$$

$$M^{\Delta} = \int_{\mathscr{R}} \Phi^{\Delta}(\mathbf{X})\,d\mathscr{R} = C^{\Delta\Gamma} M_{\Gamma}. \tag{9.73}$$

Тогда

$$\int_{\mathscr{R}} \bar{F}(\mathbf{X})\,d\mathscr{R} = F^{\Delta} M_{\Delta} = F_{\Delta} M^{\Delta}. \tag{9.74}$$

Если предположить, что $\bar{F}(\mathbf{X}) = 1 \in \Phi$ и функции $\Phi_{\Delta}(\mathbf{X})$ нормализованы относительно G узловых точек (условие (9.70)), то эти функции будут удовлетворять еще и условию

$$\sum_{\Delta=1}^{G} \Phi_{\Delta}(\mathbf{X}) = 1. \tag{9.75}$$

Тогда моменты (9.73) можно представить в форме

$$M^{\Delta} = C^{\Delta\Gamma} M_{\Gamma} = C^{\Delta\Gamma} \int_{\mathscr{R}} \Phi_{\Gamma}(\mathbf{X}) \sum_{\Lambda=1}^{G} \Phi_{\Lambda}(\mathbf{X})\,d\mathscr{R}, \tag{9.76}$$

или

$$M^{\Delta} = C^{\Delta\Gamma} \sum_{\Lambda=1}^{G} \langle \Phi_{\Gamma}, \Phi_{\Lambda} \rangle. \tag{9.77}$$

Но $\langle\Phi_\Gamma, \Phi_\Lambda\rangle = C_{\Gamma\Lambda}$, так что

$$M^\Delta = \sum_{\Lambda=1}^{G} C^{\Delta\Gamma}C_{\Gamma\Lambda} = \sum_{\Lambda=1}^{G} \delta_\Lambda^\Delta = 1. \tag{9.78}$$

Аналогично

$$M_\Delta = \sum_{\Lambda=1}^{G} \langle\Phi_\Delta, \Phi_\Lambda\rangle = \sum_{\Lambda=1}^{G} C_{\Delta\Lambda}. \tag{9.79}$$

Заметим, что

$$\sum_{\Delta=1}^{G} M_\Delta = \int_{\mathscr{R}} \sum_{\Delta=1}^{G} \Phi_\Delta(\mathrm{X})\, d\mathscr{R} = \int_{\mathscr{R}} d\mathscr{R} = \mathscr{V}, \tag{9.80}$$

где $\mathscr{V}$ — объем области $\mathscr{R}$. Отметим также, что

$$\mathscr{V} = \int_{\mathscr{R}} d\mathscr{R} = \sum_{\Delta=1}^{G} \sum_{\Gamma=1}^{G} C_{\Delta\Gamma}. \tag{9.81}$$

Таким образом, *если выполнено условие* (9.75), *то сумма всех элементов фундаментальной матрицы* $C_{\Delta\Gamma}$ *равна объему области* $\mathscr{R}$ *определения функций из* Φ. Кроме того, в силу (9.74) и (9.78)

$$\int_{\mathscr{R}} \bar{F}(\mathrm{X})\, d\mathscr{R} = \sum_{\Delta=1}^{G} F_\Delta. \tag{9.82}$$

Заметим еще, что если базисные функции $\Phi_\Delta(\mathrm{X})$ удовлетворяют условиям (9.70) и (9.75), то

$$\bar{F}(\mathrm{X}^\Delta) = F^\Delta = C^{\Delta\Gamma}F_\Gamma. \tag{9.83}$$

Значит, *среднее значение* $\bar{F}(\mathrm{X})$ *в области* $\mathscr{R}$, *определяемое интегралом* (9.82), *не равно сумме значений* $\bar{F}(X)$ *в узлах* X^Δ, *а равно сумме сопряженных значений* $F_\Delta = C_{\Delta\Gamma}F^\Gamma$. *Мы видим, что* F^Δ *есть значение* $\bar{F}(\mathrm{X})$ *в узловой точке* X^Δ, *в то же время как* F_Δ — *среднее значение* $\bar{F}(\mathrm{X})$ *в окрестности* X^Δ.

9.5. ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАТОРЫ

В этом пункте мы кратко рассмотрим некоторые свойства аппроксимаций линейного оператора $\mathscr{L}$. Как правило, приходится иметь дело с уравнениями типа

$$\mathscr{L}F(\mathrm{X}) = G(\mathrm{X}), \tag{9.84}$$

где $\mathscr{L}$ — линейный оператор, отображающий элемент $F(\mathrm{X})$ гильбертова пространства $\mathscr{H}$ в элемент $G(\mathrm{X})$ другого гильбертова пространства $\hat{\mathscr{H}}$ функций, определенных на той же самой области $\mathscr{R}$, что и функции из $\mathscr{H}$. Для простоты будем пока считать, что $\mathscr{H}=\hat{\mathscr{H}}$, т. е. что $\mathscr{L}\colon \mathscr{H}\to\mathscr{H}$. Тогда $\mathscr{L}F(\mathrm{X})\in\mathscr{H}$, и можно говорить о проекции $\Pi\mathscr{L}F(\mathrm{X})$ на подпространство Φ:

$$\Pi\mathscr{L}F(\mathrm{X}) = L^{\Delta}\Phi_{\Delta}(\mathrm{X}) = L_{\Delta}\Phi^{\Delta}(\mathrm{X}). \tag{9.85}$$

Здесь

$$L^{\Delta} = \langle\Phi^{\Delta}, \Pi\mathscr{L}F\rangle, \qquad L_{\Delta} = \langle\Phi_{\Delta}, \Pi\mathscr{L}F\rangle. \tag{9.86}$$

Очевидно, что

$$\Pi\mathscr{L}F(\mathrm{X}) = \Pi\mathscr{L}\bar{F}(\mathrm{X}) + \Pi\mathscr{L}\hat{F}(\mathrm{X}). \tag{9.87}$$

Для упрощения дальнейших рассуждений предположим, что операторы Π и $\mathscr{L}$ коммутируют, т. е.

$$\Pi\mathscr{L} = \mathscr{L}\Pi. \tag{9.88}$$

Хорошо известно, что (9.88) в большинстве случаев выполняется лишь приближенно. Разность $\mathscr{L}\Pi - \Pi\mathscr{L}$ является мерой того, насколько хорошо подпространство Φ соответствует рассматриваемой задаче. Очевидно, равенство (9.88) предполагает, что $\mathscr{L}\Phi_{\Delta}\subset\subset\Phi$. При выполнении условия коммутирования (9.88) можно считать, что

$$\Pi\mathscr{L}\hat{F}(\mathrm{X}) = \mathscr{L}\Pi\hat{F}(\mathrm{X}) = 0 \tag{9.89}$$

и

$$\Pi\mathscr{L}F(\mathrm{X}) = \mathscr{L}\Pi F(\mathrm{X}) = \mathscr{L}\bar{F}(\mathrm{X}) = F^{\Delta}\mathscr{L}\Phi_{\Delta}(\mathrm{X}). \tag{9.90}$$

Тогда в силу (9.86)

$$L_{\Delta} = L_{\Delta\Gamma}F^{\Gamma} = L_{\Delta}^{\cdot\Gamma}F_{\Gamma} \quad \text{и} \quad L^{\Delta} = L^{\Delta\Gamma}F_{\Gamma} = L^{\Delta}_{\cdot\Gamma}F^{\Gamma}, \tag{9.91}$$

где

$$L_{\Delta\Gamma} = \langle\Phi_{\Delta}, \mathscr{L}\Phi_{\Gamma}\rangle, \quad L_{\Delta}^{\cdot\Gamma} = \langle\Phi_{\Delta}, \mathscr{L}\Phi^{\Gamma}\rangle, \tag{9.92а, б}$$

$$L^{\Delta\Gamma} = \langle\Phi^{\Delta}, \mathscr{L}\Phi^{\Gamma}\rangle, \quad L^{\Delta}_{\cdot\Gamma} = \langle\Phi^{\Delta}, \mathscr{L}\Phi_{\Gamma}\rangle. \tag{9.92в, г}$$

Ясно, что действие оператора $\mathscr{L}$ на Φ описывается матрицами $L_{\Delta\Gamma}, \ldots, L^{\Delta}_{\cdot\Gamma}$. Отсюда следует, что

$$\Pi\mathscr{L}F(\mathrm{X}) = L_{\Delta\Gamma}F^{\Gamma}\Phi^{\Delta}(\mathrm{X}) = L_{\Delta}^{\cdot\Gamma}F_{\Gamma}\Phi^{\Delta}(\mathrm{X}) = \\ = L^{\Delta\Gamma}F_{\Gamma}\Phi_{\Delta}(\mathrm{X}) = L^{\Delta}_{\cdot\Gamma}F^{\Gamma}\Phi_{\Delta}(\mathrm{X}). \tag{9.93}$$

Аппроксимация уравнения (9.84) в Φ принимает вид

$$L^{\Delta}_{\cdot\Gamma}F^{\Gamma}\Phi_{\Delta}(\mathrm{X}) = G^{\Delta}\Phi_{\Delta}(\mathrm{X}). \tag{9.94}$$

Приравнивая соответствующие компоненты, получаем

$$L^{\Delta}_{\cdot\Gamma}F^{\Gamma}=G^{\Delta}. \tag{9.95}$$

Если матрица $L^{\Delta}_{\cdot\Gamma}$ невырождена, то

$$F^{\Delta}=N^{\Delta}_{\cdot\Gamma}G^{\Gamma}, \tag{9.96}$$

где $N^{\Delta}_{\cdot\Gamma}$ — матрица, обратная к $L^{\Delta}_{\cdot\Gamma}$, и приближенное решение уравнения (9.84) имеет вид

$$\overline{F}(\mathrm{X})=N^{\Delta}_{\cdot\Gamma}G^{\Gamma}\Phi_{\Delta}(\mathrm{X}). \tag{9.97}$$

В гильбертовом пространстве $\mathscr{H}$ оператор $\hat{\mathscr{L}}$, *сопряженный к* $\mathscr{L}$, определяется соотношением

$$\langle\mathscr{L}F,\ G\rangle=\langle\hat{\mathscr{L}}G,\ F\rangle. \tag{9.98}$$

Для выбранных нами аппроксимаций имеем

$$\langle\mathscr{L}F^{\Delta}\Phi_{\Delta},\ G^{\Gamma}\Phi_{\Gamma}\rangle=\langle\hat{\mathscr{L}}G^{\Delta}\Phi_{\Delta},\ F^{\Gamma}\Phi_{\Gamma}\rangle,$$

или

$$L_{\Gamma\Delta}G^{\Gamma}G^{\Delta}=\hat{L}_{\Gamma\Delta}F^{\Gamma}G^{\Delta}, \tag{9.99}$$

где

$$\hat{L}_{\Delta\Gamma}=\langle\Phi_{\Gamma},\ \hat{\mathscr{L}}\Phi_{\Delta}\rangle. \tag{9.100}$$

Это означает, что

$$\hat{L}_{\Gamma\Delta}=L_{\Delta\Gamma}. \tag{9.101}$$

Как и следовало ожидать, матрицей сопряженного оператора $\hat{\mathscr{L}}$ служит матрица, транспонированная к матрице оператора $\mathscr{L}$.

Аппроксимации некоторых линейных операторов будут рассмотрены в качестве примеров в § 11.

Задачи о собственных значениях. Рассмотрим две задачи о собственных значениях

$$\mathscr{L}F=\lambda F \qquad \text{и} \qquad \hat{\mathscr{L}}G=\lambda G. \tag{9.102}$$

Используя наши аппроксимации, эти уравнения можно представить в виде

$$(L^{\Delta\Gamma}-\lambda C^{\Delta\Gamma})F_{\Gamma}=0 \tag{9.103}$$

и

$$(\hat{L}^{\Delta\Gamma}-\lambda C^{\Delta\Gamma})G_{\Gamma}=0. \tag{9.104}$$

Известно, что множества собственных значений матрицы и транспонированной к ней совпадают. Далее, всегда можно выбрать биортогональные множества собственных функций, причем если

все собственные значения различны, то единственным образом. Пусть $F_\Delta^{(\alpha)}$ и $G_\Delta^{(\beta)}$ — собственные векторы, соответствующие собственным значениям λ_α и λ_β матриц $L^{\Delta\Gamma}$ и $\hat{L}^{\Delta\Gamma}$. Тогда

$$L^{\Delta\Gamma}F_\Gamma^{(\alpha)} = \lambda_\alpha C^{\Delta\Gamma}F_\Gamma^{(\alpha)}, \tag{9.105}$$

$$\hat{L}^{\Delta\Gamma}G_\Gamma^{(\beta)} = \lambda_\beta C^{\Delta\Gamma}G_\Gamma^{(\beta)} \tag{9.106}$$

и

$$F_\Delta^{(\alpha)}G_{(\beta)}^\Delta = C^{\Delta\Gamma}F_\Gamma^{(\alpha)}G_\Delta^{(\beta)} = \delta_{\alpha\beta}. \tag{9.107}$$

В частности, *если функции* $\Phi_\Delta(\mathbf{X})$ *являются собственными функциями линейного оператора* $\mathscr{L}$ *в* $\mathscr{H}$, *то сопряженные функции* $\Phi^\Delta(\mathbf{X})$ *будут собственными функциями сопряженного оператора* $\hat{\mathscr{L}}$. Другими словами,

$$\mathscr{L}\Phi_\Delta(\mathbf{X}) = \lambda_{(\Delta)}\Phi_\Delta(\mathbf{X}) \Rightarrow \hat{\mathscr{L}}\Phi^\Delta(\mathbf{X}) = \lambda_{(\Delta)}\Phi^\Delta(\mathbf{X}). \tag{9.108}$$

Если оператор $\mathscr{L}$ самосопряжен, то собственные функции $\Phi_\Delta(\mathbf{X})$ и $\Phi^\Delta(\mathbf{X})$ совпадают: $\Phi_\Delta(\mathbf{X}) = \Phi^\Delta(X)$ (с точностью до констант).

Производные сопряженных аппроксимаций. Один из наиболее распространенных линейных операторов — оператор частного дифференцирования. Рассмотрим некоторые свойства производных аппроксимационных функций. Пусть $\partial_\mu F(\mathbf{X})$ обозначают частную производную функции $F(\mathbf{X}) \in \mathscr{H}$. Будем предполагать, что $\partial_\mu F(\mathbf{X})$ существует и что производные базисных функций $\Phi_\Delta(\mathbf{X})$ тоже принадлежат подпространству Φ, т. е. $\partial_\mu\Phi_\Delta \in \Phi$ (это последнее предположение, конечно, не всегда справедливо). Введем в рассмотрение массив

$$D_\mu^{\Delta\Gamma} = \langle\partial_\mu\Phi^\Delta,\ \Phi^\Gamma\rangle. \tag{9.109}$$

В соответствии с (9.11)

$$\Pi\,[\partial_\mu\Phi^\Delta(\mathbf{X})] = D_\mu^{\Delta\Gamma}\Phi_\Gamma(\mathbf{X}). \tag{9.110}$$

Возникает важный вопрос: при каких условиях проекцию (9.110) можно использовать для аппроксимации производных от сопряженных функций $\Phi^\Delta(\mathbf{X})$? Другими словами, когда мы имеем право считать, что

$$\partial_\mu\Phi^\Delta(\mathbf{X}) = D_\mu^{\Delta\Gamma}\Phi_\Gamma(\mathbf{X}). \tag{9.111}$$

Ответ на этот вопрос дает следующая теорема.

Теорема 9.1. *Равенству* (9.111) *эквивалентны следующие условия:*

а. $\partial_\mu\Pi = \Pi\partial_\mu$ *на* Φ.
б. $\partial_\mu\Phi \subset \Phi$.

в. Ф *есть пространство решений некоторой системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.*

Доказательство. Схема доказательства такова. Мы покажем, что из (9.111) следуют условия **а** и **в**, из **а** следует **б**, а из **б** следует (9.111).

(9.111) $\Rightarrow$ **а.** Действительно,

$$\Pi\partial_\mu\Phi^\Delta(\mathbf{X}) = D_\mu^{\Delta\Gamma}\Phi_\Gamma(\mathbf{X}) = \partial_\mu\Phi^\Delta(\mathbf{X}) = \partial_\mu[\Pi\Phi^\Delta(\mathbf{X})]$$

для каждой функции $\Phi^\Delta(\mathbf{X}) \in \Phi$.

а $\Rightarrow$ **б.** В самом деле, $\partial_\mu(\Phi) = \partial_\mu\Pi\Phi = \Pi(\partial_\mu\Phi)$, а $\Pi(\partial_\mu\Phi) \subset \Phi$ по определению.

б $\Rightarrow$ (9.111). Поскольку $\partial_\mu(\Phi) \subset \Phi$, то $\partial_\mu\Phi^\Delta(\mathbf{X})$ является линейной комбинацией функций $\Phi_\Delta(\mathbf{X})$, что и утверждается равенством (9.111).

(9.111) $\Rightarrow$ **в.** Это немедленно следует из того, что множество $\{\Phi_\Delta\}$ представляет собой полное решение уравнения

$$\partial_\mu\Upsilon_\Delta = C_{\Delta\Gamma}D_\mu^{\Gamma\Lambda}\Upsilon_\Lambda.$$

в $\Rightarrow$ (9.111). Систему линейных дифференциальных уравнений порядка n всегда можно свести к системе уравнений первого порядка. Следовательно, $\partial_\mu\Phi_\Delta(\mathbf{X})$ содержатся в Ф. Доказательство завершено.

Предполагая, что условия теоремы выполнены, можно с помощью (9.111) получить производную любого элемента $\bar{F}(\mathbf{X}) = \mathbf{F}^\Delta\Phi_\Delta(\mathbf{X}) \in \Phi$:

$$\partial_\mu\bar{F}(\mathbf{X}) = D_\mu^{\Delta\Gamma}F_\Delta\Phi_\Gamma(\mathbf{X}). \qquad (9.112)$$

Однако соотношение

$$\Pi\partial_\mu F(\mathbf{X}) = D_\mu^{\Delta\Gamma}F_\Delta\Phi_\Gamma(\mathbf{X}) \qquad (9.113)$$

может не выполняться, если только на Ф не наложить дополнительные условия

а′. $\partial_\mu\Pi = \Pi\partial_\mu$ в $\mathscr{H}$.

б′. $\partial_\mu(\Phi) \subset \Phi$.

Можно показать, что условия (9.113), **а′** и **б′** эквивалентны.

Если предположить, что эти дополнительные условия тоже выполнены, то операция дифференцирования ∂_μ в $\mathscr{H}$ приближенно описывается с помощью массива D_μ, определяемого формулой (9.109), а производные высших порядков представляются с помощью степеней $D_\mu^{\Delta\Gamma}$. Действительно, вводя дискретные операторы

$$D_{\mu\lambda}^{\Delta\Gamma} = D_\lambda^{\Delta\Lambda}C_{\Lambda\Omega}D_\mu^{\Omega\Gamma} \qquad (9.114)$$

и

$$B_{\mu\lambda}^{\Delta\Gamma} = D_\mu^{\Delta\Lambda}C_{\Lambda\Omega}D_\lambda^{\Gamma\Omega}, \qquad (9.115)$$

легко показать, что, например,

$$\partial_\mu \partial_\lambda F(\mathbf{X}) = D^{\Delta\Gamma}_{\mu\lambda} F_\Delta \Phi_\Gamma(\mathbf{X}), \tag{9.116}$$

$$\operatorname{div} \mathbf{a} = \partial_\mu a^\mu = D^{\Delta\Gamma}_\mu A^\mu_\Delta \Phi_\Gamma(\mathbf{X}), \tag{9.117}$$

$$\int_{\mathcal{R}} \operatorname{div} \mathbf{a}\, d\mathcal{R} = D^{\Delta\Gamma}_\mu A^\mu_\Delta M_\Gamma, \tag{9.118}$$

$$\langle F,\ \partial_\mu G\rangle = D^{\Gamma\Delta}_\mu F_\Delta G_\Gamma, \tag{9.119}$$

$$\langle \partial_\mu F,\ \partial_\lambda G\rangle = B^{\Delta\Gamma}_{\mu\lambda} F_\Delta G_\Gamma, \tag{9.120}$$

$$\int_{\mathcal{R}} \operatorname{grad} \mathbf{F} \cdot \operatorname{grad} \mathbf{G}\, d\mathcal{R} = B^{\Gamma\Delta}_{\mu\mu} F_\Delta G_\Gamma \tag{9.121}$$

и т. д. Отметим также, что можно использовать дискретные операторы и других типов, такие, как

$$D_{\mu,\,\Delta\Gamma} = \langle \partial_\mu \Phi_\Delta,\ \Phi_\Gamma\rangle = C_{\Delta\Lambda} C_{\Gamma\Omega} D^{\Omega\Lambda}_\mu, \tag{9.122}$$

$$D^{\Delta\,\cdot}_{\mu,\,\Gamma} = C_{\Gamma\Lambda} D^{\Delta\Lambda}_\mu = C^{\Delta\Lambda} D_{\mu,\,\Lambda\Gamma},\quad D^{\cdot\,\Delta}_{\mu,\,\Gamma} = C_{\Gamma\Lambda} D^{\Delta\Lambda}_\mu = C^{\Delta\Lambda} D_{\mu,\,\Gamma\Lambda}, \tag{9.123а, б}$$

$$B_{\lambda\mu,\,\Delta\Gamma} = \langle \partial_\lambda \Phi_\Delta,\ \partial_\mu \Phi_\Gamma\rangle \tag{9.124}$$

и т. д. Тогда

$$\partial_\mu \Phi_\Delta(\mathbf{X}) = D_{\mu,\,\Delta\Gamma} \Phi^\Gamma(\mathbf{X}) = D^{\cdot\,\Gamma}_{\mu,\,\Delta} \Phi_\Gamma(\mathbf{X}), \tag{9.125}$$

$$\partial_\mu \Phi^\Delta(\mathbf{X}) = D^{\Delta\,\cdot}_{\mu,\,\Gamma} \Phi^\Gamma(\mathbf{X}) = D^{\Delta\Gamma}_\mu \Phi_\Gamma(\mathbf{X}), \tag{9.126}$$

$$\partial_\mu \overline{F}(\mathbf{X}) = F^\Delta D_{\mu,\,\Delta\Gamma} \Phi^\Gamma(\mathbf{X}) = D^{\Delta\Gamma}_\mu F_\Delta \Phi_\Gamma(\mathbf{X}). \tag{9.127}$$

Ясно, что с помощью операторов (9.122) — (9.124) можно получить другие формулы, соответствующие формулам (9.116) — (9.121).

Производные порядка выше двух подсчитываются по общей формуле

$$\partial_{\mu_1}\partial_{\mu_2} \ldots \partial_{\mu_{r-1}}\partial_{\mu_r} \overline{F}(\mathbf{X}) = \\ = C_{\Delta_1\Gamma_1} C_{\Delta_2\Gamma_2} \ldots C_{\Delta_{r-1}\Gamma_{r-1}} D^{\Delta_1\Lambda}_{\mu_1} D^{\Delta_2\Gamma_1}_{\mu_2} \ldots D^{\Delta_{r-1}\Gamma_{r-2}}_{\mu_{r-1}} D^{\Gamma_{r-1}\Omega}_{\mu_r} F_\Lambda \Phi_\Omega(\mathbf{X}). \tag{9.128}$$

Следует сказать, что дополнительные условия а′ и б′ (и даже более слабые условия а, б, в) редко выполняются в приложениях. Однако мы будем предполагать, что размерность G может быть взята достаточно большой, с тем чтобы эти условия выполнялись хотя бы в некотором приближенном смысле. Интересно отметить, что если эти условия не выполняются, то производная проекции постоянной величины не обязательно равна нулю! Некоторые другие факты будут отмечены ниже при описании конкретных примеров.

9.6. ПРИЛОЖЕНИЯ К КОНЕЧНОЭЛЕМЕНТНЫМ АППРОКСИМАЦИЯМ

Для того чтобы применить изложенную теорию сопряженных аппроксимаций к конечноэлементным аппроксимациям, необходимо выяснить природу базисных функций $\Phi_\Delta(\mathbf{X})$, используемых для конечноэлементных представлений функций $F(\mathbf{X})$. С этой целью, следуя описанной в § 6 и 7 процедуре, представим область $\mathcal{R}$ областью $\bar{\mathcal{R}}$, состоящей из совокупности E конечных элементов r_e, которые связаны между собой в G глобальных узловых точках $\mathbf{X}^\Delta$ ($\Delta = 1, 2, \ldots, G$). Как обычно, внутри каждого элемента выбираем N_e локальных узловых точек $\mathbf{x}^N_{(e)}$, так что $\mathbf{x}^N_{(e)} = \overset{(e)}{\Omega}{}^N_\Delta \mathbf{X}^\Delta$, а для фиксированного e имеет место равенство $\mathbf{X}^\Delta = \overset{(e)}{\Lambda}{}^\Delta_N \mathbf{x}^N_{(e)}$, где $\overset{(e)}{\Lambda}{}^\Delta_N$ и $\overset{(e)}{\Omega}{}^N_\Delta$ — массивы, определяемые формулами (7.4) и (7.6). Для упрощения обозначений будем пока предполагать, что системы локальных и глобальных координат $\mathbf{x}_e$ и $\mathbf{X}$ совпадают, так что для записи точки в $\bar{\mathcal{R}}$ можно использовать символы $\mathbf{x}$ и $\mathbf{X}$. В случае необходимости подчеркнуть, что точка принадлежит определенному элементу, мы, как и прежде, будем использовать идентификационную метку (e).

Рассмотрим гильбертово пространство $\mathcal{H}$, элементы которого являются функциями, определенными в области $\mathcal{R}$, и напомним, что проекция Π: $\mathcal{H} \to \Phi$ определяет G-мерное подпространство в $\mathcal{H}$, порождаемое функциями $\Phi_\Delta(\mathbf{X})$. В случае конечноэлементных аппроксимаций областью определения функций в подпространстве Φ является совокупность конечных элементов $\bar{\mathcal{R}}$. Таким образом, в $\bar{\mathcal{R}}$

$$F(\mathbf{X}) \approx \bar{F}(\mathbf{X}) = F^\Delta \Phi_\Delta(\mathbf{X}), \tag{9.129}$$

где, если функции $\Phi_\Delta(\mathbf{X})$ нормализованы в узлах $\mathbf{X}^\Delta$ в соответствии с (9.70),

$$\bar{F}(\mathbf{X}^\Delta) = F^\Gamma \Phi_\Gamma(\mathbf{X}^\Delta) = F^\Gamma \delta^\Delta_\Gamma = F^\Delta. \tag{9.130}$$

Метод конечных элементов предполагает использование способа получения (9.129) и при локальных рассмотрениях. Пусть $P^{(e)}$ обозначает проекцию $\mathcal{H}$ на N_e-мерное подпространство $\Psi^{(e)}$ функций, определенных в r_e, т. е. $P^{(e)}$: $\mathcal{H} \to \Psi^{(e)}$. Опишем эту проекцию, введя систему N_e линейно независимых *локальных базисных функций* $\psi^{(e)}_N(\mathbf{x})$, нормализованных в локальных узловых точках:

$$\psi^{(e)}_N(\mathbf{x}^M) = \delta^M_N, \tag{9.131}$$

где $M, N = 1, 2, \ldots, N_e$. Локальная проекция функции $F(\mathbf{X})$ определяется формулой

$$P^{(e)} F(\mathbf{X}) = \bar{f}^{(e)}(\mathbf{x}), \tag{9.132}$$

где локальная аппроксимация $\bar{f}^{(e)}(\mathrm{x})$ единственным образом выражается в виде линейной комбинации локальных базисных функций (см. (7.15)):

$$\bar{f}^{(e)}(\mathbf{x}) = f^N_{(e)}\psi^{(e)}_N(\mathrm{x}). \tag{9.133}$$

Вследствие (9.131) компоненты $f^N_{(e)}$ представляют собой значения локальных аппроксимаций в локальных узлах:

$$\bar{f}^{(e)}(\mathbf{x}^M) = f^N_{(e)}\psi^{(e)}_N(\mathbf{x}^M) = f^N_{(e)}\delta^M_N = f^M_{(e)}, \tag{9.134}$$

и, как обычно,

$$f^N_{(e)} = \overset{(e)}{\Omega}{}^N_\Delta F^\Delta \quad \text{и} \quad F^\Delta = \overset{(e)}{\Lambda}{}^\Delta_N f^N_{(e)}. \tag{9.135}$$

Для установления связи локальных функций $\psi^{(e)}_N(\mathrm{x})$ с глобальными функциями $\Phi_\Delta(\mathbf{X})$ *потребуем, чтобы функция* $\psi^{(e)}_N(\mathrm{x})$ *была ограничением* $\Phi_\Delta(\mathbf{X})$ *на элементе* r_e, *что записывается так*:

$$\psi^{(e)}_N(\mathrm{x}) = \overset{(e)}{\Lambda}{}^\Delta_N \Phi_\Delta(\mathrm{x}); \tag{9.136}$$

здесь под $\Phi_\Delta(\mathbf{x})$ понимается $\Phi_\Delta(\mathbf{X})$ только для $\mathbf{X} \in r_e$. Это соотношение определяет вложение $\overset{(e)}{\Lambda}: \Phi \to \Psi^{(e)}$ и следует из того факта, что значения $\psi^{(e)}_N(\mathrm{x})$ и $\Phi_\Delta(\mathbf{X})$ находятся во взаимно однозначном соответствии с точками их областей определения r_e и $\bar{\mathcal{R}}$. Для $\mathbf{x} \in r_e$ справедливо также соотношение

$$\Phi_\Delta(\mathbf{X}) = \overset{(e)}{\Omega}{}^N_\Delta \psi^{(e)}_N(\mathrm{x}) \quad \text{при фиксированном } e, \tag{9.137}$$

и почти всюду[1]) в $\bar{\mathcal{R}}$

$$\Phi_\Delta(\mathbf{X}) = \sum_{e=1}^{E} \overset{(e)}{\Omega}{}^N_\Delta \psi^{(e)}_N(\mathrm{x}). \tag{9.138}$$

Из определений $P^{(e)}$ и Π ясно, что

$$P^{(e)} = \overset{(e)}{\Lambda}\Pi. \tag{9.139}$$

Мы видим, что при тех же оговорках, которые были сделаны относительно (9.138), равенство (9.130) можно переписать в виде

$$\bar{F}(\mathbf{X}) = F^\Delta \Phi_\Delta(\mathbf{X}) = \sum_{e=1}^{E} F^\Delta \overset{(e)}{\Omega}{}^N_\Delta \psi^{(e)}_N(\mathrm{x}) = \sum_{e=1}^{E} f^N_{(e)}\psi^{(e)}_N(\mathbf{x}), \tag{9.140}$$

или, в силу (9.133),

$$\bar{F}(\mathbf{X}) = \sum_{e=1}^{E} \bar{f}^{(e)}(\mathbf{x}). \tag{9.141}$$

---

[1]) См. подстрочное примечание на стр. 50. Отметим, что (9.138) определяет базисные функции $\Phi_\Delta(\mathbf{X})$ именно так, как они были введены ранее формулами (7.20).

Фундаментальные свойства конечноэлементных аппроксимаций. Описав базисные функции $\Phi_\Delta(\mathbf{X})$ для конечноэлементных аппроксимаций, мы можем применить к ним изложенную ранее общую теорию сопряженных аппроксимаций. Подставляя (9.138) в (9.12), получаем фундаментальную матрицу подпространства Ф для конечноэлементных моделей

$$C_{\Delta\Gamma}=\langle\Phi_\Delta,\ \Phi_\Gamma\rangle=\sum_{e=1}^{E}\sum_{f=1}^{E}\overset{(e)}{\Omega}{}_{\Delta}^{N}\overset{(f)}{\Omega}{}_{\Gamma}^{M}\langle\psi_N^{(e)},\ \psi_M^{(f)}\rangle. \tag{9.142}$$

Однако локальные аппроксимирующие функции $\psi_N^{(e)}(\mathbf{x})$ определены так, что *их носители почти не пересекаются*, так что

$$\langle\psi_N^{(e)},\ \psi_M^{(f)}\rangle=0, \qquad e\neq f. \tag{9.143}$$

Значит, (9.142) можно переписать в виде

$$C_{\Delta\Gamma}=\sum_{e=1}^{E}\overset{(e)}{\Omega}{}_{\Delta}^{N}\overset{(e)}{\Omega}{}_{\Gamma}^{M}c_{NM}^{(e)}, \tag{9.144}$$

где $c_{NM}^{(e)}$ — локальная фундаментальная матрица подпространства $\Psi^{(e)}$:

$$c_{NM}^{(e)}=\langle\psi_N^{(e)},\ \psi_M^{(e)}\rangle. \tag{9.145}$$

На первый взгляд кажется естественным использовать матрицу $c_{NM}^{(e)}$ и ее обратную для построения множества локальных сопряженных базисных функций, как это делалось раньше при определении $\Phi^\Delta(\mathbf{X})$. Однако мы тогда ограничились рассмотрением пространств Ф и Ф*, содержащих только непрерывные функции. А так как от функций $\psi_N^{(e)}(\mathbf{x})$ требуется только лишь, чтобы они образовывали непрерывные базисные функции $\Phi_\Delta(\mathbf{X})$ по формулам (9.138), нет никаких оснований ожидать, что в достаточной степени произвольная линейная комбинация $\sum_e (c_{NM}^{(e)})^{-1}\psi_M^{(e)}(\mathbf{x})$ будет тоже непрерывной в $\overline{\mathscr{R}}$. Поэтому необходим другой подход.

Определим локальные сопряженные аппроксимации для конечноэлементных представлений с учетом этого замечания. Для начала рассмотрим линейный функционал, соответствующий взятию скалярного произведения функции

$$\overline{F}(\mathbf{X})=F^\Delta\Phi_\Delta(\mathbf{X})=\sum_e\overset{(e)}{\Omega}{}_{\Delta}^{N}F^\Delta\psi_N^{(e)}(\mathbf{x})=F_\Delta\Phi^\Delta(\mathbf{X}) \tag{9.146}$$

с произвольной функцией $\overline{G}(\mathbf{X})\in\Phi^*$, которая также является суммой E локальных аппроксимаций:

$$\overline{G}(\mathbf{X})=\sum_e\overline{g}^{(e)}(\mathbf{x})=G_\Delta\Phi^\Delta(\mathbf{X}), \tag{9.147}$$

где

$$\Phi^\Delta(\mathbf{X}) = C^{\Delta\Gamma}\Phi_\Gamma(\mathbf{X}) = C^{\Delta\Gamma}\sum_e \overset{(e)}{\Omega}{}^N_\Gamma \psi_N^{(e)}(\mathbf{x}). \tag{9.148}$$

Имеем

$$\langle \overline{F}, \overline{G}\rangle = F^\Delta G_\Delta = F_\Delta G^\Delta = F^\Delta \left\langle \sum_e \overset{(e)}{\Omega}{}^N_\Delta \psi_N^{(e)}(\mathbf{x}),\ \overline{G}\right\rangle, \tag{9.149}$$

где

$$G_\Delta = \langle \overline{G},\ \Phi_\Delta\rangle = \sum_e \overset{(e)}{\Omega}{}^N_\Delta g_N^{(e)} \tag{9.150}$$

и использовано обозначение

$$g_N^{(e)} = \langle \overline{G},\ \psi_N^{(e)}\rangle. \tag{9.151}$$

Видно, что в противоположность (9.135) *глобальные значения* G_Δ *в глобальной узловой точке* Δ *получаются в результате суммирования всех локальных значений* $g_N^{(e)}$ *в локальных узлах, инцидентных* Δ. Позднее мы остановимся на этом подробнее.

Возвращаясь к (9.147), мы можем теперь определить системы локальных сопряженных базисных функций, поскольку

$$\overline{G}(\mathbf{X}) = \sum_e \overset{(e)}{\Omega}{}^N_\Delta g_N^{(e)}\Phi^\Delta(\mathbf{X}) = \sum_e \overline{g}^{(e)}(\mathbf{x}), \tag{9.152}$$

что наводит на мысль положить

$$\overline{g}^{(e)}(\mathbf{x}) = g_N^{(e)}\psi^N_{(e)}(\mathbf{x}), \qquad N = 1,\ 2,\ \ldots,\ N_e, \tag{9.153}$$

где в силу (9.152)

$$\psi^N_{(e)}(\mathbf{x}) = \overset{(e)}{\Omega}{}^N_\Delta \Phi^\Delta(\mathbf{X}). \tag{9.154}$$

Это равенство определяет локальные сопряженные базисные функции для элемента e конечноэлементной аппроксимации. Вследствие (9.138) имеем

$$\psi^N_{(e)}(\mathbf{x}) = \overset{(e)}{\Omega}{}^N_\Delta C^{\Delta\Gamma}\sum_{f=1}^{E} \overset{(f)}{\Omega}{}^M_\Gamma \psi_M^{(f)}(\mathbf{x}). \tag{9.155}$$

Соотношение (9.155) весьма важно: оно показывает, что *«локальные» сопряженные базисные функции для элемента e являются линейными комбинациями базисных функций всех E конечных элементов. Таким образом, функции $\psi^N_{(e)}(\mathbf{x})$ не обязаны иметь локальные носители; фактически для каждой локальной функции $\psi^N_{(e)}(\mathbf{x})$ носителем служит вся связанная область $\overline{\mathscr{R}}$. Это означает, что обычный прием вычисления локальных значений сопряженных аппроксимаций с помощью локальных узловых значений* $g_N^{(e)}$ (например, вычисление напряжений элемента по аппроксимации пере-

мещений) *не вполне точен. Для того чтобы локальная сопряженная аппроксимация была согласована с определенным на* Φ *линейным функционалом* (например, энергией), *необходимо рассматривать всё в базисе, имеющем своей областью определения всю совокупность конечных элементов.* Эти свойства локальных сопряженных аппроксимаций будут продемонстрированы на примерах в п. 9.8.

Заметим, что

$$\langle \psi_{(e)}^{N}, \psi_{R}^{(e)} \rangle = \overset{(e)}{\Omega}{}_{\Delta}^{N} C^{\Delta\Gamma} \sum_{f=1}^{E} \overset{(f)}{\Omega}{}_{\Gamma}^{M} \langle \psi_{M}^{(f)}, \psi_{R}^{(e)} \rangle, \tag{9.156}$$

поэтому, ввиду (9.145),

$$\langle \psi_{(e)}^{N}, \psi_{R}^{(e)} \rangle = \overset{(e)}{\Omega}{}_{\Delta}^{N} C^{\Delta\Gamma} \overset{(e)}{\Omega}{}_{\Gamma}^{M} c_{MR}^{(e)}, \tag{9.157}$$

где $M, N, R = 1, 2, \ldots, N_e$ и $\Delta, \Gamma = 1, 2, \ldots, G$. Ясно, что множества функций $\psi_N^{(e)}(\mathbf{x})$ и $\psi_{(e)}^{N}(\mathbf{x})$ не образуют локального биортогонального базиса для функций из $\Psi^{(e)}$.

После того как базисные функции $\Phi_\Delta(\mathbf{X})$ и $\Phi^\Delta(\mathbf{X})$ для конечноэлементных представлений определены формулами (9.138) и (9.148), просто получить и другие величины, нужные при конечноэлементных аппроксимациях. Например, из (9.72) и (9.73) получаем

$$M_\Delta = \int_{\mathscr{R}} \Phi_\Delta(\mathbf{X})\, d\mathscr{R} = \sum_{e=1}^{E} \overset{(e)}{\Omega}{}_{\Delta}^{N} m_N^{(e)} = \sum_{\Gamma=1}^{G} C_{\Delta\Gamma}, \tag{9.158}$$

где

$$m_N^{(e)} = \int_{re} \psi_N^{(e)}(\mathbf{x})\, dr_e, \tag{9.159}$$

$$M^\Delta = C^{\Delta\Gamma} \sum_{e=1}^{E} \overset{(e)}{\Omega}{}_{\Gamma}^{N} m_N^{(e)} = 1. \tag{9.160}$$

Далее, если мы введем локальный дискретный оператор

$$d_{\mu,\, NM}^{(e)} = \langle \partial_\mu \psi_N^{(e)}, \psi_M^{(e)} \rangle, \tag{9.161}$$

то в соответствии с (9.109) и (9.122)

$$D_{\mu,\, \Delta\Gamma} = \sum_{e=1}^{E} \overset{(e)}{\Omega}{}_{\Delta}^{N} \overset{(e)}{\Omega}{}_{\Gamma}^{M} d_{\mu,\, NM}^{(e)}, \tag{9.162}$$

$$D_\mu^{\Delta\Gamma} = C^{\Delta\Lambda} C^{\Gamma\Omega} \sum_{e=1}^{E} \overset{(e)}{\Omega}{}_{\Omega}^{N} \overset{(e)}{\Omega}{}_{\Lambda}^{M} d_{\mu,\, NM}^{(e)}. \tag{9.163}$$

Например,

$$\partial_\mu F(\mathbf{X}) = \sum_{e} \overset{(e)}{\Omega}{}_{\Delta}^{N} \overset{(e)}{\Omega}{}_{\Gamma}^{M} d_{\mu,\, NM}^{(e)} F^\Delta \Phi^\Gamma(\mathbf{X}). \tag{9.164}$$

Дискретные операторы $D_{\mu\lambda}^{\Delta\Gamma}$ и $B_{\mu\lambda}^{\Delta\Gamma}$, задаваемые формулами (9.114) и (9.115), для конечноэлементных моделей имеют вид

$$D_{\mu\lambda}^{\Delta\Gamma}=C^{\Delta\Sigma}C^{\Gamma\Theta}C^{\Omega\Upsilon}\Big(\sum_e \overset{(e)}{\Omega}{}_{\Sigma}^{N}\overset{(e)}{\Omega}{}_{\Omega}^{M}d_{\mu,\,NM}^{(e)}\Big)\Big(\sum_f \overset{(f)}{\Omega}{}_{\Upsilon}^{R}\overset{(f)}{\Omega}{}_{\Theta}^{S}d_{\lambda,\,RS}^{(f)}\Big), \qquad (9.165)$$

$$B_{\mu\lambda}^{\Delta\Gamma}=C^{\Delta\Lambda}C^{\Gamma\Sigma}C^{\Theta\Omega}\Big(\sum_e \overset{(e)}{\Omega}{}_{\Lambda}^{N}\overset{(e)}{\Omega}{}_{\Theta}^{M}d_{\mu,\,NM}^{(e)}\Big)\Big(\sum_f \overset{(f)}{\Omega}{}_{\Sigma}^{R}\overset{(f)}{\Omega}{}_{\Omega}^{S}d_{\lambda,\,RS}^{(f)}\Big). \qquad (9.166)$$

Нетрудно получить соотношения, подобные (9.116) — (9.121) или (9.122) — (9.128), в форме, соответствующей конечноэлементным аппроксимациям. Для этого надо подставить в них (9.162), (9.163), (9.164) или (9.165). Поскольку это делается очень просто, подробнее останавливаться на этом не будем.

В случае линейного операторного уравнения типа (9.84) рассмотрим его локальную форму

$$P^{(e)}\mathscr{L}F(\mathbf{X}) = P^{(e)}G(\mathbf{X}), \qquad (9.167)$$

которую мы аппроксимируем с помощью соотношений

$$P^{(e)}\mathscr{L}F(\mathbf{X}) \approx \mathscr{L}P^{(e)}F(\mathbf{X}) = \mathscr{L}\bar{f}^{(e)}(\mathbf{x}) = f_{(e)}^{N}\mathscr{L}\psi_N^{(e)}(\mathbf{x}) \qquad (9.168)$$

и

$$P^{(e)}G(\mathbf{X}) = g_{(e)}^{N}\psi_N^{(e)}(\mathbf{x}). \qquad (9.169)$$

Таким образом, в пределах конечного элемента

$$f_{(e)}^{N}\mathscr{L}\psi_N^{(e)}(\mathbf{x}) = g_{(e)}^{N}\psi_N^{(e)}(\mathbf{x}). \qquad (9.170)$$

Вводя обозначение

$$l_{MN}^{(e)} = \langle\psi_M^{(e)},\ \mathscr{L}\psi_N^{(e)}\rangle, \qquad (9.171)$$

имеем

$$l_{MN}^{(e)}f_{(e)}^{N} = c_{NM}^{(e)}g_{(e)}^{N}. \qquad (9.172)$$

Локальные матрицы типа l_{MN} часто вырождены, поскольку локальным функциям $\bar{f}^{(e)}(\mathbf{x})$ пока позволяется принимать произвольные значения на локальных границах ∂r_e элементов. Поскольку

$$f_{(e)}^{N} = \overset{(e)}{\Omega}{}_{\Gamma}^{N}F^{\Gamma} \quad \text{и} \quad g_{(e)}^{N} = \overset{(e)}{\Omega}{}_{\Gamma}^{N}G^{\Gamma}, \qquad (9.173)$$

умножая (9.172) на $\overset{(e)}{\Omega}{}_{\Delta}^{M}$ и суммируя по e, получаем

$$F^{\Gamma}\sum_e \overset{(e)}{\Omega}{}_{\Delta}^{M}l_{MN}^{(e)}\overset{(e)}{\Omega}{}_{\Gamma}^{N} = G^{\Gamma}\sum_e \overset{(e)}{\Omega}{}_{\Delta}^{M}c_{MN}^{(e)}\overset{(e)}{\Omega}{}_{\Gamma}^{N}. \qquad (9.174)$$

Полагая

$$L_{\Delta\Gamma} = \sum_e \overset{(e)}{\Omega}{}_{\Delta}^{M}l_{MN}^{(e)}\overset{(e)}{\Omega}{}_{\Gamma}^{N} \qquad (9.175)$$

и замечая, что

$$G^{\Gamma} \sum_{e} \overset{(e)}{\Omega}{}_{\Delta}^{M} c_{MN}^{(e)} \overset{(e)}{\Omega}{}_{\Gamma}^{N} = G^{\Gamma} C_{\Delta\Gamma} = G_{\Delta}, \qquad (9.176)$$

приходим к равенству

$$L_{\Delta\Gamma} F^{\Gamma} = G_{\Delta}, \qquad (9.177)$$

которое эквивалентно (9.95). Отметим, что приведенные рассуждения основывались на предположении о перестановочности $\mathscr{L}$ и $P^{(e)}$. Другие подходы, применимые как к линейным, так и к нелинейным операторам, будут рассмотрены в § 10 и в примерах § 11 (а также в п. 9.8).

9.7. ОБОБЩЕННЫЕ СОПРЯЖЕННЫЕ ПЕРЕМЕННЫЕ [1])

В качестве некоторого обобщения изложенной теории сопряженных аппроксимаций рассмотрим способ построения обобщенных сопряженных переменных для других линейных функционалов.

Пусть $\mathscr{S}$ и $\mathscr{T}$ — два пространства, элементами которых являются функции $\mathbf{S}(\mathbf{X})$ и $\mathbf{T}(\mathbf{X})$, определенные в одной и той же области $\mathscr{R} \subset \mathscr{E}^k$. В рассматриваемом случае значения функций $\mathbf{S}(\mathbf{X})$ и $\mathbf{T}(\mathbf{X})$ могут быть векторами, тензорами и т. д. Пусть имеется некоторое отображение, ставящее в соответствие каждой паре функций $[\mathbf{T}(\mathbf{X}), \mathbf{S}(\mathbf{X})] \in \mathscr{T} \times \mathscr{S}$ вещественную функцию $G(\mathbf{X})$, $\mathbf{X} \in \mathscr{R}$. Бинарную операцию, которая для заданного $\mathbf{X}$ отображает пару $[\mathbf{T}(\mathbf{X}), \mathbf{S}(\mathbf{X})]$ в $G(\mathbf{X})$, будем обозначать символом $*$, т. е.

$$G(\mathbf{X}) = \mathbf{T}(\mathbf{X}) * \mathbf{S}(\mathbf{X}). \qquad (9.178)$$

Пусть, далее Q — функционал на $\mathscr{T} \times \mathscr{S}$, определяемый равенством

$$Q[\mathbf{T}(\mathbf{X}), \mathbf{S}(\mathbf{X})] = \int_{\mathscr{R}} \mathbf{T}(\mathbf{X}) * \mathbf{S}(\mathbf{X})\, d\mathscr{R}, \qquad (9.179)$$

где интеграл в правой части — интеграл Лебега. Потребуем, чтобы функционал $Q[\mathbf{T}(\mathbf{X}), \mathbf{S}(\mathbf{X})] = Q[\mathbf{T}, \mathbf{S}]$ был билинейным, т. е. чтобы выполнялись равенства

$$\begin{aligned} Q[\alpha\mathbf{T}_1 + \beta\mathbf{T}_2, \mathbf{S}] &= \alpha Q[\mathbf{T}_1, \mathbf{S}] + \beta Q[\mathbf{T}_2, \mathbf{S}], \\ Q[\mathbf{T}, \alpha\mathbf{S}_1 + \beta\mathbf{S}_2] &= \alpha Q[\mathbf{T}, \mathbf{S}_1] + \beta Q[\mathbf{T}, \mathbf{S}_2], \end{aligned} \qquad (9.180)$$

---

[1]) См. Оден [1969а, 1971а]; дальнейшие обобщения см. у Одена и Редди [1973].

где α и β — скаляры. Значит, при фиксированном $\mathbf{S}(\mathbf{X})$ формула (9.179) определяет линейный функционал на $\mathscr{T}$. Совокупность всех таких линейных функционалов образует сопряженное пространство к $\mathscr{T}$. Будем называть $\mathbf{S}(\mathbf{X})$ и $\mathbf{T}(\mathbf{X})$ сопряженными относительно Q.

Нас будет интересовать следующая задача: при заданной конечноэлементной аппроксимации $\overline{\mathbf{T}}(\mathbf{X})$ функции $\mathbf{T}(\mathbf{X})$ найти соответствующую модель $\mathbf{S}(\mathbf{X})$, согласующуюся с (9.179). Значение термина «согласующаяся» станет ясным позднее.

Для решения этой задачи рассмотрим типичный конечный элемент r_e аппроксимации $\overline{\mathscr{R}}$ области $\mathscr{R}$, ограничениями полей $\mathbf{T}(\mathbf{X})$ и $\mathbf{S}(\mathbf{X})$ на которой являются соответственно $\mathbf{t}_{(e)}(\mathbf{x})$ и $\mathbf{s}_{(e)}(\mathbf{x})$. Локально, положим

$$q^{(e)}[\mathbf{t}, \mathbf{s}] = \int_{r_e} \mathbf{t}_{(e)}(\mathbf{x}) * \mathbf{s}_{(e)}(\mathbf{x})\, dr_e. \tag{9.181}$$

В конечноэлементной модели локальные аппроксимации поля $\mathbf{T}(\mathbf{X})$ имеют вид

$$\mathbf{t}^{(e)}(\mathbf{x}) \approx \bar{\mathbf{t}}^{(e)}(\mathbf{x}) = \mathbf{t}^{N}_{(e)}\psi^{(e)}_{N}(\mathbf{x}), \qquad \mathbf{x} \in r_e, \tag{9.182}$$

так что вместо (9.181) имеем

$$q^{(e)} \approx \bar{q}^{(e)} = \mathbf{t}^{N}_{(e)} * s^{(e)}_{N}, \qquad N = 1, 2, \ldots, N_e, \tag{9.183}$$

где

$$s^{(e)}_{N} = \int_{r_e} \psi^{(e)}_{N}(\mathbf{x})\, \mathbf{s}_{(e)}(\mathbf{x})\, dr_e. \tag{9.184}$$

Величины $\mathbf{s}^{(e)}_{N}$ ($e = 1, 2, \ldots, E$; $N = 1, 2, \ldots, N_e$) назовем *локальными обобщенными значениями* функции $\mathbf{S}(\mathbf{X})$ в узле N элемента e, *согласующимися*[1]) с аппроксимацией $\bar{\mathbf{t}}_{(e)}(\mathbf{x})$ и функционалом Q.

Глобально положим

$$Q \approx \bar{Q} = \int_{\overline{\mathscr{R}}} \overline{\mathbf{T}}(\mathbf{X}) * \mathbf{S}(\mathbf{X})\, d\mathscr{R} = \sum_{e=1}^{E} \bar{q}^{(e)}, \tag{9.185}$$

где

$$\overline{\mathbf{T}}(\mathbf{X}) = \mathbf{T}^{\Delta}\Phi_{\Delta}(\mathbf{X}) = \mathbf{T}^{\Delta} \sum_{e=1}^{E} \overset{(e)}{\Omega}{}^{N}_{\Delta}\psi^{(e)}_{N}(\mathbf{x}). \tag{9.186}$$

---

[1]) Термин «согласующийся» применительно к конечноэлементным аппроксимациям был введен Арчером [1963, 1965] в связи с аппроксимациями распределений сил и масс по методу конечных элементов.

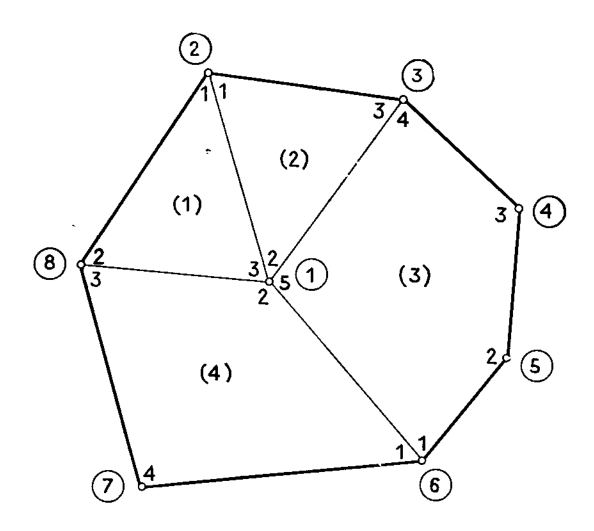


Рис. 9.1. Совокупность конечных элементов.

Далее, можно написать

$$\overline{Q} = \mathbf{T}^{\Delta} * \mathbf{S}_{\Delta}, \qquad \Delta = 1, 2, \ldots, G, \tag{9.187}$$

где $\mathbf{S}_{\Delta}$ — *глобальное обобщенное значение* $\mathbf{S}(\mathbf{X})$ *в узле* $\mathbf{X}^{\Delta}$:

$$\mathbf{S}_{\Delta} = \int_{\mathscr{R}} \Phi_{\Delta}(\mathbf{X})\, \mathbf{S}(\mathbf{X})\, d\mathscr{R} = \sum_{e=1}^{E} \overset{(e)}{\Omega}{}^{N}_{\Delta} \int_{r_e} \psi^{(e)}_{N}(\mathbf{x})\, \mathbf{s}_{(e)}(\mathbf{x})\, dr_e \tag{9.188}$$

Из (9.184) и (9.188) видно, что

$$\mathbf{S}_{\Delta} = \sum_{e} \overset{(e)}{\Omega}{}^{N}_{\Delta} \mathbf{s}^{(e)}_{N}. \tag{9.189}$$

Таким образом, в противоположность простому отношению инцидентности $\mathbf{t}^{N}_{(e)} = \overset{(e)}{\Omega}{}^{N}_{\Delta} \mathbf{T}^{\Delta}$ между локальными и глобальными значениями $\mathbf{T}(\mathbf{x})$, *глобальное значение* $\mathbf{S}_{\Delta}$ *сопряженного поля в узловой точке* Δ *связанной модели равно сумме локальных значений* $\mathbf{s}^{(e)}_{N}$ *во всех элементах, связанных в* Δ, *причем узлы* N *этих элементов, значения в которых являются слагаемыми суммы, инцидентны узлу* Δ.

Например, в глобальной узловой точке 1 двумерной связки конечных элементов (рис. 9.1)

$$\mathbf{T}^{1} = \mathbf{t}^{3}_{(1)} = \mathbf{t}^{2}_{(2)} = \mathbf{t}^{5}_{(3)} = \mathbf{t}^{2}_{(4)}. \tag{9.190}$$

Однако для сопряженного поля

$$\mathbf{S}_1 = \mathbf{s}_3^{(1)} + \mathbf{s}_2^{(2)} + \mathbf{s}_5^{(3)} + \mathbf{s}_2^{(4)}. \tag{9.191}$$

Отметим, что

$$\overline{Q} = \mathbf{T}^{\Delta} * \mathbf{S}_{\Delta} = \sum_e t_{(e)}^N * \mathbf{s}_N^{(e)}. \tag{9.192}$$

Важно иметь в виду, что

$$\mathbf{T}^{\Delta} = \overline{\mathbf{T}}(X^{\Delta}), \quad \text{но} \quad \mathbf{S}_{\Delta} \neq \mathbf{S}(\mathbf{X}^{\Delta}). \tag{9.193}$$

Сопряженная аппроксимация в $\overline{\mathscr{R}}$ описывается более сложными формулами:

$$\mathbf{S}(\mathbf{X}) \approx \mathbf{S}_{\Delta}\Phi^{\Delta}(\mathbf{X}) = \sum_{e=1}^{E} \bar{\mathbf{s}}^{(e)}(\mathbf{x}), \tag{9.194}$$

$$\bar{\mathbf{s}}^{(e)}(\mathbf{x}) = \mathbf{s}_N^{(e)}\psi_{(e)}^N(\mathbf{x}), \qquad \psi_{(e)}^N(\mathbf{x}) = \overset{(e)}{\Omega}{}_{\Delta}^N C^{\Delta\Gamma} \sum_f \overset{(f)}{\Omega}{}_{\Gamma}^M \psi_M^{(f)}(\mathbf{x}). \tag{9.195}$$

9.8. ПРИМЕРЫ

Для лучшего уяснения изложенных идей приведем несколько примеров, в которых используются сопряженные аппроксимации.

Пример 9.1. Механическая работа. Начнем с простого примера, в котором используется элементарное понятие работы. Рассмотрим два векторных поля $\mathbf{U}(\mathbf{X})$ и $\mathbf{F}(\mathbf{X})$, определенных в области $\mathscr{R}$ пространства $\mathscr{E}^3$. Если $\mathbf{U}(\mathbf{X})$ — то поле, которое аппроксимируется, то

$$\overline{\mathbf{U}}(\mathbf{x}) = \sum_e \bar{\mathbf{u}}_{(e)}(\mathbf{x}) = \sum_e^E \overset{(e)}{\Omega}{}_{\Delta}^N \psi_N^{(e)}(\mathbf{x})\,\mathbf{U}^{\Delta}. \tag{9.196}$$

Пусть векторная функция $\mathbf{U}(\mathbf{X})$ описывает поле перемещений некоторого непрерывного тела, а $\mathbf{F}(\mathbf{X})$ — поле действующих на тело сил. Тогда $\overline{q}^{(e)}$ — работа локального поля сил $\mathbf{f}^{(e)}(\mathbf{x})$ на перемещениях $\bar{\mathbf{u}}_{(e)}(\mathbf{x})$, а $*$ означает обычное скалярное произведение векторов ($* = \cdot$):

$$\overline{q}^{(e)} = \int_{r_e} \bar{\mathbf{u}}_{(e)} \cdot \mathbf{f}^{(e)}\, dr_e = \mathbf{u}_{(e)}^N \cdot \mathbf{f}_N^{(e)}. \tag{9.197}$$

Здесь $\mathbf{f}_N^{(e)}$ — согласующаяся обобщенная сила в узловой точке N:

$$\mathbf{f}_N^{(e)} = \int_{r_e} \mathbf{f}^{(e)}(\mathbf{x})\,\psi_N^{(e)}(\mathbf{x})\,dr_e. \tag{9.198}$$

Наконец, глобальные значения узловых сил получаются в результате векторного сложения всех локальных узловых сил в узлах связанной модели:

$$\mathbf{F}_{\Delta} = \sum_e \overset{(e)}{\Omega}{}_{\Delta}^N \mathbf{f}_N^{(e)}. \tag{9.199}$$

Функционал $\overline{Q}$ в этом случае представляет собой полную работу узловых сил $\mathbf{F}_{\Delta}$ на соответствующих перемещениях узлов $\mathbf{U}^{\Delta}$:

$$\overline{Q} = \mathbf{U}^{\Delta} \cdot \mathbf{F}_{\Delta} = \sum_e \mathbf{u}_{(e)}^N \cdot \mathbf{f}_N^{(e)}. \tag{9.200}$$

Пример 9.2. Вычисление напряжений. Чтобы продемонстрировать значение сопряженных функций $\psi^{N}_{(e)}(x)$, приведем простой пример [1]), относящийся к расчету напряжений в модели, основанной на аппроксимации поля перемещений.

Рассмотрим неоднородный стержень, напряжения $\sigma(x)$ в котором определяются формулой

$$\sigma(x)=k(x)\frac{du(x)}{dx}. \tag{9.201}$$

Здесь $u(x)$ — поле перемещений, а модуль $k(x)$ считается линейной функцией:

$$k(x)=k_0(1+x), \tag{9.202}$$

где k_0 — константа, характеризующая материал стержня.

Для простоты воспользуемся довольно грубым конечноэлементным представлением, в котором фигурируют лишь три одномерных элемента единичной длины. Локальные базисные функции $\psi^{(e)}_{N}(x)$, соответствующие типичному элементу e, возьмем линейными относительно локальной координаты ξ:

$$\psi^{(e)}_{1}(\xi)=1-\xi, \qquad \psi^{(e)}_{2}(\xi)=\xi. \tag{9.203}$$

Локальные фундаментальные матрицы таковы:

$$c^{(e)}_{NM}=\langle\psi^{(e)}_{N},\ \psi^{(e)}_{M}\rangle=\frac{1}{6}\begin{bmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{bmatrix}. \tag{9.204}$$

Определяя путем сопоставления узлов операторы инцидентности $\overset{(e)}{\Omega}{}^{N}_{\Delta}$ и подставляя (9.204) в (9.142), получаем

$$C_{\Delta\Gamma}=\frac{1}{6}\begin{bmatrix}2 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 4 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 4 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 2\end{bmatrix} \quad \text{и} \quad C^{\Delta\Gamma}=\frac{6}{45}\begin{bmatrix}26 & -7 & 2 & -1\\ -7 & 14 & -4 & 2\\ 2 & -4 & 14 & -7\\ -1 & 2 & -7 & 26\end{bmatrix} \tag{9.205}$$

С помощью (9.155) теперь можно определить сопряженные базисные функции:

$$\begin{aligned}
\psi^{1}_{(1)}(x)&=\frac{6}{45}\{26\psi^{(1)}_{1}(x)-7[\psi^{(1)}_{2}(x)+\psi^{(2)}_{1}(x)]+2[\psi^{(2)}_{2}(x)+\psi^{(3)}_{1}(x)]-\psi^{(3)}_{2}(x)\},\\
\psi^{2}_{(1)}(x)&=\psi^{1}_{(2)}(x)=\\
&=\frac{6}{45}\{-7\psi^{(1)}_{1}(x)+14[\psi^{(1)}_{2}(x)+\psi^{(2)}_{1}(x)]-4[\psi^{(2)}_{2}(x)+\psi^{(3)}_{1}(x)]+2\psi^{(3)}_{2}(x)\},\\
\psi^{2}_{(2)}(x)&=\psi^{1}_{(3)}(x)=\\
&=\frac{6}{45}\{2\psi^{(1)}_{1}(x)-4[\psi^{(1)}_{2}(x)+\psi^{(2)}_{1}(x)]+14[\psi^{(2)}_{2}(x)+\psi^{(3)}_{1}(x)]-7\psi^{(3)}_{2}(x)\},\\
\psi^{2}_{(3)}(x)&=\frac{6}{45}\{-\psi^{(1)}_{1}(x)+2[\psi^{(1)}_{2}(x)+\psi^{(2)}_{1}(x)]-7[\psi^{(2)}_{2}(x)+\psi^{(3)}_{1}(x)]+26\psi^{(3)}_{2}(x)\}.
\end{aligned} \tag{9.206}$$

Функции $\psi^{(e)}_{N}(x)$ и $\psi^{N}_{(e)}(x)$ изображены на рис. 9.2.

---

[1]) См. Оден и Браули [1971а].

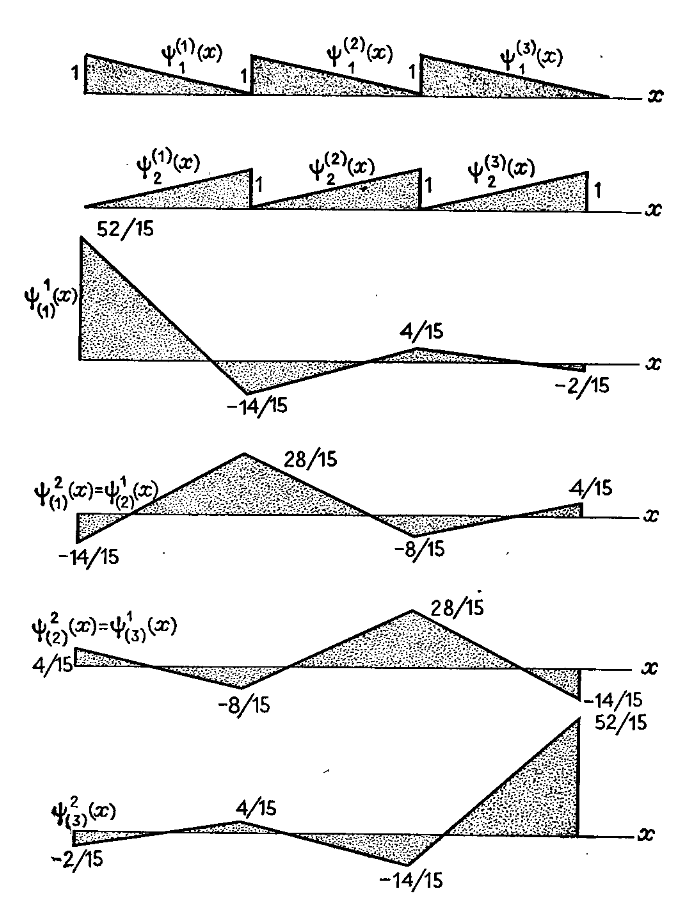


Рис. 9.2. Локальные базисные функции $\psi_N^{(e)}(x)$ и сопряженные базисные функции $\psi_{(e)}^N(x)$.

Предположим теперь, что поле перемещений стержня описывается квадратичной функцией:

$$u(x)=\alpha\left[1-\left(\frac{x}{3}\right)^2\right], \tag{9.207}$$

где α — малая постоянная. Ясно, что точное распределение напряжений дается формулой

$$\sigma(x)=\frac{-2\alpha k_0}{9}x(1+x). \tag{9.208}$$

Однако при конечноэлементном представлении поле перемещений кусочно-линейно:

$$U(x)=\frac{\alpha}{9}[9\Phi_1(x)+8\Phi_2(x)+5\Phi_3(x)], \tag{9.209}$$

$$\Phi_1(x)=\psi_1^{(1)}(x),\quad \Phi_2(x)=\psi_2^{(1)}(x)+\psi_1^{(2)}(x),\quad \Phi_3(x)=\psi_2^{(2)}(x)+\psi_1^{(3)}(x). \tag{9.210}$$

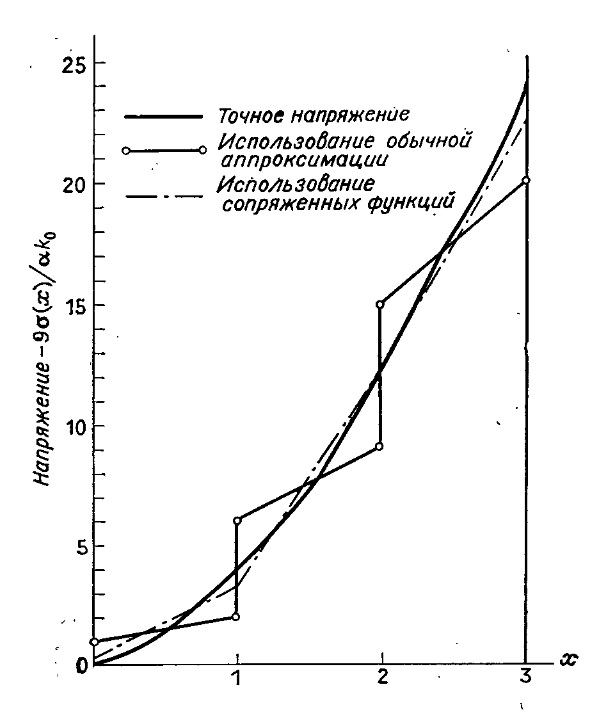


Рис. 9.3. Сравнение распределения напряжений, подсчитанного обычным способом, с распределением напряжений, определенным с помощью сопряженных аппроксимаций.

При обычном подсчете напряжений в конечных элементах соотношение (9.209) просто подставляется в уравнение состояния (9.201) для каждого элемента. В результате получается разрывное распределение напряжений. Напряжения претерпевают конечные разрывы в местах соединений элементов (рис. 9.3). Таким путем максимальное напряжение вычисляется с ошибкой в 16.7%.

Совершенно другое распределение напряжений получается при использовании сопряженных аппроксимаций. Если предположить, что $k(x)\,du/dx \in \Phi$, по крайней мере приближенно, то энергия деформации определяет линейный функционал на $\mathscr{R}$ и задает $\sigma(x)$ как элемент сопряженного пространства Φ^*. Таким образом, $\sigma(x)$ следует представить в виде линейной комбинации сопряженных базисных функций. Подстановка (9.209) в (9.201), как и раньше, дает локальное поле напряжений $\sigma^{(e)}(x)$ для каждого элемента. Сопряженные узловые) компоненты $\sigma_N^{(e)}$ вычисляются с помощью (9.151):

$$\sigma_N^{(e)} = \langle \sigma(x),\ \psi_N^{(e)}(x) \rangle. \tag{9.211}$$

Значит, представление $\sigma(x)$ через сопряженные функции имеет вид

$$\sigma(x) = \sum_{e=1}^{3} \sigma_N^{(e)} \psi_{(e)}^N(x), \qquad N=1,\ 2. \tag{9.212}$$

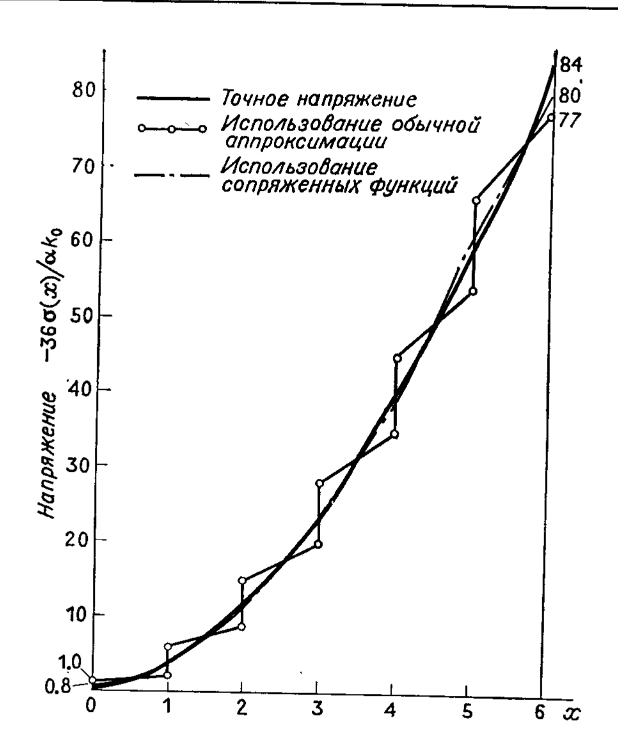


Рис. 9.4. Распределение напряжений при шестиэлементной аппроксимации.

На рис. 9.3 показана эпюра этих напряжений вместе с точным решением и с эпюрой напряжений, подсчитанных обычным способом. Видно, что использование сопряженно-аппроксимационных функций позволяет получить непрерывную в местах соединения элементов эпюру и вычислить максимальное напряжение с ошибкой менее 6.5%.

На рис. 9.4 показаны результаты подобных вычислений при использовании шести элементов и при $u(x) = \alpha(1 - x^2/36)$. Хотя осредненные величины «обычных» напряжений во внутренних узлах более точны, «сопряженные» напряжения дают меньшее среднеквадратичное отклонение и, как видно из рисунка, лучше описывают изменение напряжения в районе максимума.

Пример 9.3. Двумерные сопряженно-аппроксимационные функции. Описанный выше метод может быть использован и в случае двумерных и трехмерных конечных элементов. В этом примере мы кратко опишем способ построения сопряженно-аппроксимационных функций, соответствующих двумерной совокупности треугольных конечных элементов.

Рассмотрим треугольный элемент в плоскости x_1, x_2, вершины которого служат локальными узловыми точками. Локальные интерполяционные функции $\psi_N^{(e)}(\mathrm{x})$, где $\mathrm{x} = (x_1, x_2)$, являются линейными функциями от x_1 и x_2 и удовлетворяют условию $\psi_N^{(e)}(\mathrm{x}^M) = \delta_N^M$; $M, N = 1, 2, 3$. Подставляя

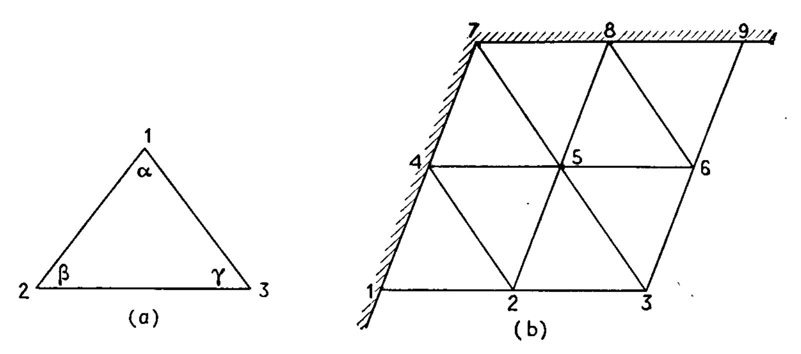


Рис. 9.5. Двумерная сетка треугольных элементов.

их в (9.145), получаем локальные компоненты фундаментальной матрицы $C_{\Gamma\Delta}$:

$$c_{NM}^{(e)} = \int\limits_A \psi_N^{(e)}(\mathbf{x})\, \psi_M^{(e)}(\mathbf{x})\, dA = \frac{A}{12} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \tag{9.213}$$

где A — площадь треугольника. Заметим, что матрица (9.213) не зависит от величин углов α, β, γ нашего треугольника. Однако дискретные модели различных дифференциальных операторов могут зависеть от них; например, для показанного на рис. 9.5a треугольника

$$d_{NM}^{(e)} = \int\limits_A \operatorname{grad} \psi_N^{(e)}(\mathbf{x}) \operatorname{grad} \psi_M^{(e)}(\mathbf{x})\, dA =$$

$$= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \operatorname{ctg}\beta + \operatorname{ctg}\gamma & -\operatorname{ctg}\gamma & -\operatorname{ctg}\beta \\ -\operatorname{ctg}\gamma & \operatorname{ctg}\gamma + \operatorname{ctg}\alpha & -\operatorname{ctg}\alpha \\ -\operatorname{ctg}\beta & -\operatorname{ctg}\alpha & \operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta \end{pmatrix} \tag{9.214}$$

Чтобы продемонстрировать особенности сопряженно-аппроксимационных функций для какого-либо конкретного конечноэлементного представления, рассмотрим модель, изображенную на рис. 9.5b. В этом случае в силу (9.142) имеем

$$G_{\Gamma\Delta} = \langle \Phi_\Delta, \Phi_\Gamma \rangle = \frac{A}{12} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 6 & 1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & 4 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ & & & 6 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ & & & & 12 & 2 & 2 & 2 & 0 \\ \text{симмет-} & & & & & 6 & 0 & 2 & 1 \\ \text{рично} & & & & & & 4 & 1 & 0 \\ & & & & & & & 6 & 1 \\ & & & & & & & & 2 \end{bmatrix}, \tag{9.215}$$

где A — площадь элемента. Обращая эту матрицу и используя (9.148), получаем сопряженно-аппроксимационные функции $\Phi^\Delta(\mathbf{X})$. Поскольку в рассматриваемом примере функции $\Phi_\Delta(\mathbf{X})$ кусочно-линейны, функции

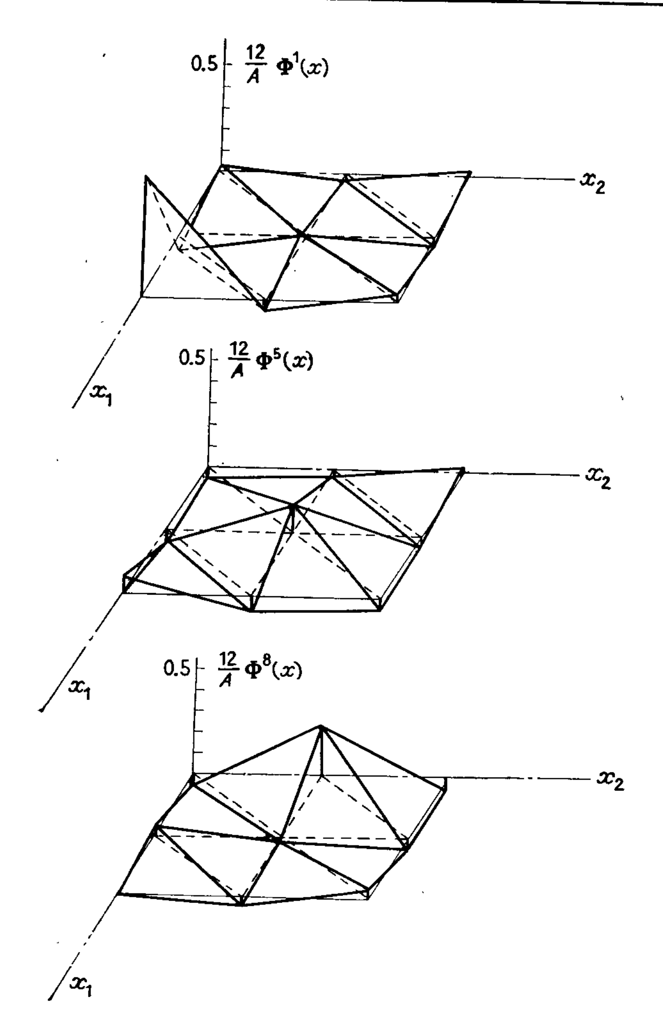


Рис. 9.6. Характерные примеры сопряженных функций.

$\Phi^\Delta(\mathbf{X})$ также кусочно-линейны, и поэтому достаточно просто вычислить значения сопряженных функций в каждом узле. Не выписывая этих функций полностью, приведем характерные примеры узловых значений:

$$\Phi^1(\mathbf{X}^\Delta)=\frac{12}{A}(0.580,\ -0.080,\ 0.009,\ -0.080,\ 0.027,\ -0.009,\ 0.009,\ -0.009,\ 0.009),$$

$$\Phi^5(\mathbf{X}^\Delta)=\frac{12}{A}(0.027,\ -0.027,\ -0.045,\ -0.027,\ 0.116,\ -0.027,\ -0.045,\ -0.027,\ 0.027), \qquad (9.216)$$

$$\Phi^8(X^\Delta)=\frac{12}{A}(-0.009,\ 0.000,\ 0.027,\ 0.018,\ -0.027,\ -0.054,\ -0.045,\ 0.214,\ -0.080).$$

Эти функции показаны на рис. 9.6.

Заметим, что в общем случае двумерной кусочно-линейной аппроксимации глобальная аппроксимационная функция $\Phi_\Delta(X)$ является «пирамидальной», как показано на рис. 9.7,*a*. Она достигает максимального значения в узловой точке Δ и обращается в нуль в элементах, не содержащих узла Δ. Сопряженно-аппроксимационная функция $\Phi^\Delta(X)$ также имеет максимальное значение в узловой точке Δ, но она принимает ненулевые значения во всех элементах рассматриваемой области (рис. 9.7,*b*).

Пример 9.4. Кусочно-линейные аппроксимационные функции одной переменной. В качестве доведенного до конца со всеми подробностями и в то же время простого примера проиллюстрируем предыдущие рассуждения, подробно рассмотрев кусочно-линейные аппроксимационные функции, возникающие при делении интервала I на $G-1$ равных подынтервалов длины h при условии, что $\Phi_\Delta(x)$ обращается в нуль во всех узлах, кроме узла $x_\Delta = h\Delta$ (рис. 9.8). В этом случае

$$M_1=M_G=\int_{\mathscr{R}}\Phi_1\,d\mathscr{R}=\frac{h}{2},\qquad M_\Delta=\int_{\mathscr{R}}\Phi_\Delta\,d\mathscr{R}=h,$$

где $\Delta = 2, \ldots, G-1$; $d\mathscr{R} = dx$, а фундаментальная матрица имеет вид

$$C_{\Delta\Gamma}=\int_{\mathscr{R}}\Phi_\Delta\Phi_\Gamma dx=\frac{h}{6}\begin{bmatrix}2&1&0&\ldots&0\\1&4&1&\ldots&0\\0&1&4&\ldots&0\\ \cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot\\0&\ldots&4&1&0\\0&\ldots&1&4&1\\0&\ldots&0&1&2\end{bmatrix}. \tag{9.217}$$

Пусть A_n обозначает определитель n-го порядка

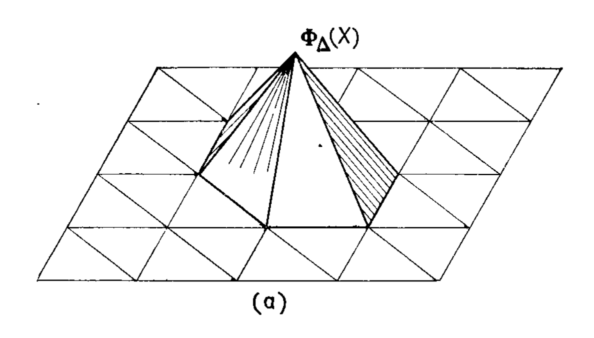
$$A_n=\begin{vmatrix}4&1&0&\ldots&0&0&0\\1&4&1&\ldots&0&0&0\\0&1&4&\ldots&0&0&0\\ \cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot\\0&0&0&\ldots&4&1&0\\0&0&0&\ldots&1&4&1\\0&0&0&\ldots&0&1&4\end{vmatrix}. \tag{9.218}$$

Эти определители удовлетворяют рекуррентному соотношению

$$A_{n+1}-4A_n+A_{n-1}=0. \tag{9.219}$$

Поскольку определители

$$B_n=\begin{vmatrix}2&1&0&\ldots&0&0\\1&4&1&\ldots&0&0\\0&1&4&\ldots&0&0\\ \cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot\\0&0&0&\ldots&4&1\\0&0&0&\ldots&1&4\end{vmatrix}\quad\text{и}\quad C_n=\begin{vmatrix}2&1&0&\ldots&0&0\\1&4&1&\ldots&0&0\\0&1&4&\ldots&0&0\\ \cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot\\0&0&0&\ldots&4&1\\0&0&0&\ldots&1&2\end{vmatrix} \tag{9.220}$$



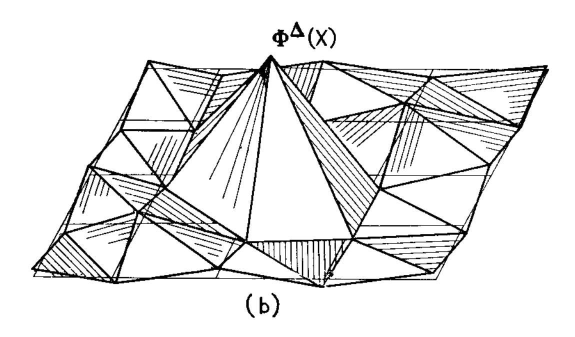


Рис. 9.7. Кусочно-линейная глобальная аппроксимационная функция двух переменных Φ_Δ (**X**) и сопряженная функция Φ^Δ(**X**).

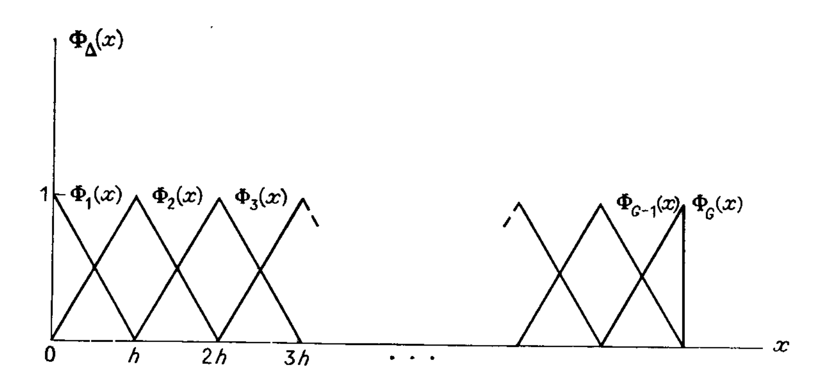


Рис. 9.8. Базисные функции Φ_Δ (x) для конечноэлементного представления отрезка действительной оси.

являются линейными комбинациями A_k, а именно

$$B_n = 2A_{n-1} - A_{n-2} = A_n - 2A_{n-1}, \qquad (9.221)$$

$$C_n = B_n - 2B_{n-1} = 3A_{n-2}, \qquad (9.222)$$

то они тоже удовлетворяют соотношению (9.219). Рекуррентное соотношение (9.219) допускает два независимых решения в виде членов геометрической прогрессии $a_k = \alpha^k$, $b_k = \alpha^{-k}$, где $\alpha = 2 + \sqrt{3} = 3.732050808$ и $\alpha^{-1} = 2 - \sqrt{3} = 0.267949191$ удовлетворяют квадратному уравнению

$$\alpha^2 - 4\alpha + 1 = 0. \qquad (9.223)$$

Определители A_k и B_k представляются в виде линейных комбинаций α^k и α^{-k}:

$$A_k = \gamma\,(\alpha^k - \alpha^{-k-2}), \qquad B_k = 1/2\,(\alpha^k + \alpha^{-k}), \qquad (9.224)$$

где $\gamma = \alpha/(\alpha - \alpha^{-1}) = 1.077350269$. Начальные члены последовательностей A_k, B_k приведены в табл. 9.1, при составлении которой использовано соотношение

$$\Delta^2 A_k = A_{k+1} - 2A_k + A_{k-1} = 2A_k. \qquad (9.225)$$

Теперь ожно найти матрицу, обратную к фундаментальной матрице:

$$C^{\Delta\Gamma} = (-1)^{\Delta+\Gamma}\,\frac{2}{h}\,B_{\Delta-1}\,\frac{B_{G-\Gamma}}{B_{G-2}}, \qquad \Delta \leqslant \Gamma; \qquad (9.226)$$

при $\Delta > \Gamma$ элементы матрицы находятся из условия симметрии $C^{\Delta\Gamma} = C^{\Gamma\Delta}$. Для примера выпишем матрицу при $G = 7$:

$$C^{\Delta\Gamma} = \frac{1}{390h}\begin{bmatrix} 1{,}351 & -362 & -7 & -26 & 7 & -2 & 1 \\ -362 & 724 & -194 & 52 & -14 & 4 & -2 \\ 97 & -194 & 679 & -182 & 49 & -14 & 7 \\ -26 & 52 & -182 & 676 & -182 & 52 & -26 \\ 7 & -14 & 49 & -182 & 679 & -194 & 97 \\ -2 & 4 & -14 & 52 & -194 & 724 & -362 \\ 1 & -2 & 7 & -26 & 97 & -362 & 1{,}351 \end{bmatrix}. \qquad (9.227)$$

Соответствующие сопряженные функции показаны на рис. 9.9.

Таблица 9.1

k	A_k	ΔA_k	$\Delta^2 A_k$	B_k	ΔB_k	$\Delta^2 B_k$
−2	−1			7		
		1			−5	
−1	0		0	2		4
		1			−1	
0	1		2	1		2
		3			1	
1	4		8	2		4
		11			5	
2	15		30	7		14
		41			19	
3	56		112	26		52
		153			71	
4	209			97		

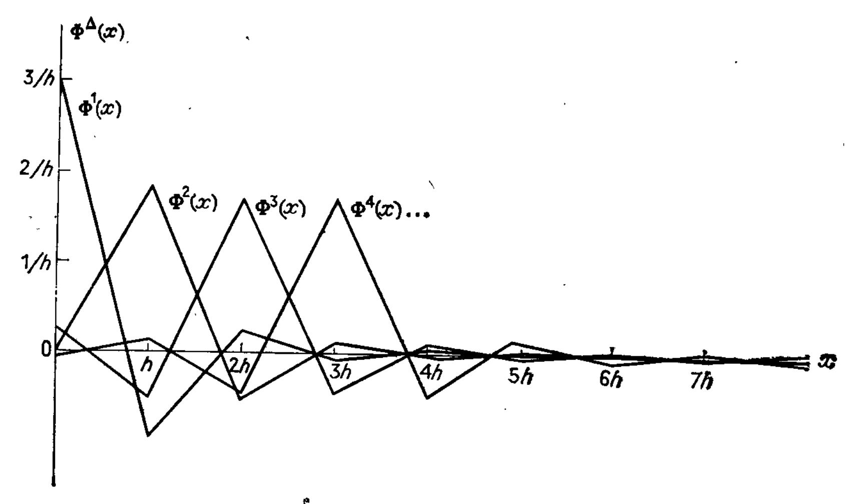


Рис. 9.9. Сопряженные функции, соответствующие базисным функциям, изображенным на рис. 9.8.

В качестве проверки можно вычислить, насколько точно выполняется равенство

$$M^{\Delta} = M_{\Gamma} C^{\Delta\Gamma} = 1 = \int_{\mathcal{R}} \Phi^{\Delta}(x)\, dx.$$

С учетом (9.224) формула (9.226) принимает вид

$$C^{\Delta\Gamma} = (-1)^{\Delta+\Gamma} \frac{\sqrt{3}}{h} \frac{(\alpha^{\Delta} + \alpha^{-\Delta+2})(\alpha^{G-\Gamma} + \alpha^{-G+\Gamma})}{\alpha^{G} - \alpha^{-G+2}}, \qquad \Delta \leqslant \Gamma. \tag{9.228}$$

В пределе при $G \to \infty$ для $\Delta \approx \Gamma \approx G/2$ имеем

$$C^{\Delta\Gamma} \approx (-1)^{|\Delta-\Gamma|} \frac{\sqrt{3}}{h} \alpha^{-|\Delta-\Gamma|} \quad \text{для любых } \Delta,\ \Gamma, \tag{9.229}$$

или

$$C^{\Delta\Gamma} \approx \frac{\sqrt{3}}{h} \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & -\alpha^{-1} & \alpha^{-2} & -\alpha^{-3} & \dots & & \\ -\alpha^{-1} & 1 & -\alpha^{-1} & \alpha^{-2} & -\alpha^{-3} & & \\ \dots & -\alpha^{-1} & 1 & -\alpha^{-1} & \alpha^{-2} & & \\ \dots & \dots & -\alpha^{-1} & 1 & -\alpha^{-1} & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix}. \tag{9.230}$$

Рассмотрим приближенные выражения для производных от функций, соответствующих изображенным на рис. 9.8 кусочно-линейным базисным функциям. Поскольку производные $\partial\Phi_{\Delta}(x)$ разрывны, очевидно, что условие перестановочности $\partial\Pi = \Pi\partial$ (см. теорему 9.1) не выполняется. Все же имеет

смысл ввести матрицы $D_{\Delta\Gamma}$ и $B_{\Delta\Gamma}$ в соответствии с формулами (9.122) и (9.124):

$$D_{\Delta\Gamma}=\int\limits_{\mathcal{R}} \Phi_\Delta\, \partial\Phi_\Gamma\, dx, \qquad B_{\Delta\Gamma}=\int\limits_{\mathcal{R}} \partial\Phi_\Delta\, \partial\Phi_\Gamma\, dx. \tag{9.231}$$

Матрица $B_{\Delta\Gamma}$ симметрична, а $D_{\Delta\Gamma}$ почти антисимметрична, так как

$$\int\limits_{\mathcal{R}} \Phi_\Delta\, \partial\Phi_\Gamma\, dx=-\int\limits_{\mathcal{R}} \Phi_\Gamma\, \partial\Phi_\Delta\, dx \qquad \text{при } 1<\Delta,\ \ \Gamma<G. \tag{9.232}$$

Эти матрицы в явном виде таковы:

$$D_{\Delta\Gamma}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0\\ -1 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$B_{\Delta\Gamma}=\frac{1}{h}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0\\ -1 & 2 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 2 & -1 & \dots & 0 & 0 & 0\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 2 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}. \tag{9.233}$$

Далее,

$$\int\limits_{\mathcal{R}} \partial F\, \partial G\, dx \approx B_{\Delta\Gamma}F^\Delta G^\Gamma \tag{9.234}$$

является достаточно хорошей аппроксимацией, в то время как

$$\partial F \approx D_{\Delta\Gamma}F^\Delta\Phi^\Gamma(x) \tag{9.235}$$

— довольно грубой, что показано на рис. 9.10, где оператор $D_{\Delta\Gamma}$ применен к базисной функции $\Phi_3(x)$. Это объясняет, почему вычисление $B_{\Delta\Gamma}$ через $D_{\Delta\Gamma}$ по формулам (9.116) дает плохую аппроксимацию. С другой стороны, (9.231) свидетельствует о том, что $-B_{\Delta\Gamma}$ можно использовать для вычисления вторых производных:

$$\partial^2 F(x) \approx -B_{\Delta\Gamma}F^\Delta\Phi^\Gamma(x), \tag{9.236}$$

вместо (9.115), (9.117). Действительно,

$$\Pi\partial^2\Phi_\Delta=\Pi\left[\frac{1}{h}\,\delta(x-\Delta h-2h)-\frac{2}{h}\,\delta(x-\Delta h+h)+\frac{1}{h}\,\delta(x-\Delta h)\right]=$$
$$=\frac{1}{h}\left(\Phi^{\Delta-2}-2\Phi^{\Delta-1}+\Phi^\Delta\right), \tag{9.237}$$

а это не что иное как взятый с множителем $1/h$ центральный разностный оператор второго порядка в точке $x=(\Delta-1)\,h$ с шагом h; отсюда следует, что

$$\int\limits_{\mathcal{R}} \Phi_\Delta\partial^2\Phi_\Gamma\, dx=-B_{\Delta\Gamma}. \tag{9.238}$$

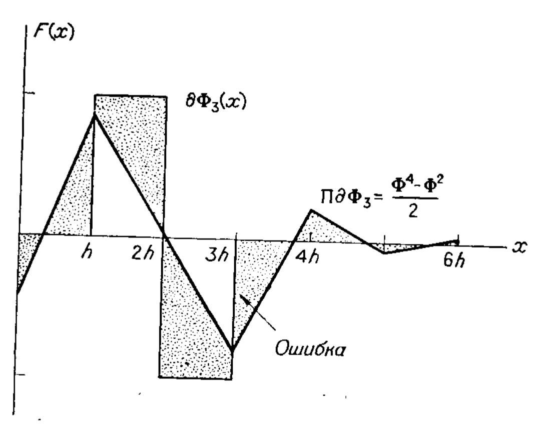


Рис. 9.10. Проекция производной.

Пример 9.5. Полиномы, аналитические функции. Ввиду простоты функций $\Phi_\Delta(x)$, показанных на рис. 9.8, можно получить все явные формулы для компонент аналитической функции $F(x) = \sum a_n x^n$. С тем чтобы упростить вид этих формул, «сдвинем» нумерацию узлов и будем считать, что $\Delta = 0, 1, 2, \ldots, N$, где $N = G - 1$. Рассмотрим интеграл

$$\int_0^h x^n \Phi_\Delta(x)\,dx = \int_0^h (h\Delta + x)^n \left(1 - \frac{x}{h}\right) dx + \int_0^h (\Delta h - x)^n \left(1 - \frac{x}{h}\right) dx. \tag{9.239}$$

Используя тот факт, что

$$1 - \frac{x}{h} = \Delta + 1 - \frac{\Delta h + x}{h} = 1 - \Delta + \frac{\Delta h - x}{h}, \tag{9.240}$$

найдем

$$\int_0^h x^n \Phi_\Delta(x)\,dx = \frac{h^{n+1}}{(n+1)(n+2)} \hat{\Delta}^2 (\Delta)^{n+2}, \qquad 0 < \Delta < N, \tag{9.241}$$

где

$$\hat{\Delta}^2 (\Delta)^{n+2} = (\Delta + 1)^{n+2} - 2(\Delta)^{n+2} + (\Delta - 1)^{n+2}. \tag{9.242}$$

Для граничных элементов

$$\int_0^h x^n \Phi_0(x)\,dx = \begin{cases} 0, & \text{если } n \text{ нечетное}, \\ \dfrac{2h^{n+1}}{(n+1)(n+2)}, & \text{если } n \text{ четное}, \end{cases} \tag{9.243}$$

и

$$\int_0^h x^n \Phi_N(x)\,dx = \frac{h^{n+1}}{(n+1)(n+2)} [(N-1)^{n+2} - N^{n+2} + (n+2) N^{n+1}], \tag{9.244}$$

откуда для больших N

$$\int_0^h x^n \Phi_N(x)\,dx \approx \frac{h^{n+1}}{(n+1)(n+2)}\binom{n+2}{2} N^n. \tag{9.245}$$

Возвращаясь теперь к $F(x) = \sum a_n x^n$, нетрудно видеть, что для конечноэлементных аппроксимаций

$$\sum_n a_n x^n \approx F^\Delta \Phi_\Delta(x) = F_\Delta \Phi^\Delta(x), \tag{9.246}$$

где для наилучшего приближения

$$F_\Delta = C_{\Delta\Gamma} F^\Gamma = \left\langle \Phi_\Delta, \sum_n a_n x^n \right\rangle = \sum_n a_n \langle \Phi_\Delta, x^n \rangle = \sum_n a_n \int_{\mathcal{R}} \Phi_\Delta(x)\, x^n\,dx, \tag{9.247}$$

или

$$F_\Delta = \sum_{e=1}^{N} \sum \left[a_n \overset{(e)}{\Omega}{}^N_\Delta \int_0^h \psi_N^{(e)}(x)\, x^n\,dx \right]. \tag{9.248}$$

Таким образом, получаем

$$F_\Delta = \frac{1}{h}\,\hat{\bar{\Delta}}^2 F^{-2}(h\Delta), \tag{9.249}$$

где

$$F^{-2}(x) = \sum_0^\infty a_n x^{n+2}/(n+1)(n+2)$$

— вторая первообразная для $F(x)$, а оператор $\hat{\Delta}^2$ определяется формулой (9.242). Для граничных элементов

$$F_0 = \frac{1}{h} F^{-2}(h), \quad F_N = F^{-1}(Nh) - \frac{1}{h}\hat{\Delta} F^{-2}(Nh), \tag{9.250}$$

где F^{-1} — первообразная, а $\hat{\Delta}$ — разностный оператор первого порядка. Ясно, что для очень больших N

$$F_\Delta = hF(h\Delta).$$

10. КОНЕЧНЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ И ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫЕ ФУНКЦИИ

При изложении теории конечных элементов до сих пор в основном рассматривались элементы произвольной формы с произвольным числом узловых точек. Локальные аппроксимации $\bar{f}^{(e)}(\mathbf{x})$ на каждом элементе описывались с помощью интерполяционных функций $\psi_N^{(e)}(\mathbf{x})$, точная форма которых за редкими исключениями не указывалась. Однако в практических приложениях теории надо отказываться от этой общности и рассматривать конкретные типы элементов и соответствующих им интерполяционных функций. При построении различных конечноэлементных моделей, как правило, требуют, чтобы отдельные элементы имели достаточно

простую геометрическую форму и чтобы интерполяционные функции тоже были простыми, обычно полиномами. Если к этому добавить, что выбор функций $\psi_N^{(e)}(\mathbf{x})$ должен обеспечивать непрерывность $\bar{F}(\mathbf{x})$ на межэлементных границах и сходимость $\bar{F}(\mathbf{x})$ к $F(\mathbf{x})$ при уменьшении размеров элементов [1]), то станет ясно, что и на форму допустимых конечных элементов, и на вид интерполяционных функций накладываются довольно серьезные ограничения. В этом параграфе рассматриваются конечноэлементные модели операторных уравнений и вопросы сходимости для широкого класса элементов. Кроме того, приводятся примеры некоторых допустимых конечных элементов и соответствующих им интерполяционных функций.

10.1. ОПЕРАТОРЫ В НОРМИРОВАННЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

Как правило, нам приходится иметь дело с решением задач, сводящихся к уравнениям вида

$$\mathscr{F}(u) = f, \tag{10.1}$$

где $u = u(\mathbf{x})$ — элемент некоторого нормированного линейного пространства $\mathscr{V}$, в общем случае состоящего из функций, задан-

[1]) Синг [1957, стр. 207—213] исследовал сходимость полиэдральных функций, возникающих в результате линейной интерполяции на треугольных областях. Его исследования непосредственно применимы к соответствующим конечноэлементным моделям, но относятся, как и более ранняя работа Куранта [1943], лишь к представлениям первого порядка. Исследования по сплайн-функциям и бикубичной интерполяции Биркгофа и Гарабедяна [1960] и Биркгофа и де Бура [1965] применимы к конечноэлементным аппроксимациям гладких поверхностей; в связи с этим см. также Алберг, Нильсон и Уолш [1967]. Мелош [1963а] получил достаточное условие монотонной сходимости конечноэлементного расчета задач о малых прогибах пластин на основе энергетического подхода, а Вёбеке [1964б, 1965, 1966] исследовал границы применимости различных конечноэлементных решений задач линейной теории упругости. Вопросы сходимости метода конечных элементов для некоторых краевых задач рассматривались Фридрихсом и Келлером [1967], Варгой [1967] и Сиарле, Шульцем и Варгой [1967]. Подробное исследование сходимости конечноэлементных представлений для одного класса линейных операторных уравнений проведено Ки [1966] и Арантесом э Оливейрой [1968, 1969, 1971]. Гибридные модели рассматривались Тонгом и Пайэном [1967], а свойства полноты и сходимости некоторых типов конечноэлементных аппроксимаций изучались Маклеем [1963, 1967], Джонсоном и Маклеем [1968], Данни [1968], Зламалом [1968], Гёлем [1968], Валцем, Фултоном и Сайрусом [1969], Табанде [1970], Брэмблом и Зламалом [1970]. Использование «холмистых функций» для конечноэлементных представлений обсуждается в работе Бабушки [1970], а вопросы устойчивости, погрешности и сходимости некоторых конечноэлементных аппроксимаций исследованы Фиксом и Стрэнгом [1969], Стрэнгом [1970] и Фридом [1971]. Некоторые подробности, относящиеся к критериям сходимости и полноты, изложены в работе Фелиппы и Клафа [1968]. См. также Клаф и Точер [1966], Грин, Джонс, Маклей и Строум [1969], Оден и Браули [1971б], а также Оден [1970в, 1971б].

ных в некоторой открытой области $\mathcal{R}$ k-мерного эвклидова пространства и на ее границе $\partial\mathcal{R}$, а $f = f(\mathbf{x})$ — элемент другого нормированного пространства $\mathcal{U}$ (часто $\mathcal{U} = \mathcal{V}$) и $\mathcal{F}$: $\mathcal{V} \to \mathcal{U}$ — оператор из $\mathcal{V}$ в $\mathcal{U}$; более точно, $\mathcal{F}$ отображает некоторое подмножество $\mathcal{D}$ пространства $\mathcal{V}$, называемое областью определения оператора $\mathcal{F}$, в $\mathcal{U}$. Кроме уравнения (10.1), решение должно удовлетворять некоторым краевым условиям на $\partial\mathcal{R}$.

Большинство методов аппроксимации состоит в построении последовательностей $\{\bar{u}^n\}$ аппроксимаций для u в линейных подпространствах пространства $\mathcal{V}$, сходящихся в некотором смысле к u, так чтобы имела смысл символическая запись:

$$\lim_{n\to\infty} \mathcal{F}(\bar{u}^n) = \mathcal{F}(u).$$

Однако может случиться, что область $\mathcal{D}$ определения оператора $\mathcal{F}$ не содержит элементов $\bar{u}^n$, тогда необходимо расширить область определения оператора $\mathcal{F}$ таким образом, чтобы она принадлежала некоторому полному нормированному пространству (была плотна в нем). Прежде чем развивать эти идеи в связи с конечноэлементными аппроксимациями, напомним ряд основных понятий.

Последовательности Коши и полнота. Рассмотрим вещественное нормированное линейное пространство $\mathcal{V}$, т. е. нормированное линейное пространство, элементы которого можно умножать на вещественные числа. Пусть u обозначает элемент пространства $\mathcal{V}$, а $\| u \|$ — его норму. Если каждому положительному целому числу n поставить в соответствие некоторый элемент $u^n \in \mathcal{V}$, то совокупность $u^1, u^2, \ldots, u^n, \ldots$, записываемая $\{u^n\}$, образует *последовательность* в $\mathcal{V}$. Говорят, что последовательность $\{u^n\}$ в $\mathcal{V}$ имеет предел $u^* \in \mathcal{V}$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует целое число m, такое, что $\| u^n - u^* \| < \varepsilon$ при всех $n > m$. Если это имеет место, то говорят, что последовательность $\{u^n\}$ сходится к пределу u^* по норме $\| u \|$ и пишут $\lim\limits_{n\to\infty} u^n = u^*$ или, более обстоятельно, $\lim\limits_{n\to\infty} \| u^n - u^* \| = 0$.

Последовательность $\{u^n\}$ называется *последовательностью Коши*, если $\lim\limits_{m,\, n\to\infty} \| u^m - u^n \| = 0$, т. е. если для любого $\varepsilon > 0$ существует целое число N, такое, что $\| u^m - u^n \| < \varepsilon$ при всех $m, n > N$. Ясно, что каждая сходящаяся последовательность является последовательностью Коши, поскольку если u^* — предел $\{u^n\}$, то $\| u^m - u^n \| = \| (u^m - u^*) - (u^n - u^*) \| \leqslant \leqslant \| u^m - u^* \| + \| u^n - u^* \| < \varepsilon$, где $\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2$, а $\| u^m - u^* \| < \varepsilon_1$ при $m > N$ и $\| u^n - u^* \| < \varepsilon_2$ при $n > N$. Таким образом, $\| u^m - u^n \| < \varepsilon$ при $m, n > N$. Однако обратное утверждение *неверно*, поскольку может случиться, что после-

довательность $\{u^n\} \in \mathscr{V}$ «сходится» к пределу $u^* \notin \mathscr{V}$. Широко известным примером неполного метрического пространства является пространство рациональных чисел; например, последовательность $\{1, 3/4, 13/15, \ldots\}$ сходится к иррациональному числу $\pi/4$ и, следовательно, не сходится в пространстве рациональных чисел.

Если каждая последовательность Коши элементов нормированного линейного пространства $\mathscr{V}$ сходится к элементу этого пространства, то говорят, что пространство $\mathscr{V}$ *полно*. Полное нормированное пространство называется *банаховым* пространством. Если $\mathscr{V}$ неполно, его всегда можно вложить в некоторое полное пространство $\overline{\mathscr{V}}$, называемое *пополнением* $\mathscr{V}$. Пространство $\overline{\mathscr{V}}$ называется пополнением пространства $\mathscr{V}$, если $\mathscr{V}$ является подпространством в $\overline{\mathscr{V}}$ и всюду плотно в нем. Термин «всюду плотно» означает, что $\overline{\mathscr{V}}$ является замыканием $\mathscr{V}$, т. е. что каждый элемент $\bar{u} \in \overline{\mathscr{V}}$ как угодно близок к некоторому элементу u пространства $\mathscr{V}$ в том смысле, что для любого $\varepsilon > 0$ существует элемент $u \in \mathscr{V}$, такой, что $\| u - \bar{u} \| < \varepsilon$. Для нормированных пространств свойство полноты, конечно, зависит от используемой нормы.

Практически процесс пополнения неполного пространства сводится к добавлению к пространству предельных точек последовательностей Коши этого пространства (конкретнее, можно пополнить пространство, построив классы эквивалентности последовательностей Коши, так что если $\bar{u}$ — класс эквивалентности, то $\bar{u} = \lim\limits_{n \to \infty} u^n$, где $\{u^n\} \in \mathscr{V}$). В качестве важного примера рассмотрим $\mathscr{V} = \mathscr{H}$ — пространство со скалярным произведением, определяемым формулой

$$\langle u, v \rangle = \int_{\mathscr{R}} uv \, d\mathscr{R}, \tag{10.2}$$

где интеграл принимается в смысле Лебега. Здесь u и v — функции, заданные на $\mathscr{R}$ и $\| u \| = \langle u, u \rangle^{1/2} < \infty$. Предположим, что $\mathscr{H}$ состоит из функций $u \in C^0(\mathscr{R})$, т. е. непрерывных на $\mathscr{R}$ функций. В этом случае $\mathscr{H}$ неполно: можно построить последовательность непрерывных функций, сходящуюся к разрывной функции. Известным примером служит последовательность

$$u^n(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2} - \frac{1}{n}, \\ nx + 1 - \frac{n}{2}, & \frac{1}{2} - \frac{1}{n} \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}, \\ 1, & \frac{1}{2} \leqslant x \leqslant 1. \end{cases}$$

Каждый член этой последовательности непрерывен при $x \in [0, 1]$, но она сходится по норме $\| u \| = \langle u, u \rangle^{1/2}$ к разрывной функции скачка $u^*(x) = h(x - {}^1/_2)$. Более того, невозможно сделать $u^*(x)$ непрерывной, изменяя ее значения на множестве меры нуль. Чтобы пополнить $\mathscr{H}$, поставим в соответствие последовательностям $\{u^n\}$, $\{v^n\} \in \mathscr{H}$ предельные точки u^*, v^*, причем под $u^* = v^*$ будем понимать $\lim\limits_{m,\, n \to \infty} \| u^n - v^n \| = 0$. Тогда $\langle u^*, v^* \rangle = \lim\limits_{n \to \infty} \langle u^n, v^n \rangle$ и $\| u^* \| = \lim\limits_{n \to \infty} \| u^n \|$. То что такой процесс пополнения приводит к цели, гарантируется знаменитой теоремой Хана — Банаха [1]): *Всякий непрерывный линейный функционал* (в нашем случае $g(u) = \langle u, v \rangle$), *определенный на линейном подпространстве* $\mathscr{V}'$ *нормированного линейного пространства* $\mathscr{V}$, *можно продолжить на все пространство с сохранением нормы*. Следовательно, в качестве $\| u^* \|$ можно взять ту же самую норму, первоначально определенную лишь на неполном пространстве $\mathscr{H}$. В нашем примере пополнением $\mathscr{H}$ является $L_2(\mathscr{R})$ — пространство квадратично суммируемых функций на $\mathscr{R}$. Пространство $C^0(\mathscr{R})$ плотно в $L_2(\mathscr{R})$, т. е. для любой функции $u^* \in L_2(\mathscr{R})$ можно построить такую последовательность непрерывных функций $u^n \in C^0(\mathscr{R})$, что для любого $\varepsilon > 0$ существует N, удовлетворяющее условию: $\| u^* - u^n \| < \varepsilon$ при $n > N$. Другими словами, любая квадратично интегрируемая функция в $\mathscr{R}$ может быть аппроксимирована непрерывной функцией. Так как по теореме Вейерштрасса о равномерной аппроксимации любая непрерывная функция $u \in C^0(\mathscr{R})$ может быть равномерно аппроксимирована некоторым полиномом p [2]), то для каждого n существует полином p^n, такой, что $| u^n(\mathrm{x}) - p^n(\mathrm{x}) | \leqslant \varepsilon$ $(\varepsilon > 0)$ для всех $\mathrm{x} \in \mathscr{R}$. Отсюда следует, что для ограниченной области $\mathscr{R}$ выполняется неравенство $\| u^n - p^n \| < \varepsilon'$, где ε' зависит от $\mathscr{R}$, так что $\| u^* - p^n \| \leqslant \| u^* - u^n \| + \| u^n - p^n \| < \varepsilon + \varepsilon'$ при $n > N$. Таким образом, любую квадратично суммируемую функцию тоже можно аппроксимировать в среднем полиномом.

Более общим образом, пространство $\mathscr{H}$ можно считать пространством функций $u \in C^r(\mathscr{R})$; т. е. функций, непрерывных в $\bar{\mathscr{R}}$ (или в $\mathscr{R} + \partial\mathscr{R}$) вместе со своими частными производными до порядка r включительно. Тогда если вместо (10.2) положить

$$\langle u, v \rangle = \int\limits_{\mathscr{R}} \left(uv + \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_i\, \partial x_j} \frac{\partial^2 v}{\partial x_i\, \partial x_j} + \ldots \right.$$

$$\left. \ldots + \frac{\partial^r u}{\partial x_{i_1}\, \partial x_{i_2} \ldots \partial x_{i_r}} \frac{\partial^r v}{\partial x_{i_1}\, \partial x_{i_2} \ldots \partial x_{i_r}} \right) d\mathscr{R}, \qquad (10.3)$$

---

[1]) См. Колмогоров и Фомин [1972], стр. 169—170.

[2]) Если область $\mathscr{R}$ ограничена. — *Прим. ред.*

где $(x_1, x_2, \ldots, x_k) = \mathbf{x}$ — точка области $\mathcal{R}$, $i_1 + i_2 + \ldots + i_r = r$, $i \leqslant j$, $i_1 \leqslant i_2 \leqslant \ldots \leqslant i_r$ и $i, j, i_1, i_2, \ldots, i_r = 1, 2, \ldots, k$, то, как легко увидеть, $\mathcal{H}$ неполно в норме $\| u \| = \langle u, u \rangle^{1/2}$. Пополняя $\mathcal{H}$ подобным описанному выше способом, получим пространство, обозначаемое через $L_2^r(\mathcal{R})$ [1]).

Счетная система элементов $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n, \ldots$ нормированного пространства $\mathcal{V}$ называется *полной*, если множество линейных комбинаций элементов этой системы всюду плотно в $\mathcal{V}$, т. е. если, каков бы ни был элемент $u \in \mathcal{V}$, для каждого $\varepsilon > 0$ найдутся такие числа $\alpha_1, \ldots, \alpha_N$ (где N зависит от u и от ε), что

$$\left\| u - \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \varphi_i \right\| < \varepsilon. \tag{10.4}$$

Ясно, что если в пространстве имеется счетная полная система, то оно сепарабельно.

Линейные операторы [2]). Рассмотрим комплексное гильбертово пространство $\mathcal{H}$, элементы которого $u, v, w, \ldots$ — функции, определенные в некоторой области $\mathcal{R}$ пространства $\mathcal{E}^k$. Скалярное произведение в $\mathcal{H}$ опять обозначается через $\langle u, v \rangle$ и опять $\|u\| = \langle u, u \rangle^{1/2}$, но теперь $\langle u, v \rangle = \overline{\langle v, u \rangle}$, где $\overline{\langle v, u \rangle}$ обозначает число, комплексно сопряженное числу $\langle v, u \rangle$. В большинстве приложений элементами $u, v, \ldots \in \mathcal{H}$ являются квадратично суммируемые функции (т. е. $u \in L_2(\mathcal{R})$), так что скалярное произведение $\langle u, v \rangle$ определяется формулой (10.2) с v, замененным на $\bar{v}$.

Рассмотрим оператор $\mathcal{P} \equiv \mathcal{L}$, определенный на некотором плотном (линейном) подпространстве $\mathcal{D}$ пространства $\mathcal{H}$. Будем

---

[1]) Пространство $L_2^r(\mathcal{R})$ состоит из функций, которые не только квадратично суммируемы в $\mathcal{R}$, но и обладают *обобщенными производными* в смысле L_2 всех порядков до r включительно. Под обобщенной производной порядка r в смысле L_2 от функции u понимается интегрируемая функция w, такая, что

$$\int_{\mathcal{R}} u \frac{\partial^r \varphi}{\partial x_{i_1} \ldots \partial x_{i_r}} d\mathcal{R} = (-1)^r \int_{\mathcal{R}} w \varphi \, d\mathcal{R},$$

где φ — любая r раз дифференцируемая функция, которая вместе со всеми своими производными обращается в нуль в некотором пограничном слое области $\mathcal{R}$; таким образом, u может не быть r раз непрерывно дифференцируема в $\mathcal{R}$, но она должна быть квадратично интегрируема. [Пространство, которое состоит из определенных в $\mathcal{R}$ функций с интегрируемой p-й степенью, имеющих обобщенные производные до порядка r включительно, называется *пространством Соболева* $W_p^r(\mathcal{R})$.] Более подробные сведения можно найти у Михлина [1952] или Михлина и Смолицкого [1965].

[2]) Материал этого раздела заимствован в основном из книг Михлина [1952, 1970].

использовать следующие определения [1]), касающиеся оператора $\mathscr{L}$.

Оператор $\mathscr{L}$ называется *линейным*, если он аддитивен и однороден, т. е. если для любых двух элементов $u, v \in \mathscr{D}$ и скаляров α_1, α_2 справедливо равенство $\mathscr{L}(\alpha_1 u + \alpha_2 v) = \alpha_1 \mathscr{L}(u) + \alpha_2 \mathscr{L}(v)$. Отсюда следует, что $\mathscr{L}(0) = 0$.

Оператор $\mathscr{L}$ называется *симметричным*, если для любых двух элементов $u, v \in \mathscr{D}$ имеет место тождество $\langle \mathscr{L}u, v\rangle \equiv \langle u, \mathscr{L}v\rangle$. В нашем случае, когда пространство $\mathscr{H}$ комплексное, для того чтобы оператор $\mathscr{H}$ был симметричным, необходимо и достаточно, чтобы $\langle \mathscr{L}u, u\rangle$ было всегда вещественным. В случае когда $\mathscr{H}$ — вещественное пространство, для того чтобы оператор $\mathscr{L}$ был симметричным, необходимо, чтобы он удовлетворял некоторым дополнительным условиям.

Оператор $\mathscr{L}$ называется *положительно определенным*, если для любой функции $u \in \mathscr{D}$ справедливо неравенство $\langle u, \mathscr{L}u\rangle \geqslant 0$, причем $\langle u, \mathscr{L}u\rangle = 0$ тогда и только тогда, когда $u = 0$; всякий положительно определенный оператор $\mathscr{L}$ симметричен.

Оператор $\mathscr{L}$ называется *ограниченным* с *нижней* и *верхней границами* c_1 и c_2, если для любой функции $u \in \mathscr{D}$ выполнены неравенства $c_1 \| u \| \leqslant \| \mathscr{L}u \| \leqslant c_2 \| u \|$.

Пусть оператор $\mathscr{L}$ ограничен, тогда наименьшая верхняя граница называется *нормой оператора* $\mathscr{L}$ и обозначается через $\| \mathscr{L} \|$. Таким образом, $\| \mathscr{L}u \| \leqslant \| \mathscr{L} \| \| u \|$.

Оператор $\mathscr{L}$ называется *положительно ограниченным снизу*, если существует такая постоянная $\gamma \neq 0$, что $\langle u, \mathscr{L}u \rangle \geqslant \gamma^2 \| u \|^2$ для любой функции $u \in \mathscr{D}$.

Если для каждой последовательности $\{u^n\}$ элементов области $\mathscr{D}$, для которой $\lim\limits_{n\to\infty} \| u^n - u^* \| = 0$, справедливо соотношение $\lim\limits_{n\to\infty} \| \mathscr{L}u^n - \mathscr{L}u^* \| = 0$, то оператор $\mathscr{L}$ *непрерывен* в u^*.

Оператор $\mathscr{M}$ с областью определения $\mathscr{D}_m$ называется *расширением* (или *продолжением*) оператора $\mathscr{L}$ с областью определения $\mathscr{D}_l$, если $\mathscr{D}_l \subset \mathscr{D}_m$ и $\mathscr{M}u = \mathscr{L}u$ для каждого $u \in \mathscr{D}_l$.

Линейный оператор $\mathscr{L}$ на $\mathscr{H}$, значениями которого являются вещественные или комплексные числа, называется *линейным функционалом*. Каждый ограниченный линейный функционал l на $\mathscr{H}$ имеет вид $lu = \langle u, v\rangle$, где v — некоторый единственным образом определяемый элемент $\mathscr{H}$ (строго говоря, v принадлежит сопряженному пространству $\mathscr{H}^*$, т. е. пространству всех линейных непрерывных функционалов на $\mathscr{H}$; но в рассматриваемом случае $\mathscr{H} = \mathscr{H}^*$).

Рассмотрим задачу решения уравнения

$$\mathscr{L}u = f, \tag{10.5}$$

[1]) Некоторые из них уже приводились выше. — *Прим. ред.*

где $\mathcal{L}$ — линейный оператор, определенный на плотном в $\mathcal{H}$ множестве $\mathcal{D}$, а f — заданный элемент $\mathcal{H}$. Помимо уравнения (10.5) имеется еще некоторое краевое условие

$$\mathcal{B}u = g \tag{10.6}$$

на $\partial\mathcal{R}$, где $\mathcal{B}$ — тоже линейный оператор. Сначала рассмотрим случай однородных краевых условий, т. е. случай, когда $g = 0$; тем самым мы пока ограничимся множеством $\mathcal{D}$, элементы которого удовлетворяют условию $\mathcal{B}u = 0$ на $\partial\mathcal{R}$.

Сформулируем три важные теоремы [1]), касающиеся решения уравнения (10.5).

Теорема 10.1 (единственность). *Если оператор $\mathcal{L}$ в уравнении* (10.5) *положительно определен, то это уравнение имеет не более одного решения.*

Доказательство. Доказательство довольно просто. Предположим, что $\mathcal{L}u_1 = \mathcal{L}u_2 = f$. Тогда $u = u_1 - u_2$ удовлетворяет условию $\mathcal{L}u = 0$. Поскольку $\mathcal{L}$ положительно определен, $\langle u, \mathcal{L}u\rangle = 0 \Rightarrow u = 0$. Следовательно, $u_1 = u_2$.

Теорема 10.2. *Пусть $\mathcal{L}$ — положительно определенный линейный оператор, и пусть уравнение* (10.5) *имеет решение u^*. Тогда функционал*

$$J(u) = \langle \mathcal{L}u, u\rangle - \langle u, f\rangle - \langle f, u\rangle \tag{10.7}$$

принимает минимальное значение при $u = u^*$. Обратно, если в области определения $\mathcal{D}$ функционала $\mathcal{L}$ существует функция u^*, реализующая минимум функционала $J(u)$, то u^* является решением уравнения (10.5). (*Здесь пространство $\mathcal{H}$ комплексно.*)

Доказательство. Пусть u^* удовлетворяет условию $\mathcal{L}u^* = f$, и пусть η — произвольный элемент $\mathcal{D}$. Тогда вследствие симметричности $\mathcal{L}$

$$J(u^* + \eta) = J(u^*) + \langle \mathcal{L}u^* - f, \eta\rangle + \langle \eta, \mathcal{L}^*u - f\rangle + \langle \mathcal{L}\eta, \eta\rangle = \\ = J(u^*) + \langle \mathcal{L}\eta, \eta\rangle.$$

Поскольку оператор $\mathcal{L}$ положительно определен, $\langle \mathcal{L}\eta, \eta\rangle \geqslant \geqslant 0$. Следовательно, если v — произвольный элемент из $\mathcal{D}$ вида $v = u^* + \eta$ с $\eta \neq 0$, то

$$J(v) = J(u^*) + \langle \mathcal{L}\eta, \eta\rangle > J(u^*).$$

Поэтому функционал $J(v)$ принимает минимальное значение при $v = u^*$. Это доказывает первую часть теоремы.

[1]) См. Михлин [1970, стр. 86].

Доказательство второй части основывается на том факте, что *всякий элемент* $u \in \mathscr{H}$, *ортогональный ко всем элементам* η *плотного в* $\mathscr{H}$ *множества* $\mathscr{D}$, *равен нулю*. Пусть $\eta \in \mathscr{D}$. Тогда

$$J(u^* + \varepsilon\eta) - J(u^*) \geqslant 0,$$

если u^* реализует минимум функционала $J(u)$. Используя (10.7), можно получить

$$\varepsilon^2 \langle \mathscr{L}\eta, \eta \rangle + 2\varepsilon \operatorname{Re} [\langle \mathscr{L}u^* - f, \eta \rangle] \geqslant 0,$$

что возможно только тогда, когда $\operatorname{Re} [\langle \mathscr{L}u^* - f, \eta \rangle] = 0$, ибо ε может быть здесь любым вещественным числом. Заменив η на $i\eta$, получим $\operatorname{Im} [\langle \mathscr{L}u^* - f, \eta \rangle] = 0$. Следовательно,

$$\langle \mathscr{L}u^* - f, \eta \rangle = 0.$$

Это означает, что элемент $\mathscr{L}u^* - f$ ортогонален ко всем элементам η множества $\mathscr{D}$, плотного в $\mathscr{H}$. Так может быть только в том случае, если $\mathscr{L}u^* = f$, что и доказывает теорему.

К сожалению, эта теорема основывается на некоторых важных предположениях, которые во многих случаях могут быть несправедливыми. Во-первых, мы предполагали, что в $\mathscr{D}$ существует элемент u^*, который удовлетворяет уравнению (10.5) и минимизирует функционал (10.7). На вопрос о существовании элементов, реализующих минимум функционала $J(u)$, ответ частично дается приводимой ниже теоремой, в которой используются понятия энергетической нормы и сходимости по энергии. Кратко поясним их. Новое определение скалярного произведения $[u, v] \equiv \langle \mathscr{L}u, v \rangle$ приводит к новому определению нормы в $\mathscr{D}$, а именно $\| u \|_{\mathscr{L}} = [u, u]^{1/2}$. Эта норма называется *энергетической нормой* или *энергией* элемента u. Если последовательность $\{u^n\} \in \mathscr{D}$ такова, что для любого $\varepsilon > 0$ мы имеем $\| u^n - u \|_{\mathscr{L}} < \varepsilon$ при $n > N$ [1]), то говорят, что $\{u^n\}$ *сходится* к u *по энергии*. Аналогично счетная система элементов $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ называется *полной по энергии*, если эта система полна относительно энергетической нормы.

Легко показать, что если оператор $\mathscr{L}$ положительно ограничен снизу, то сходимость по энергии последовательности $\{u^n\}$ к u^* влечет за собой сходимость в среднем $\{u^n\}$ к u^*. При отыскании элементов u^*, минимизирующих функционал $J(u)$, мы будем требовать, чтобы решение уравнения (10.5) обладало конечной энергией, т. е. чтобы $\| u^* \|_{\mathscr{L}} < \infty$. Условие на оператор $\mathscr{L}$, необходимое для существования элемента u^*, минимизирующего функционал $J(u)$, дается следующей теоремой [2]).

[1]) То есть если эта последовательность сходится к u в энергетической норме. — *Прим. ред.*

[2]) Доказательство ее имеется у Михлина [1970, стр. 89—90]. См. также статью Фридрихса [1934], где впервые рассмотрена эта задача и доказана теорема.

Теорема 10.3 (*существование*). *Пусть $J(u)$ — функционал вида* (10.7). *Элемент u^* с ограниченной энергией, минимизирующий $J(u)$, существует только в том случае, если оператор $\mathscr{L}$ положительно ограничен снизу.*

Однако даже в том случае, когда оператор $\mathscr{L}$ положительно ограничен снизу, может случиться, что $\mathscr{D}$ не содержит элемента, минимизирующего $J(u)$. В этом случае $\mathscr{D}$ не является полным по норме $\| u \|_{\mathscr{L}}$, и необходимо расширить $\mathscr{L}$ (и $\mathscr{D}$), чтобы получить полное пространство. Процесс расширения осуществляется следующим образом.

1. Пусть $\mathscr{H}$ — полное нормированное линейное пространство и $\mathscr{L}$ — линейный положительно ограниченный снизу оператор, определенный на $\mathscr{D} \subset \mathscr{H}$. Построим новое пространство $\mathscr{H}_{\mathscr{L}}$ функций с конечной энергией, в котором скалярное произведение $[u, v]$ задается формулой
$$[u, v] = \langle \mathscr{L}u, v \rangle,$$
а норма — формулой
$$\| u \|_{\mathscr{L}} = [u, u]^{1/2}.$$
2. Если $\mathscr{H}_{\mathscr{L}}$ неполно, пополним его, как описывалось ранее [1]). Тогда каждый элемент $u \in \mathscr{H}_{\mathscr{L}}$ либо принадлежит $\mathscr{D}$, либо является пределом некоторой последовательности $\{u^n\} \in \mathscr{D}$, т. е. $\lim\limits_{n\to\infty} \| u - u^n \|_{\mathscr{L}} \to 0$ (по определению пополнения, $\mathscr{D}$ плотно в $\mathscr{H}_{\mathscr{L}}$ по энергетической норме $\|\cdot\|_{\mathscr{L}}$). Можно показать (см. Михлин [1970]), что каждый элемент $u \in \mathscr{H}_{\mathscr{L}}$ принадлежит также и $\mathscr{H}$; кроме того, если пространство $\mathscr{H}$ сепарабельно, то и $\mathscr{H}_{\mathscr{L}}$ сепарабельно.
3. Расширим область определения функционала $J(u)$ до всего пространства $\mathscr{H}_{\mathscr{L}}$. Это можно сделать, если в определении функционала $J(u)$ положить $\langle \mathscr{L}u, u \rangle = \| u \|^2_{\mathscr{L}}$ и заметить, что
$$|\langle u, f \rangle| \leqslant \| u \| \, \| f \| \leqslant \frac{1}{\gamma} \| f \| \, \| u \|_{\mathscr{L}}.$$
Следовательно, линейный функционал $lu \equiv \langle u, f \rangle$ ограничен в $\mathscr{H}_{\mathscr{L}}$, и существует единственный элемент u^* пространства $\mathscr{H}_{\mathscr{L}}$ (а значит, и $\mathscr{H}$), такой, что $\langle u, f \rangle = [u, u^*]$.

[1]) И результат пополнения обозначим тем же символом $\mathscr{H}_{\mathscr{L}}$. — *Прим. ред.*

Таким образом, для $u \in \mathscr{H}_{\mathscr{L}}$

$$J(u) = \| u - u^* \|^2_{\mathscr{L}} - \| u^* \|^2_{\mathscr{L}}$$

и $\min J(u) = J(u^*) = -\| u^* \|^2_{\mathscr{L}}$. Продолженный функционал записывается в виде

$$J(u) = [u, u] - [u, u^*] - \overline{[u, u^*]},$$

или

$$J(u) = [u, u] - 2 \operatorname{Re} [u, u^*]. \qquad (10.8)$$

4. Поскольку $\langle u, f \rangle = [u, u^*]$, существует оператор $\mathscr{M}$ на $\mathscr{H}$, такой, что $u^* = \mathscr{M}f$, и можно показать, что он ограничен и положительно определен. Если $\mathscr{M}f = 0$, то $\langle u, f \rangle = 0$ и элемент f ортогонален ко всем элементам множества $\mathscr{D}$, плотного в $\mathscr{H}_{\mathscr{L}}$. Следовательно, $\mathscr{M}f = 0 \Rightarrow f = 0$, а это означает существование $\mathscr{M}^{-1}$. Если $u^* \in \mathscr{D}$, $\mathscr{L}u^* = f$ и $u^* = \mathscr{M}f$, то $\mathscr{M}^{-1}u^* = \mathscr{L}u^*$. Значит, для каждого элемента $u \in \mathscr{D}$ справедливо равенство $\mathscr{M}^{-1}u = \mathscr{L}u$ и $\mathscr{D}_{\mathscr{M}^{-1}} \supseteq \mathscr{D}_{\mathscr{L}}$. Отсюда следует, что оператор $\mathscr{M}^{-1}$ является расширением оператора $\mathscr{L}$ на $\mathscr{H}_{\mathscr{L}}$.

В случае неоднородных краевых условий функционал $J(u)$ следует видоизменить. Предположим, например, что $\mathscr{H} = L_2(\mathscr{R})$ — вещественное пространство, оператор $\mathscr{L}$ в уравнении (10.5) положительно определен и существует решение уравнения (10.5). Рассмотрим случай, когда решение должно удовлетворять неоднородному краевому условию (10.6) на $\partial\mathscr{R}$, где функция g дифференцируема нужное число раз, а граница $\partial\mathscr{R}$ по крайней мере кусочно-гладка. Представим u в виде суммы двух частей v и w, где v удовлетворяет однородному краевому условию $\mathscr{B}v = 0$. Ясно, что v минимизирует функционал

$$J(v) = \langle \mathscr{L}v, v \rangle - 2 \langle v, \bar{f} \rangle, \qquad (10.9а)$$

где

$$\bar{f} = f - \mathscr{L}w. \qquad (10.9б)$$

Поскольку $v = u - w$, имеем

$$J(v) = J(u) + Q_1(u, w) - J(w), \qquad (10.10)$$

где

$$Q_1(u, w) = \langle u, \mathscr{L}w \rangle - \langle \mathscr{L}u, w \rangle. \qquad (10.11)$$

Во многих случаях $Q_1(u, w) = 0$. Если же нет, то будем предполагать, что $Q_1(u, w)$ представимо в виде

$$Q_1(u, w) = Q(u) + P(w). \qquad (10.12)$$

Таким образом, полагая $R(w) \equiv P(w) - J(w)$, мы можем привести (10.10) к виду

$$J(v) = J(u) + Q(u) + R(w). \qquad (10.13)$$

Здесь $R(w)$ есть скаляр, зависящий только от w и не дающий вклада в градиент функционала $J(v)$, в то время как $Q(u)$ представляет краевые условия и выражается в форме поверхностных интегралов по гиперповерхности $\partial\mathscr{R}$. Таким образом, решение уравнения (10.5), удовлетворяющее краевому условию (10.6), получается в результате минимизации нового функционала

$$I(u) = \langle \mathscr{L}u, u\rangle - 2\langle u, f\rangle + Q(u), \qquad (10.14)$$

где, очевидно, $I(u) = J(v) - R(w)$.

Для иллюстрации другого подхода к этой проблеме предположим, что оператор $\mathscr{L}^*$ является *формально сопряженным* к оператору $\mathscr{L}$, т. е.

$$u\mathscr{L}v - v\mathscr{L}^*u = b(u, v), \qquad (10.15)$$

где $b(u, v)$ — так называемый *билинейный конкомитант* оператора $\mathscr{L}$. Интегрируя (10.15), получаем

$$\langle u, \mathscr{L}v\rangle - \langle v, \mathscr{L}^*u\rangle \equiv B(u, v), \qquad (10.16)$$

где $B(u, v)$ определено на $\partial\mathscr{R}$. Если краевые условия таковы, что $B(u, v) = 0$, то оператор $\mathscr{L}^*$ называется *сопряженным* оператору $\mathscr{L}$. Тогда вместо (10.7) используем

$$J(u) = \langle u, \mathscr{L}^*u\rangle + B(u, u) - 2\langle f, u\rangle. \qquad (10.17)$$

Ясно, что в случае однородных краевых условий $B(u, u) = 0$, $\langle u, \mathscr{L}^*(u)\rangle = \langle u, \mathscr{L}(u)\rangle$ и (10.17) сводится к (10.7) (в предположении, что пространство $\mathscr{H}$ вещественно).

Нелинейные операторы. Многие из положений, высказанных относительно линейных положительно определенных операторов, могут быть обобщены и распространены на случай нелинейных операторов и неположительных линейных операторов. Кратко рассмотрим этот вопрос. Пусть $\mathscr{V}$ — банахово пространство, элементы которого обозначаются через u, и $\mathscr{P}$ — нелинейный оператор, определенный на $\mathscr{V}$. Нам понадобится ряд определений.

Определение 1. Пусть $\mathscr{P}$ — оператор, определенный на $\mathscr{V}$. Если для некоторого $u \in \mathscr{V}$ при любом $h \in \mathscr{V}$

$$\lim_{\alpha\to 0}\left\| \frac{1}{\alpha}(\mathscr{P}(u+\alpha h) - \mathscr{P}(u)) - G\mathscr{P}(u, h)\right\| = 0, \qquad (10.18)$$

где α — вещественное число, то $G\mathscr{P}(u, h)$ называется *дифференциалом Гато* оператора $\mathscr{P}$ в точке u при приращении h.

Из определения следует, что дифференциал Гато однороден, но не обязательно линеен. Можно показать [1]), что если оператор $\mathcal{F}$ имеет дифференциал Гато в каждой точке некоторого выпуклого множества $\Omega \subset \mathcal{V}$, то для любых $u, u + h \in \Omega$ выполняется условие Липшица

$$\| \mathcal{F}(u + h) - \mathcal{F}(u) \| \leqslant \| G\mathcal{F}(u + \alpha h, h) \|$$

при $\alpha \in (0, 1)$.

Более сильным определением дифференциала для нелинейных операторов служит

Определение 2. Если для некоторого $u \in \mathcal{V}$

$$\mathcal{F}(u + h) - \mathcal{F}(u) = \delta\mathcal{F}(u, h) + \omega(u, h), \tag{10.19}$$

где $\delta\mathcal{F}(u, h)$ есть линейный оператор относительно $h \in \mathcal{V}$ и

$$\lim_{\|h\| \to 0} \frac{1}{\|h\|} \| \omega(u, h) \| \to 0, \tag{10.20}$$

то $\delta\mathcal{F}(u, h)$ называется *дифференциалом Фреше* оператора $\mathcal{F}$ в точке u (при приращении h), а $\omega(u, h)$ — *остаточным членом* (или просто *остатком*).

Ясно, что если существует $\delta\mathcal{F}(u, h)$, то существует и $G\mathcal{F}(u, h)$. Однако обратное неверно. Если дифференциал Гато линеен относительно h, то можно записать

$$G\mathcal{F}(u, h) = D_G\mathcal{F}(u)(h);$$

$D_G\mathcal{F}(u)$ называют *производной Гато* в точке u. Аналогично можно записать

$$\delta\mathcal{F}(u, h) = \mathcal{F}'(u)(h);$$

$\mathcal{F}'(u)$ называют *производной Фреше* оператора $\mathcal{F}$ в точке u. Если производная $D_G\mathcal{F}(u)$ существует в некоторой окрестности $\mathcal{N}(u_0, r) = \{u \mid \| u - u_0 \| \leqslant r\}$ точки u_0 и непрерывна в u_0 (т. е. $\lim_{n\to\infty} \| G_G\mathcal{F}(u_0) - D_G\mathcal{F}(u^n) \| \to 0$ для любой последовательности $\{u^n\}$, сходящейся к u_0), то существует также $\delta\mathcal{F}(u_0, h)$ и $\delta\mathcal{F}(u_0, h) = G\mathcal{F}(u_0, h)$.

Дифференциал Фреше называется *локально равномерным* на множестве $\Omega \subset \mathcal{V}$, если для любого $\varepsilon > 0$ существуют такие $\eta(\varepsilon, u_0)$, $\delta(\varepsilon, u_0) > 0$, что для всех $u \in \mathcal{N}(u_0, \eta)$ выполняется неравенство $\| \omega(u, h) \| < \varepsilon \| h \|$ при $\| h \| < \delta$. Если производная $\mathcal{F}'$ ограничена и локально равномерна в $\mathcal{N}(u_0, r)$, то она непрерывна в $\mathcal{N}(u_0, r)$ [Вайнберг, 1956].

---

[1]) Вайнберг [1956]; там же приводятся достаточные условия линейности дифференциала Гато по приращению.

Определение 3. Пусть $K(u)$ — дифференцируемый по Фреше функционал, определенный на множестве $\Omega \subset \mathscr{V}$, и пусть $\langle u, v\rangle$ — скалярное произведение «между» $\mathscr{V}$ и сопряженным ему пространством $\mathscr{V}^*$. Оператор $\mathscr{F}$, определяемый формулой

$$\langle \mathscr{F}(u), h\rangle = \lim_{\alpha\to 0} \frac{1}{\alpha}[K(u+\alpha h) - K(u)],$$

называется *градиентом* [1]) функционала $K(u)$. При этом пишут $\mathscr{F}(u) = \operatorname{grad} K(u)$. [Если $K(u)$ дифференцируем по Гато, то $\operatorname{grad} K(u)$ называется *слабым градиентом*, если же $K(u)$ дифференцируем по Фреше, то *сильным градиентом*.]

Определение 4. Оператор $\mathscr{F}: \mathscr{V} \to \mathscr{V}^*$ называется *потенциальным оператором* на некотором множестве $\Omega \subset \mathscr{V}$, если существует такой функционал $K(u)$, что $\operatorname{grad} K(u) = \mathscr{F}(u)$ для любого $u \in \Omega$.

Можно показать, что необходимым и достаточным условием потенциальности оператора $\mathscr{F}: \mathscr{V} \to \mathscr{V}^*$ в $\mathscr{N}(u_0, r)$ является симметричность $\langle \delta\mathscr{F}(u, h_1), h_2\rangle$ в следующем смысле: $\langle \delta\mathscr{F}(u, h_1), h_2\rangle = \langle \delta\mathscr{F}(u, h_2), h_1\rangle$ для всех $h_1, h_2 \in \mathscr{V}$ и $u \in \mathscr{N}(u_0, r)$, причем $\langle \delta\mathscr{F}(u, h_1), h_2\rangle$ предполагается непрерывным в $\mathscr{N}(u_0, r)$.

Определение 5. Точка $u_0 \in \mathscr{V}$, такая, что $K(u) \leqslant K(u_0)$ или $K(u) \geqslant K(u_0)$ для всех $u \in \mathscr{N}(u_0, r)$, называется *экстремальной точкой* функционала $K(u)$. Если $\operatorname{grad} K(u_0) = \theta$, где θ — нулевой элемент пространства $\mathscr{V}^*$, то u_0 называется *критической точкой* функционала $K(u)$.

Сформулируем важную теорему, доказанную Вайнбергом [1956].

Теорема 10.4. *Пусть $\mathscr{F}$ — потенциальный на $\mathscr{N}(u_0, r)$ оператор. Тогда существует функционал K, единственный с точностью до константы, градиентом которого является $\mathscr{F}$. Этот функционал определяется формулой*

$$K(u) = \int_0^1 \langle \mathscr{F}(u_0 + s(u-u_0)), u-u_0\rangle\, ds + K_0, \tag{10.21}$$

где $K_0 = K(u_0)$ — произвольная константа.

Ясно, что теорема 10.4 представляет собой существенное обобщение теоремы 10.2. В самом деле, если потенциальный оператор $\mathscr{F}$ линеен, но не положительно определен или если оператор $\mathscr{F}$ нели-

---

[1]) Таким образом, градиент — это частный случай производной. — *Прим. ред.*

неен и существуют решения уравнения (10.1), то можно с помощью формулы (10.21) построить соответствующий функционал $K(u)$, градиентом которого является $\mathscr{P}$, и рассматривать задачу нахождения решений уравнения (10.1) как задачу нахождения критических точек функционала $K(u)$. Принцип поиска таких решений, для которых $\operatorname{grad} K(u^*) = \theta$, будем называть *экстремальным принципом* для оператора $\mathscr{P}$.

Чтобы наглядно продемонстрировать, что (10.21) действительно является обобщением (10.7), положим $u_0 = 0$, $K_0 = 0$, $\mathscr{V} = \mathscr{H}$, где $\mathscr{H}$ — вещественное гильбертово пространство, и

$$\mathscr{P}(u) = \mathscr{L}u - f,$$

где $\mathscr{L}$ — симметричный положительно определенный оператор из уравнения (10.5). По теореме 10.4 оператор $\mathscr{P}(u)$ является градиентом функционала

$$K(u) = \int_0^1 \langle \mathscr{L}(su) - f, u \rangle\, ds = \int_0^1 s \langle \mathscr{L}u, u \rangle\, ds - \int_0^1 \langle f, u \rangle\, ds.$$

Интегрируя, получаем

$$K(u) = \frac{1}{2} \langle \mathscr{L}u, u \rangle - \langle f, u \rangle = \frac{1}{2} J(u),$$

где $J(u)$ — квадратичный функционал (10.7).

Хотя мы не будем подробно останавливаться на вопросе существования и единственности решений нелинейных операторных уравнений [1]) или существования относительного минимума соответствующих функционалов, интересно тем не менее отметить, что для большого класса нелинейных операторов можно сформулировать условия, аналогичные наложенным на линейный оператор $\mathscr{L}$. Например, нетрудно доказать, что для нелинейного потенциального операторного уравнения $\mathscr{P}u = f$ существует хотя бы одно решение, если дифференциал Фреше положительно ограничен снизу, т. е. если существует такая постоянная γ, что

$$\langle \delta\mathscr{P}(u, h), h \rangle \geqslant \gamma^2 \| h \|^2 \tag{10.22}$$

и, следовательно, функционал $K(u)$ ограничен снизу. Далее, в случае когда $K(u)$ — функционал на компактном подмножестве пространства $\mathscr{V}$, точка u^*, в которой $K(u)$ имеет относительный минимум, существует, если

$$\delta^2 K(u, h, h) \geqslant \| h \| \lambda (\| h \|), \tag{10.23}$$

[1]) Для ознакомления с такого рода вопросами см. Саати [1967] или Вайнберг [1956].

где $0 < \lambda(s)$, $\lim\limits_{s\to\infty} \lambda(s) = \infty$ и $\delta^2 K(u, h, h)$ — второй дифференциал Фреше функционала $K(u)$. Любая минимизирующая последовательность для $K(u)$ [т. е. любая последовательность $\{u^n\}$, такая, что $\lim\limits_{n\to\infty} K(u^n) = \min K(u)$] сходится по норме $\mathscr{H}$ к некоторому пределу, называемому *обобщенным решением* задачи минимизации функционала (10.21). Ясно, что (10.23) представляет собой обобщение на случай банаховых пространств обычного условия относительного минимума функции в критической точке. В самом деле, мы можем написать

$$K(u+h) = K(u) + \delta K(u, h) + \frac{1}{2}\delta^2 K(u, h, h) + \ldots \tag{10.24}$$

Поэтому, если $\operatorname{grad} K(u) = \theta$, т. е. если u — критическая точка для $K(u)$, положительность $K(u)$ в $\mathscr{N}(u, r)$ следует из того, что квадратичная форма $\delta^2 K(u, h, h)$ удовлетворяет неравенству (10.23).

В заключение укажем одно имеющее фундаментальное значение свойство потенциальных операторов. Рассмотрим нелинейное операторное уравнение

$$\mathscr{P}u = f, \tag{10.25}$$

и пусть $\hat{\mathscr{P}}u = \mathscr{P}u - f$ — потенциальный оператор из $\mathscr{V}$ в $\mathscr{V}^*$, являющийся градиентом функционала $K(u)$. Предположим, что решение u^* уравнения (10.25) существует и является критической точкой для $K(u)$. Тогда

$$\operatorname{grad} K(u^*) = \langle \hat{\mathscr{P}}u^*, h\rangle = 0,$$

или

$$\langle \mathscr{P}u^* - f, h\rangle = 0. \tag{10.26}$$

Поскольку h — произвольный элемент пространства $\mathscr{V}$, это означает, что образ $\hat{\mathscr{P}}(u^*)$ решения уравнения (10.25) ортогонален к $\mathscr{V}$. Это наблюдение лежит в основе общего метода построения конечноэлементных аппроксимаций решений нелинейных операторных уравнений [1]).

10.2. КОНЕЧНОЭЛЕМЕНТНЫЕ АППРОКСИМАЦИИ

При конечноэлементных аппроксимациях мы в общем случае имеем дело со следующей задачей. Пусть $\mathscr{H}$ — пространство со скалярным произведением; обычно это гильбертово пространство $L_2^r(\mathscr{R})$, элементами которого являются функции $F(\mathrm{x})$, определенные в некоторой области $\mathscr{R}$ пространства $\mathscr{E}^k$. [Как правило, нас

[1]) См. изложение метода Галёркина в п. 10.3.

будут интересовать случаи, когда сама функция $F(\mathbf{x})$ и ее производные вплоть до порядка $r+1$ кусочно-непрерывны и квадратично интегрируемы в $\mathscr{R}$.] Далее, пусть $\overline{\mathscr{H}}$ — другое пространство, элементами которого являются функции $\overline{F}(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in \overline{\mathscr{R}}$, класса $C^r(\overline{\mathscr{R}})$, $r < p$. Требуется построить такую последовательность линейных подпространств $\Phi^1, \Phi^2, \ldots$ пространства $\overline{\mathscr{H}}$ конечных размерностей $n_1, n_2, \ldots$, не обязательно вложенных друг в друга, что для каждой функции $F(\mathbf{x}) \in \mathscr{H}$ существует последовательность функций $\overline{F}^1(\mathbf{x}) \in \Phi^1, \overline{F}^2(\mathbf{x}) \in \Phi^2, \ldots$, удовлетворяющая условиям

$$\lim_{n\to\infty} \| F(\mathbf{x}) - \overline{F}^n(\mathbf{x}) \| = \lim_{n\to\infty} \| F_{,i}(\mathbf{x}) - \overline{F}^n_{,i}(\mathbf{x}) \| = \ldots$$
$$\ldots = \lim_{n\to\infty} \| F_{,i_1 i_2 \ldots i_m}(\mathbf{x}) - \overline{F}_{,i_1 i_2 \ldots i_m}(\mathbf{x}) \| = 0. \qquad (10.27)$$

Здесь $\|\cdot\|$ обозначает нормы в $\mathscr{H}$ и $\overline{\mathscr{H}}$; $i_1, i_2, \ldots, i_m = 1, 2, \ldots, k$; $F_{,i_1 i_2 \ldots i_m} = \partial^m F / \partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \ldots \partial x_{i_m}$, где $i_1 \leqslant i_2 \leqslant \ldots \leqslant i_m$.

Функции $\overline{F}^n(\mathbf{x})$ образуют последовательность $\{\overline{F}^n\}$ в $\overline{\mathscr{H}}$. Члены этой последовательности получаются в результате построения *измельчения* модели $\overline{\mathscr{R}}$. При измельчении области $\overline{\mathscr{R}}$ число элементов r_e и глобальных узлов G бесконечно увеличивается, причем каждая точка $\mathbf{x} \in \overline{\mathscr{R}}$ содержится в сколь угодно малом элементе, а класс каждого элемента и соответствующих ему интерполяционных функций не изменяется. Например, если $\overline{\mathscr{R}} \subset \mathscr{E}^2$ состоит из треугольных элементов, на которых используются линейные интерполяционные функции $\psi_N^{(e)}(x^1, x^2)$, то и каждое измельчение $\overline{\mathscr{R}}$ должно состоять из треугольных элементов и линейных интерполяционных функций. Если каждый узел и каждая межэлементная граница в модели $\overline{\mathscr{R}}$ являются узлом и межэлементной границей и в ее измельчении, то измельчение называется *регулярным*, в противном случае — *нерегулярным*.

Чтобы придать понятию измельчения количественное выражение, введем понятие диаметра конечного элемента r_e. Пусть $\mathbf{x}_i^e$ и $\mathbf{x}_j^e$ — произвольные точки элемента r_e. *Диаметр* δ_e элемента r_e — это максимальное расстояние между точками r_e, т. е. $\delta_e = \max \| \mathbf{x}_i^e - \mathbf{x}_j^e \|$; $\mathbf{x}_i^e, \mathbf{x}_j^e \in r_e$. *Мерой мелкости* δ конечноэлементной модели служит максимальный диаметр ее элементов: $\delta = \max \{\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_E\}$. Пусть $\overline{\mathscr{R}}$ — некоторая конечноэлементная модель, а $\overline{\mathscr{R}}'$ — ее измельчение; $\overline{\mathscr{R}}'$ *равномерно*, если $\delta' < \delta$, где δ' — мера мелкости $\overline{\mathscr{R}}'$. Пусть $\hat{\delta}$ и $\hat{\delta}'$ — наименьшие диаметры элементов моделей $\overline{\mathscr{R}}$ и $\overline{\mathscr{R}}'$. Если $\hat{\delta}' < \hat{\delta}$, то измельчение $\overline{\mathscr{R}}'$ называется *равномерно утончающимся*. Впредь мы будем предполагать, что все измельчения регулярны и равномерны, а меры мелкости

$\delta(\Gamma)$ последовательности измельчений $\overline{\mathscr{R}}^1, \overline{\mathscr{R}}^2, \ldots, \overline{\mathscr{R}}^\Gamma, \ldots$, удовлетворяют естественному требованию $\lim\limits_{\Gamma\to\infty} \delta(\Gamma) = 0$. Кроме того, мы будем считать, что в последовательности измельчений для всех элементов используются локальные аппроксимационные функции одного и того же вида.

Ясно, что наша первая задача — разработать метод построения последовательности $\{\overline{F}^n\}$. Для этого мы, как обычно, представляем область $\mathscr{R}$ моделью $\overline{\mathscr{R}}$, состоящей из конечного числа связанных в общих узловых точках и непрерывно соединенных на межэлементных границах подобластей r_e. Опять ограничение функции $\overline{F}(\mathbf{x})$ на r_e будем обозначать через $\overline{f}^{(e)}(\mathbf{x})$, где для простоты не делается различия между локальными и глобальными координатами ($\mathbf{x}^{(e)} \equiv \mathbf{X}$). Предполагается, что локальное конечноэлементное представление имеет вид

$$\overline{f}^{(e)}(\mathbf{x}) = f^N_{(e)}\psi_N^{(e)0}(\mathbf{x}) + f^N_{(e),\,i}\psi_N^{(e)i}(\mathbf{x}) + \ldots + f^N_{(e),\,i_1i_2\ldots i_r}\psi_N^{(e)i_1i_2\ldots i_r}(\mathbf{x}). \tag{10.28}$$

Здесь $N = 1, 2, \ldots, N_e$; $f^N_{(e)}$, $f^N_{(e),\,i}$, $\ldots$, $f^N_{(e),\,i_1\ldots i_r}$ — значения функции $\overline{f}^{(e)}(\mathbf{x})$ и ее частных производных вплоть до r-го порядка в узловой точке N, а локальные интерполяционные функции $\psi_N^{(e)0}(\mathbf{x}), \ldots, \psi_N^{(e)i_1i_2\ldots i_r}(\mathbf{x})$ или тождественно равны нулю для какого-либо узла N, или являются обобщенными эрмитовыми интерполяционными функциями (см. п. 8.1). Общее число независимых членов в выражении (10.28) называется *степенью свободы* элемента. Далее будут также использоваться следующие предположения и допущения: (1) локальные представления $\overline{f}^{(e)}(\mathbf{x})$ и глобальные представления $\overline{F}(\mathbf{x})$ единственным образом определяются главными узловыми значениями $f^N_{(e)}, f^N_{(e),\,i}, \ldots, f^N_{(e),\,i_1\ldots i_r}$, входящими в (10.28), и соответствующими глобальными значениями $F^\Delta, F^\Delta_{,\,i}, \ldots, F^\Delta_{,\,i_1\ldots i_r}$ для всех моделей области $\mathscr{R}$; (2) идентификационная метка элемента (e) для простоты не пишется, и зависимость функций $\psi_N^0, \psi_N^i, \ldots, \psi_N^{i_1\ldots i_r}$ от $\mathbf{x}$ явно не указывается.

Удобно ввести следующие определения.

Определение 1. Конечноэлементные аппроксимации $\overline{f}(\mathbf{x})$ образуют *семейство* (или *класс*) $\mathscr{F}^r$, если в каждой из них хотя бы в одной узловой точке используются значения частных производных порядка r.

Например, $\overline{f}(\mathbf{x}) = f^N\psi_N^0 + f^1_{,\,ijk}\psi_1^{ijk}$ определяет некоторое семейство $\mathscr{F}^3$ конечноэлементных аппроксимаций. Придавая всевозможные вещественные (или комплексные) значения параметрам-

коэффициентам f^N, $f^1_{,ijk}$, получаем все функции этого семейства $\mathscr{F}^3$. Представление $\bar{f}(\mathbf{x}) = f^N\psi_N^0 + f^2_{,ijk}\psi_2^{ijk}$ определяет некоторое другое семейство $\mathscr{F}^3$.

Определение 2. Пусть $f(\mathbf{x}_e)$ и $g(\mathbf{x}_e)$ задают два семейства конечноэлементных аппроксимаций. Функции $f(\mathbf{x}_e)$ и $g(\mathbf{x}_e)$ называются *r-эквивалентными* на элементе r_e области $\overline{\mathscr{R}}$, если

$$\| f(\mathbf{x}_e) - g(\mathbf{x}_e) \| \leqslant K\delta_e^r, \qquad \mathbf{x}_e \in r_e, \tag{10.29}$$

где δ_e — диаметр элемента r_e, а K — положительная постоянная, не зависящая от δ_e.

Если соотношение (10.29) справедливо для всех элементов области $\overline{\mathscr{R}}$, то оно определяет отношение эквивалентности для семейств определенных на $\overline{\mathscr{R}}$ функций. Диаметр δ_e рассматривается как параметр. Для семейства $\{\overline{\mathscr{R}}^\Gamma\}$ измельчений, мерой мелкости которых служат $\delta(\Gamma)$, выполнены неравенства $\delta_e \leqslant \delta(\Gamma)$, и поэтому $\delta_e \to 0$ при $\delta(\Gamma) \to 0$. Понятие r-эквивалентности имеет смысл только по отношению к заданной норме. Если не будет делаться специальных оговорок, мы будем иметь дело с *равномерной эквивалентностью* функций, определяемой неравенством $\| f - g \| = | f - g | \leqslant K\delta_e^r$. Например, при достаточно малых δ_e функция $f(x_e) = 1 + x_e + x_e^2 + 3\delta \sin x_e$ 2-эквивалентна функции $1 + x_e + x_e^2$, а функция $f(x_e) = \sin x_e$ 3-эквивалентна функции x_e. Две функции $f(\mathbf{x}_e)$ и $g(\mathbf{x}_e)$, 1-эквивалентные между собой, в пределе при $\delta \to 0$ равны почти всюду. Таким же образом если значения f и g в точках $\mathbf{x}_e$ отличаются только членами порядка δ_e^r, т. е. если

$$f(\mathbf{x}_e) = g(\mathbf{x}_e) + O(\delta_e^r), \tag{10.30}$$

то f и g являются r-эквивалентными на r_e. Под $O(\delta_e^r)$ понимается функция от δ_e^r (и, возможно, от $\mathbf{x}_e$), обладающая свойством

$$\lim_{\delta_e \to 0} \frac{1}{\delta_e^{r-1}} | O(\delta_e^r) | = 0.$$

Определение 3. Пусть $\bar{f}^{(e)}(\mathbf{x})$ определяет некоторое семейство $\mathscr{F}^r$ конечноэлементных аппроксимаций на r_e. Положим

$$G(\mathbf{x}) = \bar{f}^{(e)}(\mathbf{x}) - F(\mathbf{x}). \tag{10.31}$$

Семейство $\mathscr{F}^r$ называется *r-допустимым* для аппроксимации $F(\mathbf{x})$ по отношению к норме $\|\cdot\|$, если

$$\lim_{\delta \to 0} \| G(\mathbf{x}) \| = \lim_{\delta \to 0} \| G(\mathbf{x})_{,i} \| = \ldots = \lim_{\delta \to 0} \| G(\mathbf{x})_{,i_1 i_2 \ldots i_r} \| = 0. \tag{10.32}$$

Ясно, что если $\mathscr{F}^r$ является r-допустимым, то $\bar{f}_{,i_1\ldots i_r}$ и $F_{,i_1\ldots i_r}$ по меньшей мере 1-эквивалентны на r_e.

Если конечный элемент семейства $\mathscr{F}^r$ имеет d степеней свободы, то значение $\bar{f}(\mathbf{x})$ в точке $\mathbf{x}$ представляет собой наложение значений d линейно независимых функций, принадлежащих $\mathscr{F}^r$. Говорят, что эти линейно независимые функции характеризуют «единичные моды» элемента. Хотя обычно принимается, что значение $\bar{f}(\mathbf{x})$ в точке $\mathbf{x}$ можно сделать любым при помощи соответствующего подбора амплитуд единичных мод, для нас важна возможность придать функции $\bar{f}(\mathbf{x})$ нужное значение в нормированном пространстве лишь с точностью до членов порядка δ_e. Это приводит нас к следующей теореме.

Теорема 10.5. *Пусть $\bar{f}$ принадлежит некоторому классу r-допустимых конечноэлементных аппроксимаций и 1-эквивалентна некоторому полному полиному*[1]*, содержащему m членов. Тогда степень свободы d элемента r_e не больше m.*

Доказательство. Ясно, что коэффициенты полного полинома, содержащего m независимых членов, могут быть найдены путем приравнивания его m значений значениям функции $\bar{f}$ и некоторых ее производных в узлах элемента r_e. Тогда по определению $d = m$. Однако если два или более членов имеют общий коэффициент, то $d < m$. Значит, в общем случае $d \leqslant m$. Если же функция $\bar{f}$ лишь 1-эквивалентна полному полиному, содержащему m членов, то все сказанное остается справедливым, с той разницей, что значения $\bar{f}$ и некоторых ее частных производных в узлах могут принимать заданные значения только с точностью до членов порядка δ_e.

Предыдущие определения и теорема 10.5 характеризуют некоторые общие свойства конечноэлементных аппроксимаций, удобные для равномерного приближения заданной функции $F(\mathbf{x})$. Однако, как указывалось ранее, при получении конечноэлементных решений краевых задач требуется полнота базисных функций по энергии. Для решения вопроса полноты по энергии необходимо, конечно, уточнить тип оператора $\mathscr{L}$, входящего в определение энергетического скалярного произведения. Мы ограничимся рассмотрением вопроса полноты для довольно широкого класса линейных положительно ограниченных снизу дифференциальных

---

[1]) Под полным полиномом степени n от k переменных понимается полином, содержащий $(n+k)!/n!k!$ независимых членов; коэффициенты его, однако, не обязательно независимы.

операторов порядка $2p$ вида [1])

$$\mathscr{L}=\sum_{s=0}^{p}\Bigg[(-1)^s\sum_{i_1,i_2,\ldots,i_k=0}^{s}\frac{\partial^s}{\partial x_{i_1}^1\partial x_{i_2}^2\ldots\partial x_{i_k}^k}\times$$

$$\times\sum_{j_1,j_2,\ldots,j_k=0}^{s}A_{j_1j_2\ldots j_k}^{i_1i_2\ldots i_k}\frac{\partial^s}{\partial x_{j_1}^1\partial x_{j_2}^2\ldots\partial x_{j_k}^k}\Bigg], \qquad (10.33)$$

где $i_1+i_2+\ldots+i_k=j_1+j_2+\ldots+j_k=p$ и $A_{j_1j_2\ldots j_k}^{i_1i_2\ldots i_k}$ — набор ограниченных непрерывно дифференцируемых функций в $\mathscr{R}$, симметричных по индексам $i_1, i_2, \ldots, i_k, j_1, \ldots, j_k$ и положительных в том смысле, что для любого $\mathbf{x}\in\mathscr{R}$ справедливо неравенство $x^{i_1}x^{i_2}\ldots x^{i_k}A_{j_1\ldots j_k}^{i_1\ldots i_k}x^{j_1}\ldots x^{j_k}\geqslant\gamma^2\|\mathbf{x}\|^2$, $\gamma>0$. Предположим также, что $u\in\mathscr{D}_{\mathscr{L}}$ удовлетворяет однородным краевым условиям на $\partial\mathscr{R}$, вследствие чего после интегрирования по частям скалярное произведение $\langle u, \mathscr{L}v\rangle$ можно представить в виде

$$\langle u, \mathscr{L}v\rangle=[u, v]=\int_{\mathscr{R}}\hat{\partial}^p u\mathbf{A}\partial^p v\,d\mathscr{R}, \qquad (10.34)$$

где для простоты записи введено обозначение

$$\sum_{s=0}^{p}\sum_{\substack{i_1,i_2,\ldots,i_k=0\\ j_1,j_2,\ldots,j_k=0}}^{s}\frac{\partial^s u}{\partial x_{i_1}^1\ldots\partial x_{i_k}^k}A_{j_1\ldots j_k}^{i_1\ldots i_k}(\mathbf{x})\frac{\partial^s v}{\partial x_{j_1}^1\ldots\partial x_{j_k}^k}\equiv\hat{\partial}^p u\mathbf{A}\partial^p v. \qquad (10.35)$$

Тогда энергетическая норма записывается так:

$$\|u\|_{\mathscr{L}}^2=[u, u]=\int_{\mathscr{R}}\hat{\partial}^p u\mathbf{A}\partial^p u\,d\mathscr{R}, \qquad (10.36)$$

и можно показать, что если A — верхняя граница для $\mathbf{A}$ (например, $\max\limits_{\mathbf{x}\in\mathscr{R}}|\mathbf{A}(\mathbf{x})|\leqslant A$), то

$$\|u-v\|_{\mathscr{L}}^2\leqslant\mathscr{R}A\max_{u,\,v\in\mathscr{D}}|\partial^p(u-v)|^2. \qquad (10.37)$$

Расстоянием по энергии будет $d_{\mathscr{L}}(u, v)=\|u-v\|_{\mathscr{L}}$.

Понятно, что от (10.36) можно перейти прямо к (10.7) или (10.8) и получить вариационную формулировку дифференциального уравнения в частных производных $\mathscr{L}u=f$, в которой фигурирует

[1]) Это — незначительное обобщение примера, рассмотренного Фелиппой и Клафом [1968].

функционал

$$J(u)=\int_{\mathcal{R}}(\hat{\partial}^p u \mathbf{A} \partial^p u - 2uf)\,d\mathcal{R}. \qquad (10.38)$$

Квадратичные функционалы вида (10.38) (т. е. функционалы, включающие производные порядка p) называются функционалами *класса* C^{p-1}. В вариационной задаче для функционала класса C^{p-1} краевые условия для u, содержащие производные до порядка $p-1$ включительно, называются *главными* (или *геометрическими*) *краевыми условиями*, а условия, содержащие производные порядка p, $p+1$, ..., $2p-1$,— *естественными краевыми условиями*. Производные u до порядка $p-1$ включительно называются *главными производными*. При построении аппроксимаций для (10.36) и (10.38), как правило, мы будем требовать, чтобы u имело непрерывные главные производные в $\mathcal{R}+\partial\mathcal{R}$ (т. е. $u \in C^{p-1}(\mathcal{R}+\partial\mathcal{R})$) и чтобы производные u порядка p были квадратично интегрируемы (т. е. $\partial^p u \in L_2(\mathcal{R})$). Если оператор $\mathcal{L}$ положительно определен, этот класс функций плотен в $\mathcal{H}_{\mathcal{L}}$.

После этих замечаний докажем следующую важную теорему [1]).

Теорема 10.6. *Пусть* d *— степень свободы конечного элемента* r_e, *локальное конечноэлементное представление* $\bar{f}(\mathbf{x})$ *на котором принадлежит семейству* $\mathcal{F}^r$. *Тогда с помощью локальных базисных функций* $\psi_N^0(\mathbf{x})$, $\psi_N^i(\mathbf{x})$, ..., $\psi_N^{i_1\ldots i_r}(\mathbf{x})$ *можно получить последовательности аппроксимаций, полные по энергетической норме* (10.36), *если выполнены следующие условия:*

а. *функция* $\bar{f}(\mathbf{x})$ *по крайней мере 1-эквивалентна полиному, содержащему* d *членов;*

б. *семейство* $\mathcal{F}^r$ *содержит подсемейство* $\mathcal{S}$ *функций, которые вместе со своими производными до порядка* s *являются* m*-эквивалентными соответствующим производным полных полиномов степени* $r+1$, *где* $s \leqslant r+1$, $m \geqslant p+1-s$;

в. $r+1=p$.

Доказательство. Заметим, что если теорема справедлива, в случае когда $\bar{f}(\mathbf{x})$ полином из d членов, включающий в себя полный полином степени $r+1=p$, то в пределе при стремлении меры

[1]) Эта теорема является обобщением доказанной Арантесом э Оливейрой [1968] теоремы, в которой рассматривались только полиномиальные приближения. Важно четко представлять, что в этой теореме речь идет о локальных условиях полноты конечноэлементных аппроксимационных функций; т. е. функции, удовлетворяющие условиям этой теоремы, обеспечивают только локальное выполнение неравенства (10.51), а фундаментальное глобальное условие конечности энергетической нормы может при этом не выполняться. Во избежание этого впоследствии на элементы семейства $\mathcal{F}^r$ будет наложено дополнительное условие r-соответственности (см. определение 4 на стр. 135).

мелкости δ к нулю она справедлива и для всех $\bar{f}(\mathbf{x})$, которые 1-эквивалентны таким полиномам. Поэтому предположим, что $\bar{f}(\mathbf{x})$ — полином из d членов с d независимыми коэффициентами и что мы можем выделить в нем полный полином $p(\mathbf{x})$ степени $p = r + 1$, коэффициенты которого могут принимать произвольные постоянные значения. Значит, $\bar{f}(\mathbf{x})$ можно использовать для описания элементов с d степенями свободы (см. теорему 10.5).

Пусть $F(\mathbf{x})$ — элемент из $\mathscr{D}_{\mathscr{L}}$, где оператор $\mathscr{L}$ имеет вид (10.33). Поскольку $\mathscr{L}$ имеет порядок $2p$, можно на r_e представить $F(\mathbf{x})$ в виде

$$F(\mathbf{x}) = F^N + F^N_{,i}(x_i - x_i^N) + \ldots$$
$$\ldots + \frac{1}{(p+1)!} F(\mathbf{x}^*)_{,i_1 \ldots i_{p+1}} (x_{i_1} - x^N_{i_1}) \ldots (x_{i_{p+1}} - x^N_{i_{p+1}}), \quad (10.39)$$

где F^N, $F^N_{,i}$, ... — значения функции $F(\mathbf{x})$ и ее производных в узловой точке $\mathbf{x}^N$, а точка $\mathbf{x}^*$ расположена «между» $\mathbf{x}^N$ и $\mathbf{x}$. Пусть $\mathscr{S} \subset \mathscr{F}^r$ содержит полином степени p, коэффициенты которого можно приравнять первым p членам разложения (10.39). Тогда если $\bar{K}$ — верхняя граница для $|F(\mathbf{x})_{,i_1 \ldots i_{p+1}}|$, то

$$|F(\mathbf{x}) - p(\mathbf{x})| \leqslant \frac{b\bar{K}}{(p+1)!} (\delta_e)^{p+1}, \quad (10.40)$$

где $b = (p+k)!/[(p+1)!\,(k-1)!]$ — число членов степени $p+1$ по k переменным x_i, а δ_e — диаметр элемента. Аналогично с помощью последовательного дифференцирования получаем

$$|F(\mathbf{x})_{,i_1 \ldots i_s} - p(\mathbf{x})_{,i_1 \ldots i_s}| \leqslant \frac{bK}{(p+1-s)!} (\delta_e)^{p+1-s}, \quad (10.41)$$

где K — положительная постоянная.

По предположению $p(\mathbf{x}) \in \mathscr{F}^r$. Значит, $p(\mathbf{x})$ можно записать в виде

$$p(\mathbf{x}) = p^N \psi^0_N(\mathbf{x}) + p^N_{,i} \psi^i_N(\mathbf{x}) + \ldots + p^N_{,i_1 \ldots i_r} \psi^{i_1 \ldots i_r}_N(\mathbf{x}), \quad (10.42)$$

где $r = p - 1$. Пусть $\bar{g}(\mathbf{x})$ — элемент из $\mathscr{F}^r$, который может совпадать с главными производными $F(\mathbf{x})$ в каждой узловой точке $\mathbf{x}^N$ элемента r_e. Тогда

$$p(\mathbf{x}) - g(\mathbf{x}) = (p^N - g^N)\, \psi^0_N(\mathbf{x}) + (p^N_{,i} - g^N_{,i})\, \psi^i_N(\mathbf{x}) + \ldots$$
$$\ldots + (p^N_{,i_1 \ldots i_r} - g^N_{,i_1 \ldots i_r})\, \varphi^{i_1 \ldots i_r}_N(\mathbf{x}). \quad (10.43)$$

Для того чтобы выражение (10.28) (или (10.42)) было безразмерно однородным, необходимо, чтобы локальные интерполя-

ционные функции ψ_N^0, ψ_N^i, ..., были представимы следующим образом:

$$\psi_N^0(\mathbf{x}) = \varphi_N^0(\xi), \quad \psi_N^i(\mathbf{x}) = l\varphi_N^i(\xi), \ \ldots, \ \psi_N^{i_1 \ldots i_r}(\mathbf{x}) = l^r \varphi_N^{i_1 \ldots i_r}(\xi). \tag{10.44}$$

Здесь l — характерный размер элемента, ξ — безразмерные локальные координаты (например, $\xi_i = x_i/l$), а φ_N^0, φ_N^i, ..., $\varphi_N^{i_1 \ldots i_r}$ — безразмерные базисные функции, не зависящие от абсолютных размеров элемента. Предполагается, что эти функции ограничены на r_e, т. е. для всех $x_i/l \in r_e$ существуют положительные постоянные K^0, K^1, ..., K^r, такие, что

$$|\varphi_N^0(\xi)| \leqslant K^0, \quad |\varphi_N^i(\xi)| \leqslant K^1, \quad \ldots, \quad |\varphi_N^{i_1 \ldots i_r}(\xi)| \leqslant K^r.$$

Отсюда следует, что если δ_e — диаметр элемента, то

$$|\psi_N^0(\mathbf{x})| \leqslant K^0, \quad |\psi_N^i(\mathbf{x})| \leqslant K^1\delta_e, \quad |\psi_N^{ij}(\mathbf{x})| \leqslant K^2\delta_e^2, \ \ldots$$
$$\ldots, \ |\psi_N^{i_1 \ldots i_r}(\mathbf{x})| \leqslant K^r\delta_e^r. \tag{10.45}$$

Отметим также, что

$$|\psi_{N,\, i_1 \ldots i_m}^{i_1 \ldots i_s}(\mathbf{x})| \leqslant K^s\delta_e^{s-m}. \tag{10.46}$$

Следовательно, возвращаясь к (10.43), имеем

$$|p(\mathbf{x}) - \bar{g}(\mathbf{x})| \leqslant |p^N - g^N|\, K^0 + k\, |p_{,i}^N - g_{,i}^N|\, K^1\delta_e + \ldots$$
$$\ldots + \frac{(r+k-1)!}{r!\,(k-1)!}\, |p_{,i_1 \ldots i_r}^N - g_{,i_1 \ldots i_r}^N|\, K^r(\delta_e)^r \tag{10.47}$$

при любых значениях индексов i_1, i_2, ..., i_r.

В силу (10.41)

$$|p_{,i_1 \ldots i_s}^N - g_{,\, i_1 \ldots i_s}^N| \leqslant \frac{bK}{(p+1-s)!}(\delta_e)^{p+1-s}, \tag{10.48}$$

где $s = 0, 1, 2, \ldots, r$. Подставляя это в (10.43) и принимая во внимание (10.46), получаем

$$|p(\mathbf{x}) - \bar{g}(\mathbf{x})| \leqslant M(\delta_e)^{p+1},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$|p(\mathbf{x})_{,i_1 \ldots i_p} - \bar{g}(\mathbf{x})_{,i_1 \ldots i_p}| \leqslant M\delta_e, \tag{10.49а}$$

где

$$M = N_e bK \sum_{s=0}^{r} \frac{K^s(s+k-1)!}{(p+1-s)!\, s!\, (k-1)!}, \tag{10.49б}$$

а $r = p - 1$. Заметим, что при получении (10.49а) мы предполагали существование $\psi_{N,\, i_1 \ldots i_{r+1}}^{i_1 \ldots i_r}(\mathbf{x})$ в r_e, хотя порядок представления $\bar{g}(\mathbf{x})$ только r.

Из (10.49а) и (10.41) видно, что [1])

$$|F(\mathbf{x}),_{i_1\ldots i_j}-\bar{g}(\mathbf{x}),_{i_1\ldots i_j}|=|F(\mathbf{x}),_{i_1\ldots i_j}-p(\mathbf{x}),_{i_1\ldots i_j}-$$
$$-(\bar{g}(\mathbf{x}),_{i_1\ldots i_j}-p(\mathbf{x}),_{i_1\ldots i_j})|\leqslant c_j(\delta_e)^{p+1-j} \quad (10.50)$$

при любом $j=0, 1, 2, \ldots, p$, где $C_j = M + bK/(p+1-j)!$. Таким образом, в обозначениях (10.35) имеем

$$|\mathbf{d}^p(F(\mathbf{x})-\bar{g}(\mathbf{x}))|\leqslant C\delta_e, \quad (10.51)$$

где C — не зависящая от δ_e постоянная. Подставляя (10.51) в (10.37), получаем

$$\|F-\bar{g}\|^2_{\mathscr{L}}\leqslant r_eC^2A(\delta_e)^2, \quad (10.52)$$

где подразумевается, что F и $\bar{g}$ зависят от $\mathbf{x}$. Если δ — мера мелкости связанной конечноэлементной модели (т. е. $\delta = \max\{\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_E\}$) и если глобально нормы (10.52) приводят к конечной энергии, то $\|F-\bar{g}\|^2_{\mathscr{L}} \leqslant \mathscr{R}\bar{C}^2A\delta^2$, где $\bar{C}$ — максимальная из постоянных C для всех элементов. Ясно, что для последовательности глобальных аппроксимаций, порождаемых представлениями в классе $\mathscr{F}^r$ и соответствующих регулярным равномерным измельчениям, $\delta\to 0$, $\lim\limits_{\delta\to 0}\|F-\bar{g}\|_{\mathscr{L}}=0$. Поэтому построенные таким образом глобальные базисные функции полны по энергии. Для того чтобы показать теперь, что достаточно, чтобы $\tilde{p}(\mathbf{x}),_{i_1\ldots i_s}$, где $\tilde{p}(\mathbf{x})\in\mathscr{G}$, были лишь m-эквивалентны $p(\mathbf{x}),_{i_1\ldots i_s}$, где $p(\mathbf{x})$ полный полином степени p, заметим, что в соответствии с (10.41) и (10.48)

$$|(F-\bar{g}),_{i_1\ldots i_s}|=|[F-p+(p-\tilde{p})+(\tilde{p}-p)+p-\bar{g}],_{i_1\ldots i_s}|\leqslant$$
$$\leqslant[\hat{K}+N(\delta_e)^{n+s-p-1}+M](\delta_e)^{p+1-s}.$$

Значит, (10.50) справедливо при $\delta_e\to 0$, поскольку $m\geqslant p+1-s$. Этим заканчивается доказательство теоремы.

Для лучшего понимания теоремы полезно разобрать простой пример. Положим $\mathscr{R}=\mathscr{E}^1$ и рассмотрим линейный оператор

$$\mathscr{L}\equiv-\frac{d^2}{dx^2}.$$

[1]) Если $\bar{f}(\mathbf{x})$ — полином степени q и $p+1-j\leqslant 2(q+1-p)$, то приводимая ниже оценка (10.50) согласуется с оценкой погрешности Фикса и Стрэнга [1969]. Подробно такие оценки погрешности рассмотрены Фридом [1971]; в работе Фикса и Нассифа [1972] можно найти оценки погрешностей для параболических уравнений. См. также Корнеев [1967], Бабушка [1971], Маклей [1971] и Оден [1971б].

Пусть область $\mathscr{D}_{\mathscr{L}}$ состоит из функций $u(\mathbf{x}) \in C^2[a, b]$, которые удовлетворяют условиям $u(a) = u(b) = 0$. Заметим, что в силу этого условия

$$\langle u, \mathscr{L}v\rangle = -\int_a^b u\frac{\partial^2 v}{dx^2}dx = \int_a^b \left(\frac{du}{dx}\right)\left(\frac{dv}{dx}\right)dx.$$

Значит, оператор $\mathscr{L}$ симметричен, положительно определен и

$$\|u-v\|^2_{\mathscr{L}} = \int_a^b \left(\frac{d(u-v)}{dx}\right)^2 dx \leqslant (b-a)\max\left|\frac{d(u-v)}{dx}\right|^2. \quad (10.53)$$

В этом случае $p = 1$ и $r = 0$.

Предположим теперь, что отрезок $[a, b]$ разбит на E конечных элементов, длины которых суть $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_E$, и рассмотрим класс конечноэлементных представлений первого порядка вида

$$\bar{f}_{(e)}(x) = f^N_{(e)}\psi^{(e)}_N(x) = f^1_{(e)}\left(1 - \frac{h_e(x)}{\delta_e}\right) + f^2_{(e)}\frac{h_e(x)}{\delta_e}, \quad (10.54)$$

где с целью удобства опять используется символ x для обозначения локальных координат ($x^1_{(e)} = 0$, $x^2_{(e)} = \delta_e$). Предполагается, что функция $h_e(x)$ обладает свойствами

$$h_e(0) = 0, \qquad h_e(\delta_e) = \delta_e \quad (10.55)$$

и вид функции $h_e(x)$ один и тот же для всех элементов. Ясно, что если $h(x)$ задана, то функция $\bar{f}_{(e)}$ единственным образом определяется на элементе r_e своими значениями $f^N_{(e)}$ в узлах элемента.

Пусть $U(x)$ — произвольный элемент области $\mathscr{D}_{\mathscr{L}}$ (или ее расширения), и пусть $U^1, U^2, \ldots, U^G$ — значения $U(x)$ в глобальных узлах. Без ущерба для общности мы можем рассмотреть подынтервал, соединяющий узлы 1 и 2. С помощью теоремы Тэйлора легко показать, что

$$\frac{1}{\delta_e}(U^2 - U^1) = U'(x) + \frac{1}{2\delta_e}[U''(\bar{x})(\delta_e - x)^2 - U''(x^*)x^2],$$

где $U'(x) = dU/dx$, $U''(x) = d^2U/dx^2$, $x \in [x^1, x^2]$, $x \leqslant \bar{x} \leqslant \delta_e$ и $x^1 \leqslant x^* \leqslant x$.

Возвращаясь к (10.54) и временно опуская метку e, имеем

$$\bar{f}' = \frac{d\bar{f}}{dx} = h'(x)\frac{f^2 - f^1}{\delta}.$$

Таким образом, если $\bar{f}$ совпадает с $U(x)$ в узлах, то

$$\bar{f}'(x) - U'(x) = (h'(x) - 1)U'(x) + \\ + \frac{1}{2\delta}h'(x)[U''(\bar{x})(\delta - x)^2 - U''(x^*)x^2]$$

для $x \in r_e$. Пусть $|h'(x)| \leqslant A$, $|U'(x)| \leqslant B$ и $|U''(\bar{x})| \leqslant C$ для всех $x \in [a, b]$. Тогда

$$|\bar{f}' - U'| \leqslant B\,|h'(x) - 1| + D\delta,$$

где $D \leqslant AC$. Следовательно, если δ — мера мелкости связанной модели и $\bar{F}(x)$ — глобальная аппроксимация, соответствующая $\bar{f}_e(x)$, то

$$\|\bar{F} - U\|^2_{\mathscr{L}} \leqslant (b-a)\,[B\,|h' - 1| + D\delta]^2. \tag{10.56}$$

Значит, $\lim\limits_{\delta \to 0} \|\bar{F} - U\|_{\mathscr{L}} \neq 0$, *если* $h'(x)$ *не является по меньшей мере 1-эквивалентной единице*, т. е. $|h' - 1| \leqslant K\delta$.

В рассматриваемом примере $p = 1$, так что в соответствии с теоремой 10.6 достаточно использовать класс $\mathscr{F}^0$ конечноэлементных представлений (т. е. класс представлений, в которых задаются только значения самой функции в узловых точках и которые содержат функции, по крайней мере 1-эквивалентные полным полиномам степени $p = r + 1 = 1$, т. е. в нашем случае полиному первой степени $a + bx$). Действительно, если $\psi_1(x) = 1 - x/\delta$, то $h(x) = x$ и $|h' - 1| \equiv 0$. Однако *функция* $h(x)$ *должна быть лишь 1-эквивалентна* x.

Чтобы подчеркнуть это, заметим, что можно выбрать целое множество функций, удовлетворяющих условию (10.55). Например:

$$\begin{aligned}
&1^\circ\ h(x) = \delta_e \sin\frac{\pi x}{2\delta_e},\\
&2^\circ\ h(x) = \delta_e \frac{\sin x}{\sin \delta_e},\\
&3^\circ\ h(x) = x + x(x - \delta_e)^m,\\
&4^\circ\ h(x) = \delta_e\left(\frac{1 - e^{-x}}{1 - e^{-\delta_e}}\right)
\end{aligned} \tag{10.57}$$

и т. д. В примере 1 производная $h'(x)$ не является 1-эквивалентной единице, так как $|h'(x) - 1| = |1 - \pi/2 \cos(\pi x/2\delta_e)|$. Поэтому конечноэлементные модели, построенные с помощью функций такого типа, не будут полными по энергии. С другой стороны, в примерах 2° и 3° соответственно имеем $|h' - 1| \leqslant 2\delta_e^2/3 + 13\delta_e^4/90 + \ldots$ и $|h' - 1| \leqslant (m - 1)\,\delta_e^m$. Значит, при достаточно малом δ_e во втором примере h' будет 2-эквивалентной единице, а в третьем m-эквивалентной. Функция примера 4 тоже допустима, поскольку можно показать, что $h'(x) = 1 + O(\delta)$.

Примеры (10.57) и теорема 10.6 позволяют сделать интересные наблюдения:

1. Локальные интерполяционные функции не обязательно должны быть полиномами.

2. В тех случаях, когда локальные интерполяционные функции — полиномы, они не обязательно должны быть полными полиномами. Действительно, для функционалов класса C^{p-1} (или энергетических норм, содержащих производные порядка p) они должны лишь включать в себя полные полиномы степени $\geqslant p$.

Из теоремы 10.6 вытекает такой общий критерий выбора полных по энергии локальных интерполяционных функций [1]).

Теорема 10.7. *Пусть выполнены условия* а — в *теоремы* 10.6. *Тогда функции* $\bar{f}_{(e)}$ (x) *и всем ее частным производным до порядка* $p = r + 1$ *могут быть приданы в* r_e *значения, отличающиеся от произвольных постоянных не более чем членами порядка* δ_e.

Доказательство. Это утверждение непосредственно следует из теоремы 10.6, поскольку $\mathscr{F}^r$ содержит функции p (x), которые по крайней мере 1-эквивалентны полным полиномам степени p с произвольными коэффициентами. Например, чтобы придать постоянное значение K частной производной $\partial^{m+n}\bar{f}/(\partial x^1)^m (\partial x^2)^n$ порядка $m+n$, где $m+n \leqslant p$, можно просто приравнять коэффициент одночлена $(x^1)^m (x^2)^n$ полного полинома степени p величине $K/m!\, n!$, а все остальные коэффициенты полинома приравнять нулю.

---

[1]) При конечноэлементном исследовании изгиба пластин Бейзли, Ченг, Айронс и Зенкевич [1966] предложили в качестве критерия полноты («сходимости») условия, что функции перемещений не должны допускать «деформации» элемента в результате его жесткого движения» и что функции перемещений должны допускать постоянные «деформации» и кривизны в элементе. Аналогичные требования выдвигались ранее Айронсом и Дрейпером [1965]. Поскольку рассматриваемый ими функционал принадлежит классу C^1, их критерий означает требование допустимости постоянных значений функции перемещений и ее первых и вторых частных производных на каждом элементе. Доказательство для полиномиальных аппроксимаций позже было дано Арантесом э Оливейрой [1968]. Теорема 10.7 показывает, что эти постоянные значения должны допускаться только при $\delta \to 0$. К сожалению, многие авторы в последующем трактовали критерий, предложенный Бейзли и др., слишком буквально и использовали требования «жесткого движения» и «постоянства деформации» как фундаментальные условия полноты для *всех* конечноэлементных аппроксимаций полей перемещений. Однако нетрудно проверить, что можно построить удовлетворяющую требованиям полноты теоремы 10.7 конечноэлементную аппроксимацию поля перемещений упругого тела, которая не приводит к жесткому движению или постоянной деформации при конечном δ_e. В этом можно убедиться, беря в теореме 10.6 в качестве x^i криволинейные координаты (например цилиндрические, тогда $u_r = \text{const}$ не приводит ни к жесткому движению, ни к постоянной деформации, в то время как $u_r = a + br$ допустимо для задач класса C^0). Жесткие движения и постоянные деформации должны получаться только в пределе при $\delta \to 0$. С другой стороны, Мюррей [1970] показал на численных примерах, что включение жестких движений в элементы конечных размеров может существенно ускорить сходимость.

Условия теорем 10.6 и 10.7 представляют собой основу для построения конечноэлементных аппроксимаций. Важно, однако, добавить к ним требование *соответственности* [1]).

Определение 4. Семейство $\mathcal{F}^r$ конечноэлементных аппроксимаций называется *r-соответственным* (или просто *соответственным*), если на совокупности элементов, образующих связанную модель, глобальные аппроксимации $\overline{F}$ (x) и все их частные производные до порядка r включительно непрерывны на межэлементных границах.

Таким образом, соответственные конечноэлементные аппроксимации $\overline{F}$ (x) $\in C^2$ ($\overline{\mathcal{R}}$). Требование соответственности обусловлено упоминавшимся ранее обстоятельством, что в вариационной задаче класса C^{p-1} область определения функционала состоит из функций $u \in C^{p-1}$ ($\mathcal{R}$), частные производные которых порядка p принадлежат L_2 ($\mathcal{R}$); в случае нарушения этого требования могут появляться неограниченные энергетические нормы (см. примечание на стр. 128). С одной стороны, использование соответственных конечноэлементных аппроксимаций обеспечивает необходимую для решаемой задачи степень гладкости функций, но, с другой стороны, оно накладывает дополнительные ограничения на форму элементов. В п. 10.4 будут приведены примеры допустимых конечноэлементных аппроксимаций.

10.3. КОНЕЧНОЭЛЕМЕНТНЫЕ МОДЕЛИ ОПЕРАТОРНЫХ УРАВНЕНИЙ

В этом пункте кратко рассмотрены некоторые методы построения конечноэлементных моделей для уравнений вида (10.1) и (10.5) с линейными и нелинейными операторами. Методы, которые успешно могут использоваться для построения моделей, никоим образом не ограничиваются разобранными ниже примерами.

---

[1]) Термины «соответственность» (conforming) и «несоответственность» (nonconforming) в связи с непрерывностью конечноэлементных аппроксимаций введены в статье Бейзли, Ченга, Айронса и Зенкевича [1966]. Требование непрерывности было выдвинуто Мелошем [1963а], см. также Ки [1966]. Бейзли и др. показали, что в некоторых случаях требование непрерывности может быть чрезмерно сильным, однако их результаты указывают, что для несоответственных элементов сходимость может зависеть от их ориентации в конечноэлементной модели. Арантес э Оливейра [1968] отметил, что в некоторых случаях может допускаться разрывность производных порядка $r = p - 1$; например, в задачах с заданными условиями скачка на поверхностях, которые во всех измельчениях конечноэлементной модели являются межэлементными границами. Разрывность производных порядка r может допускаться на некоторых поверхностях внутри элемента для равномерных регулярных измельчений моделей из составных элементов (см. п. 10.4.6). См. также Айронс и Дрейпер [1965] и Клаф и Точер [1966].

Метод Ритца [1]). Наиболее часто для получения конечно-элементных аппроксимаций различных краевых задач используется метод Ритца. Существенные черты метода уже в значительной мере ясны из нашего обсуждения вопроса полноты в предыдущем пункте. Остановимся на них более подробно. Пусть $\mathscr{L}$ — симметричный линейный положительно ограниченный снизу оператор. Рассмотрим уравнение

$$\mathscr{L}u = f, \tag{10.58}$$

где f — элемент из $L_2(\mathscr{R})$, а область определения оператора $\mathscr{L}$ обозначается через $\mathscr{D}$ ($\mathscr{D} \equiv \mathscr{D}_{\mathscr{L}}$). Предположим, что решение u должно удовлетворять однородным краевым условиям на $\partial\mathscr{R}$. Как указывалось ранее, задача решения уравнения (10.58) может рассматриваться как задача минимизации функционала

$$J(u) = \langle \mathscr{L}u, u\rangle - 2\langle f, u\rangle \tag{10.59}$$

при условии, что решение u^* принадлежит $\mathscr{D}$ или сколь угодно близко к элементам множества $\mathscr{D}$ по норме $\|\cdot\|$. Здесь f — элемент пространства $\mathscr{H}$, причем $\mathscr{H}$ вещественно. Область $\mathscr{D}$ плотна в полном пространстве $\mathscr{H}_{\mathscr{L}}$, получаемом пополнением пространства со скалярным произведением $[u, v] = \langle \mathscr{L}u, v\rangle$ для элементов из $\mathscr{D}$. Пусть $\lambda = \min J(u)$. Последовательность $\{u^n\} \in \mathscr{H}_{\mathscr{L}}$ называется *минимизирующей последовательностью*, если $\lim\limits_{n\to\infty} J(u^n) = J(u^*) = \lambda$. Метод Ритца состоит из следующих этапов:

1. Определение полной по энергии системы элементов $(\varphi_1, \varphi_2, \ldots)$ в $\mathscr{H}_{\mathscr{L}}$. Элементы φ_i могут быть взяты из $\mathscr{D}$, поскольку $\mathscr{D}$ плотно в $\mathscr{H}_{\mathscr{L}}$. Пусть Φ — конечномерное подпространство, порожденное первыми n элементами системы.
2. Построение аппроксимации $u^n = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i\varphi_i$ для функции u^* в Φ с помощью выбора α_i, минимизирующего $J(u)$ в Φ. Можно показать [2]), что полученная таким образом последовательность аппроксимаций $\{u^n\}$ является минимизирующей последовательностью для $J(u)$. Кроме того, если оператор $\mathscr{L}$ положительно ограничен снизу, то $\lim\limits_{n\to\infty} \|u^* - u^n\|_{\mathscr{L}} = 0$.

[1]) Этот хорошо известный метод был предложен Ритцем [1908, 1909] как обобщение метода, использовавшегося Рэлеем [1877].

[2]) См. Михлин [1952]. Если $f_n \equiv \mathscr{L}u^n$ и оператор $\mathscr{L}$ неограничен, то может случиться, что $\lim\limits_{n\to\infty} \|f_n - f\| \neq 0$. Однако f_n сходится *слабо* к f в том смысле, что $\lim\limits_{n\to\infty} \langle f_n - f, g\rangle = 0$ для всех $g \in \mathscr{H}_{\mathscr{L}}$ или даже для всех $g \in \mathscr{H}$, если нормы $\|f_n\|$ ограничены в совокупности.

Предположим, что нам требуется построить конечноэлементное решение линейного уравнения (10.58). Начинаем с построения конечноэлементной модели $\overline{\mathcal{R}}$ для области $\mathcal{R} + \partial\mathcal{R}$ и модели для u:

$$U(\mathbf{x}) = \sum_{e=1}^{E} \overline{u}^{(e)}(\mathbf{x}) = U^{\Delta}\Phi_{\Delta}(\mathbf{x}),$$

$$\Phi_{\Delta}(\mathbf{x}) = \sum_{e=1}^{E} \overset{(e)}{\Omega}{}_{\Delta}^{N}\psi_{N}^{(e)}(\mathbf{x}), \tag{10.60}$$

$$u_{(e)}^{N} = \overset{(e)}{\Omega}{}_{\Delta}^{N}U^{\Delta};$$

здесь предполагается, что функции $\Phi_{\Delta}(x)$ полны по энергии. Локальной аппроксимацией для u на элементе r_e в соответствии с (10.60) будет

$$\overline{u}^{(e)}(\mathbf{x}) = u_{(e)}^{N}\psi_{N}^{(e)}(\mathbf{x}). \tag{10.61}$$

Пусть теперь $l^{(e)}$ — ограничение оператора $\mathcal{L}$ на функции, определенные на r_e. Тогда, если решение уравнения (10.58) минимизирует функционал (10.59), ограничение $J(u)$ на r_e можно записать в виде

$$j^{(e)}(u) = \langle l^{(e)}u,\ u\rangle - 2\langle u,\ f\rangle \tag{10.62}$$

и

$$J(u) = \sum_{e=1}^{E} j^{(e)}(u), \tag{10.63}$$

где под u и f понимаются их ограничения на r_e. Подставляя (10.61) в (10.62), получаем

$$j^{(e)}(u^{N}) = l_{MN}^{(e)}u_{(e)}^{M}u_{(e)}^{N} - 2f_{N}^{(e)}u_{(e)}^{N}, \tag{10.64}$$

где $M,\ N = 1,\ 2,\ \ldots,\ N_e$, а

$$l_{MN}^{(e)} = \langle l^{(e)}\psi_{M}^{(e)},\ \psi_{N}^{(e)}\rangle, \qquad f_{N}^{(e)} = \langle f,\ \psi_{N}^{(e)}\rangle. \tag{10.65}$$

Аналогично, подставляя (10.60) в (10.59), получаем для глобальной аппроксимации

$$J(U^{\Delta}) = L_{\Delta\Gamma}U^{\Delta}U^{\Gamma} - 2F_{\Delta}U^{\Delta}, \tag{10.66}$$

где $\Delta,\ \Gamma = 1,\ 2,\ \ldots,\ G$ и

$$L_{\Delta\Gamma} = \langle \mathcal{L}\Phi_{\Delta},\ \Phi_{\Gamma}\rangle, \qquad F_{\Delta} = \langle f,\ \Phi_{\Delta}\rangle. \tag{10.67}$$

В силу (10.63)

$$L_{\Delta\Gamma}U^{\Delta}U^{\Gamma} - 2F_{\Delta}U^{\Delta} = \sum_{e=1}^{E} \left(l_{NM}^{(e)}u_{(e)}^{N}u_{(e)}^{M} - 2f_{N}^{(e)}u_{(e)}^{N}\right) =$$

$$= \sum_{e=1}^{E} \left(l_{MN}^{(e)}\overset{(e)}{\Omega}{}_{\Delta}^{N}\overset{(e)}{\Omega}{}_{\Gamma}^{M}U^{\Delta}U^{\Gamma} - 2f_{N}^{(e)}\overset{(e)}{\Omega}{}_{\Delta}^{N}U^{\Delta}\right). \tag{10.68}$$

Локально $j^{(e)}(u^N)$ принимает минимальное значение, если

$$\frac{\partial j^{(e)}(u^N)}{\partial u^N_{(e)}} = 0 = 2l^{(e)}_{NM}u^M_{(e)} - 2f^{(e)}_N, \tag{10.69}$$

или

$$l^{(e)}_{NM}u^M_{(e)} = f^{(e)}_N. \tag{10.70}$$

С учетом (10.60) и (10.63) из (10.70) получаем глобальное требование

$$L_{\Delta\Gamma}U^\Gamma = F_\Delta, \tag{10.71}$$

откуда в соответствии с (10.66) следует, что $\partial J(U^\Delta)/\partial U^\Delta = 0$. Решив (10.71) относительно U^Γ, получаем функцию $U^\Gamma\Phi_\Gamma(\mathbf{x})$, являющуюся аппроксимацией Ритца для решения u^* уравнения (10.58) в подпространстве Φ.

Кратко рассмотрим вопрос сходимости последовательности аппроксимаций Ритца. Как и в предыдущем пункте, рассмотрим последовательность подпространств Φ^1, Φ^2, ... пространства $\mathscr{H}$, порождаемых функциями $\Phi^1_\Delta(\mathbf{x})$, $\Phi^2_\Delta(\mathbf{x})$, ..., которые строятся из локальных конечноэлементных аппроксимаций обычным образом. Эта последовательность получается в результате использования регулярных равномерных измельчений модели $\overline{\mathscr{R}}$, мера мелкости которых $\delta \to 0$; предполагается, что базисные функции каждого подпространства r-соответственны и полны по энергии в смысле теоремы 10.6.

Пусть $u^* = u^*(\mathbf{x})$ — функция в $\mathscr{H}$, которая действительно минимизирует функционал $J(u)$; пусть $\overline{U} = \overline{U}(\mathbf{x})$ — глобальная конечноэлементная аппроксимация u^*, которая минимизирует $J(u)$ в n-мерном подпространстве Φ^n, определяемом допустимой конечноэлементной моделью; и пусть $\overline{G} = \overline{G}(\mathbf{x})$ — элемент из Φ^n, совпадающий с функцией u^* и ее главными производными в узловых точках. Ограничением $\overline{g}_e(\mathbf{x})$ функции $\overline{G}(\mathbf{x})$ на r_e является функция, определяемая соотношением (10.43). Поскольку по предположению множества базисных функций $\Phi^1_\Delta(\mathbf{x})$, $\Phi^2_\Delta(\mathbf{x})$, ..., порождаемых равномерными регулярными измельчениями, полны по энергии (относительно некоторого содержащего u^* класса функций), можно ввиду (10.52) для любого $\varepsilon > 0$ найти такое целое N, что расстояние по энергии от u^* до $\overline{G}$ будет меньше $\varepsilon^{1/2}$ при $n > N$, где n — размерность подпространства Φ^n, т. е.

$$d_{\mathscr{L}}(u^*, \overline{G}) < \varepsilon^{1/2} \quad \text{при } n > N. \tag{10.72}$$

Тогда поскольку $J(\overline{G}) = d^2_{\mathscr{L}}(u^*, \overline{G}) - \|u^*\|^2_{\mathscr{L}} = d^2_{\mathscr{L}}(u^*, \overline{G}) + J(u^*)$ (см. (10.8)), то

$$J(\overline{G}) - J(u^*) < \varepsilon \quad \text{при } n > N, \tag{10.73}$$

или $\lim\limits_{n\to\infty} J(\bar{G}^{(n)}) = J(u^*)$. [Напомним, что $d_{\mathscr{L}}(u^*, \bar{G}) \geqslant 0$.] Ясно, что $J(u^*) \leqslant J(\bar{U}) \leqslant J(\bar{G})$; значит,

$$J(\bar{U}) - J(u^*) \leqslant J(\bar{G}) - J(u^*). \qquad (10.74)$$

Таким образом, при $n > N$ выполняется неравенство $J(\bar{U}) - J(u^*) < \varepsilon$. Следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty} J(\bar{U}^n) = J(u^*) \equiv \min J(u)$, т. е. последовательность конечноэлементных аппроксимаций функционала $J(u)$ сходится к минимуму $J(u^*)$, если базисные функции $\Phi_\Delta(\mathbf{x})$ полны по энергии. Заметим также, что если $\mathscr{H}$ вещественно, а оператор $\mathscr{L}$ самосопряжен, то

$$d^2_{\mathscr{L}}(\bar{U}, u^*) = [\bar{U} - u^*, \bar{U} - u^*] = [\bar{U}, \bar{U}] - 2[\bar{U}, u^*] + [u^*, u^*] = J(\bar{U}) - J(u^*). \qquad (10.75)$$

Поэтому $d^2_{\mathscr{L}}(\bar{U}^{(n)}, u^*) < \varepsilon$ при $n > N$, и расстояние по энергии между $\bar{U}^{(n)}$ и u^* стремится к нулю при неограниченном возрастании n. Конечно, может случиться, что $\mathscr{L}\bar{U}^{(n)} = f^{(n)}$ не сходится к $f = \mathscr{L}u^*$ (см. Михлин [1952]).

Отметим, что если измельчения $\bar{\mathscr{R}}^{\Gamma}$ построены так, что $\Phi^1 \subset \Phi^2 \subset \ldots \Phi^n \subset \ldots$, то соответствующие аппроксимации Ритца обладают свойством

$$J(\bar{U}^1) \geqslant J(\bar{U}^2) \geqslant \ldots J(\bar{U}^n) \geqslant \ldots \geqslant J(u^*). \qquad (10.76)$$

Сходимость в этом случае монотонна [1]). Однако монотонная сходимость не означает сходимости к $J(u^*)$. Тем не менее можно утверждать, что если $\Phi^{i+1} \supset \Phi^i$, $i = 1, 2, \ldots$, и если базисные функции аппроксимаций полны по энергии относительно некоторого содержащего u^* класса функций, то $J(\bar{U}^n)$ монотонно сходится к $J(u^*)$.

Метод взвешенных невязок [2]). Общий метод построения конечноэлементных моделей нелинейных уравнений содержит в себе идею взвешенных невязок. Рассмотрим, например, уравнение

$$\mathscr{F}(u) = f, \qquad (10.77)$$

где $\mathscr{F}$ — нелинейный оператор, определенный на некотором множестве $\mathscr{D}$. Пусть

$$\bar{u}_{(e)}(\mathbf{x}) = u^N_{(e)}\psi^{(e)}_N(\mathbf{x}) \qquad (10.78)$$

[1]) Условие $\Phi^{i+1} \supset \Phi^i$ в качестве достаточного условия монотонной сходимости соответственных конечноэлементных аппроксимаций предложил Мелош [1963а]. Это условие исследовал также Ки [1966].

[2]) Подробный обзор применений метода взвешенных невязок дан Финлейсоном и Скривеном [1966]. Изложение метода можно найти у Эймса [1965] или Крэндалла [1956]. Приложения этого метода к конечноэлементным аппроксимациям линейных дифференциальных уравнений рассматривались Леонардом и Брэмлеттом [1970].

— конечноэлементная аппроксимация для u на типичном конечном элементе r_e; для удобства изложения предположим, что $\bar{u}_{(e)}(\mathbf{x}) \in \mathcal{D}_{\mathcal{P}^{(e)}}$, где $\mathcal{P}^{(e)}$ — ограничение оператора $\mathcal{P}$ на функции, определенные в r_e. Функция

$$r_{(e)}(\mathbf{x}) = \mathcal{P}^{(e)}(\bar{u}_{(e)}) - f^{(e)} \tag{10.79}$$

называется *невязкой*, соответствующей элементу r_e. Ясно, что если $r_{(e)}(\mathbf{x}) = 0$, то $\bar{u}_{(e)}$ является решением уравнения (10.77) в r_e. Метод взвешенных невязок состоит в выборе множества *весовых функций* $w_N^{(e)}(\mathbf{x})$, $N = 1, 2, \ldots, N_e$, таких, что $r_{(e)}(\mathbf{x})$ обращается в нуль *в смысле некоторого взвешенного среднего* в r_e. Как правило, требуют, чтобы

$$\int_{r_e} r_{(e)}(\mathbf{x})\, w_N^{(e)}(\mathbf{x})\, dr_e = 0, \tag{10.80}$$

или, с учетом (10.79),

$$\mathfrak{p}_M^{(e)}(u_{(e)}^N) - f_{M(w)}^{(e)} = 0, \tag{10.81}$$

где

$$\mathfrak{p}_M^{(e)}(u_{(e)}^N) = \int_{r_e} \mathcal{P}^{(e)}(\psi_N^{(e)} u_{(e)}^N)\, w_M^{(e)}(\mathbf{x})\, dr_e, \tag{10.82а}$$

$$f_{M(w)}^{(e)} = \int_{r_e} f^{(e)}(\mathbf{x})\, w_M^{(e)}(\mathbf{x})\, dr_e \tag{10.82б}$$

и $\mathfrak{p}_M^{(e)}(u_{(e)}^N)$ в общем случае нелинейно относительно $u_{(e)}^N$. Глобально имеем

$$W_\Delta(\mathbf{x}) = \sum_{e=1}^{E} \overset{(e)}{\Omega}{}_\Delta^N w_N^{(e)}(\mathbf{x}), \qquad u_{(e)}^N = \overset{(e)}{\Omega}{}_\Delta^N U^\Delta, \tag{10.83а, б}$$

$$\mathfrak{P}_\Delta(U^\Gamma) = \sum_{e=1}^{E} \overset{(e)}{\Omega}{}_\Delta^M \mathfrak{p}_M^{(e)}(\overset{(e)}{\Omega}{}_\Gamma^N U^\Gamma), \qquad F_\Delta^{(w)} = \sum_{e=1}^{E} \overset{(e)}{\Omega}{}_\Delta^N f_{N(w)}^{(e)}, \tag{10.83в, г}$$

или

$$\mathfrak{P}_\Delta(U^\Gamma) - F_\Delta^{(w)} = 0. \tag{10.84}$$

Решения нелинейных уравнений (10.84) обеспечивают глобальное обращение в нуль взвешенной средней невязки, т. е. выполнение равенства

$$\int_{\overline{\mathcal{R}}} [\mathcal{P}(U^\Gamma \Phi_\Gamma(\mathbf{x})) - f(\mathbf{x})]\, W_\Delta(\mathbf{x})\, d\overline{\mathcal{R}} = 0. \tag{10.85}$$

Различные типы методов осреднения различаются выбором весовых функций $W_\Delta(\mathbf{x})$.

Заметим, что (10.80) и (10.85) являются условиями ортогональности: невязка делается ортогональной некоторому подпространству, порождаемому весовыми функциями W_Δ. Природа подпространства опять-таки зависит от выбора этих весовых функций. Идея поиска таких элементов $\bar{u}$ в линейном подпространстве Φ, что $u - \bar{u}$ ортогонально Φ, основывается на классической теореме о проекциях, фундаментальной для большинства методов осреднения.

Теорема 10.8. *Пусть $\mathscr{H}$ — гильбертово пространство и Φ — замкнутое подпространство в $\mathscr{H}$. Для каждого $u \in \mathscr{H}$ существует единственный элемент $\bar{u}^* \in \Phi$, такой, что $\| u - \bar{u}^* \| < \| u - \bar{u} \|$ при всех других $\bar{u} \in \Phi$. Кроме того, необходимым и достаточным условием минимальности расстояния $\| u - \bar{u}^* \|$ является ортогональность $u - \bar{u}^*$ подпространству Φ.*

Доказательство. Вариант этой теоремы был доказан в п. 9.3. Сейчас приведем более подробное доказательство. Сначала предположим, что элемент $\bar{u}^* \in \Phi$ минимизирует $d^2(u, \bar{u}) = \| u - \bar{u} \|$, но $u - \bar{u}^*$ не ортогонально Φ. Тогда $\langle u - \bar{u}^*, \bar{u} \rangle = \lambda \neq 0$. Пусть $\bar{u}_1 = \bar{u}^* + \lambda\bar{u}$. В этом случае

$$\| u - \bar{u}_1 \|^2 = \| u - \bar{u}^* \|^2 - \langle u - \bar{u}^*, \lambda\bar{u} \rangle - \langle \lambda\bar{u}, u - \bar{u}^* \rangle + |\lambda|^2 =$$
$$= \| u - \bar{u}^* \|^2 - |\lambda|^2 < \| u - \bar{u}^* \|^2;$$

здесь мы предположили, что $\| \bar{u} \| = 1$, что не уменьшает общности. Это соотношение показывает, что если $u - \bar{u}^*$ не ортогонально Φ, то $\bar{u}^*$ не минимизирует $d^2(u, \bar{u})$, вопреки первоначальному предположению. Таким образом, если $\bar{u}^*$ минимизирует $d^2(u, \bar{u})$, то $u - \bar{u}^*$ ортогонально Φ. Для того чтобы доказать, что если $u - \bar{u}^*$ ортогонально Φ, то $\bar{u}^*$ — единственный вектор в Φ, минимизирующий $d^2(u, \bar{u})$, заметим, что для любого $\bar{u} \in \Phi$

$$\| u - \bar{u} \|^2 = \| u - \bar{u}^* + \bar{u}^* - \bar{u} \|^2 = \| u - \bar{u}^* \|^2 + \| \bar{u} - \bar{u}^* \|^2.$$

Следовательно, $\| u - \bar{u} \| > \| u - \bar{u}^* \|$ при $\bar{u} \neq \bar{u}^*$.

Отметим, что единственность и ортогональность не зависят от полноты пространства $\mathscr{H}$. В случае когда $\mathscr{H}$ полно (т. е. когда $\mathscr{H}$ — гильбертово пространство), можно доказать и существование $\bar{u}^*$. Пусть $\lambda = \inf \| u - \bar{u} \|$, $\bar{u} \in \Phi$, и пусть $\{\bar{u}^n\}$ — последовательность в $\mathscr{H}$, такая, что $\lim_{n\to\infty} \| u - \bar{u}^n \| \to \lambda$.

Тогда

$$\| (\bar{u}^m - u) + (u - \bar{u}^n) \|^2 + \| (\bar{u}^m - u) - (u - \bar{u}^n) \|^2 =$$
$$= 2 \| \bar{u}^m - u \|^2 + 2 \| u - \bar{u}^n \|^2,$$

или

$$\|\bar{u}^m-\bar{u}^n\|^2\leqslant 2\|\bar{u}^m-u\|^2+2\|u-\bar{u}^n\|^2-4\left\|u-\frac{(\bar{u}^n+\bar{u}^m)}{2}\right\|^2.$$

Поскольку Ф — линейное подпространство, $\bar{u}^m+\bar{u}^n \in$ Ф. Отсюда следует, что

$$\|\bar{u}^m-\bar{u}^n\|^2\leqslant 2\|\bar{u}^m-u\|^2+2\|\bar{u}^n-u\|^2-4\lambda^2,$$

и так как $\|\bar{u}^m-u\|\to\lambda$ при $m\to\infty$, это означает, что $\|\bar{u}^m-\bar{u}^n\|\to 0$ при $m, n\to\infty$. Поэтому $\{\bar{u}^m\}$ является последовательностью Коши в замкнутом подпространстве Ф. Следовательно, она имеет предельную точку $\bar{u}^* \in$ Ф. Поскольку $\|u-\bar{u}^n\|$ непрерывна, $\|u-\bar{u}^*\|=\lambda$, чем и заканчивается доказательство.

Метод Галёркина. Пожалуй, наиболее мощным средством получения приемлемых конечноэлементных моделей нелинейных уравнений является метод осреднения Галёркина [1]). Являясь по существу частным случаем метода взвешенных невязок (и обобщением метода Ритца), он основан на рациональном выборе весовых функций w_N (x) в соответствии с видом используемой конечноэлементной аппроксимации.

Основы метода удобно показать на примере, в котором $\hat{\mathscr{F}}(u) = \mathscr{F}(u)-f$ — потенциальный оператор, а $\mathscr{F}(u)$ — нелинейный оператор из уравнения (10.77). Как отмечалось в п. 10.1, оператор $\hat{\mathscr{F}}(u)$ можно считать градиентом функционала $K(u)$, критическими точками которого являются решения уравнения $\hat{\mathscr{F}}(u)=0$. Поэтому на основании (10.26)

$$\langle \mathscr{F}(u^*)-f, h\rangle = 0, \qquad (10.86)$$

где h — произвольный элемент пространства, которому принадлежат u, а u^* — критическая точка функционала $K(u)$. Если конечноэлементная аппроксимация $\bar{u}^{(e)}$ (x), определяемая формулой (10.78), только приближенно удовлетворяет соотношению (10.77), то определяемая формулой (10.79) невязка $r_{(e)}$ (x) не обязательно будет ортогональна всем h. Однако коэффициенты аппроксимации

1) Метод был описан в статье Галёркина [1915] [а еще раньше — в работах Бубнова *[1913 1914], почему его правильнее было бы называть методом Бубнова. — *Ред.*] и использовался в применении к конечным элементам Оденом [1967а, в, 1969б], Сабо [1969], Сабо и Ли [1969а, б] и другими. В статьях Сабо этот метод применяется к построению конечноэлементных моделей задач плоской статической упругости и изгиба упругих плит, когда он по существу совпадает с методом Ритца. Однако метод Галёркина естественно приводит к более явным формулировкам условий на границах конечных элементов. Большинство из конечноэлементных формулировок глав III и V этой книги могут рассматриваться как приложения метода Галёркина.

$u^N_{(e)}$ можно выбрать так, чтобы невязка $r_{(e)}$ (x) была ортогональна конечномерному подпространству, порождаемому интерполяционными функциями $\psi^{(e)}_N$ (x) [или, что то же самое, Φ_Δ (x)]. Локально это равносильно соотношению

$$\langle \mathcal{F}^{(e)} (\bar{u}_{(e)}) - f^{(e)},\ h \rangle = 0. \tag{10.87}$$

Но поскольку теперь $h = h$ (x) — произвольный элемент из Φ, его можно представить в виде $h = h^N_{(e)} \psi^{(e)}_N$ (x). Поэтому

$$\langle \mathcal{F}^{(e)} (\bar{u}_{(e)}) - f^{(e)},\ \psi^{(e)}_N \rangle h^N_{(e)} = 0. \tag{10.88}$$

Равенство (10.88) должно выполняться при любых коэффициентах $h^N_{(e)}$. Это означает, что

$$\langle r_{(e)},\ \psi^{(e)}_N \rangle \equiv \langle \mathcal{F}^{(e)} (\bar{u}_{(e)}) - f^{(e)},\ \psi^{(e)}_N \rangle = 0. \tag{10.89}$$

Таким образом, мы получили систему нелинейных уравнений для коэффициентов $u^N_{(e)}$. Ясно, что в случае, когда $\langle u, v \rangle = \int_{r_e} uv\, dr_e$, (10.89) принимает вид

$$\int_{r_e} r_{(e)} (\mathbf{x})\, \psi^{(e)}_N (\mathbf{x})\, dr_e = 0. \tag{10.90}$$

Сравнивая это уравнение с (10.80), видим, что метод Галёркина по существу является методом взвешенных невязок с весовыми функциями $w^N_{(e)}$ (x) $= \psi^{(e)}_N$ (x). Отметим также, что в этом случае формулы (10.82) для $\mathfrak{p}^{(e)}_M (u^N_{(e)})$ и $f^{(e)}_{M(w)}$ принимают вид

$$\mathfrak{p}^{(e)}_M (u^N_{(e)}) = \int_{r_e} \mathcal{F}^{(e)} (\psi^{(e)}_N u^N_{(e)})\, \psi^{(e)}_M (\mathbf{x})\, dr_e, \qquad f^{(e)}_{M(w)} = \int_{r_e} f^{(e)} (\mathbf{x})\, \psi^{(e)}_M (\mathbf{x})\, dr_e. \tag{10.91}$$

Наконец, заметим, что если $\mathcal{F}$ содержит производные по параметру t (времени) и $\bar{u}^{(e)} = u^N_{(e)} (t)\, \psi^{(e)}_N$ (x), то метод Галёркина приводит к системам дифференциальных уравнений (10.81) [где $\mathfrak{p}^{(e)}_M (u^N_{(e)} (t))$ и $f^{(e)}_{M(w)} (t)$ определяются формулами (10.91)] относительно $u^N_{(e)} (t)$ для каждого конечного элемента.

Метод наименьших квадратов. В качестве последнего примера метода для построения конечноэлементных моделей кратко рассмотрим метод наименьших квадратов. В этом методе мерой ошибки e аппроксимации $\bar{u}^{(e)}$ является квадрат нормы невязки:

$$e = \| r_{(e)} \|^2 = \langle r_{(e)},\ r_{(e)} \rangle. \tag{10.92}$$

Метод наименьших квадратов заключается в том, что коэффициенты $u^N_{(e)}$ выбирают таким образом, чтобы мера ошибки e была мини-

мальной. Используя (10.79), получаем

$$e=\langle \mathcal{F}^{(e)}(\psi_N^{(e)}u_{(e)}^N)-f^{(e)},\quad \mathcal{F}^{(e)}(\psi_M^{(e)}u_{(e)}^M)-f^{(e)}\rangle. \tag{10.93}$$

Условие

$$\frac{\partial e}{\partial u_{(e)}^N}=0=2\left\langle r_{(e)}, \frac{\partial r_{(e)}}{\partial u_{(e)}^N}\right\rangle \tag{10.94}$$

приводит к системе уравнений

$$Q_N^{(e)}(u_{(e)}^M)-f^{*(e)}_N=0, \tag{10.95}$$

где

$$Q_N^{(e)}(u_{(e)}^M)=\left\langle \mathcal{F}^{(e)}(\bar{u}^{(e)}), \frac{\partial \mathcal{F}^{(e)}(\bar{u}^{(e)})}{\partial u_{(e)}^N}\right\rangle, \quad f^{*(e)}_N=\left\langle f^{(e)}, \frac{\partial \mathcal{F}^{(e)}(\bar{u}^{(e)})}{\partial u_{(e)}^N}\right\rangle. \tag{10.96а, б}$$

Соответствующая (10.95) глобальная форма уравнений получается обычным способом. Сравнивая (10.94) с (10.80), видим, что метод наименьших квадратов по существу есть частный случай метода взвешенных невязок, соответствующий выбору весовых функций $w_N^{(e)}(\mathbf{x})=\partial r_{(e)}/\partial u_{(e)}^N=\partial \mathcal{F}^{(e)}(\bar{u}^{(e)})/\partial u_{(e)}^N$.

10.4. ПРИМЕРЫ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

В п. 10.2 было установлено, что соответственные конечноэлементные аппроксимации, которые удовлетворяют условиям полноты, даваемым теоремами 10.6 и 10.7, можно использовать для построения приемлемых приближенных решений большого класса физических задач. В этом пункте мы дадим несколько примеров локальных интерполяционных функций $\overset{0}{\psi}_N(\mathbf{x})$, $\overset{i}{\psi}_N(\mathbf{x})$, ..., $\psi^{i_1\ldots i_r}_N(\mathbf{x})$, которые приводят к глобальным базисным функциям, удовлетворяющим этим условиям [т. е. $\bar{F}(\mathbf{x})\in C^r(\bar{\mathcal{R}})$ и функции $\bar{F}(\mathbf{x})$ с ее производными до порядка $r+1$ можно на каждом элементе r_e придавать значения, по крайней мере 1-эквивалентные произвольным постоянным] [1]). Для удобства мы будем рассматривать приближения скалярной функции $U(\mathbf{x})$ локальными аппроксимациями $\bar{u}^{(e)}(\mathbf{x})$, имея в виду, что такие же локальные интерполяционные функции $\overset{0}{\psi}_N(\mathbf{x})$, $\overset{i}{\psi}_N(\mathbf{x})$ ... можно использовать и для представления векторных и тензорных функций (см. примеры 7.4 и 7.5). Кроме того, поскольку мы будем рассматривать

---

[1]) Каталоги различных приемлемых конечных элементов составлены целым рядом авторов. См., например, Аргирис [1966а], Аргирис, Фрид и Шарпф [1968а, 1968б, 1968в], Аргирис и Шарпф [1968], Аргирис и Фрид [1968], Аргирис, Бак, Шарпф, Хилбер и Маречек [1969], Зенкевич и Ченг [1967], Фелиппа [1966], Фелиппа и Клаф [1968].

типичный конечный элемент, идентификационную метку элемента временно писать не будем. Отметим, что наиболее часто используемой функциональной формой интерполяционных функций являются полиномы [1]). Это объясняется их простотой, удобствами их использования при вычислениях (например, при численном интегрировании) и тем, что при полиномиальных представлениях, как правило, проще проверять выполнение условий полноты и соответственности.

10.4.1. Симплексные модели [2]). Простейшими среди всех конечных элементов являются так называемые симплексные модели [3]), образующие топологические симплексы в том пространстве, в которое вложен конечный элемент. При симплексных представлениях локальные поля u (x) аппроксимируются линейными относительно координат x^i функциями:

$$u(\mathbf{x}) = a_0 + a_i x^i, \qquad i = 1, 2, \ldots, k. \tag{10.97}$$

Здесь $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_k$ суть $k+1$ постоянных, которые надо определить. В k-мерном пространстве фиксируем $k+1$ узловых точек ($N_e = k+1$) и вычисляем значения (10.97) в каждом узле $\mathbf{x}^N$:

$$u(\mathbf{x}^N) \equiv u^N = a_0 + a_i x^{N_i}, \qquad i = 1, 2, \ldots, k, \qquad N = 1, 2, \ldots, k+1. \tag{10.98a}$$

Соотношения (10.98a) представляют собой систему $k+1$ уравнений относительно $k+1$ величин $a_0, a_1, \ldots, a_k$. Удобно переписать

---

[1]) Подчеркнем, что в общем случае интерполяционные функции не обязательно должны быть полиномами. Действительно, на это ясно указывают примеры (10.57). Крахула и Полемус [1968], например, использовали функции получающиеся добавлением к основным полиномам подходящих рядов Фурье. Общие вопросы применения полиномиальных аппроксимаций в методе конечных элементов рассмотрены Фелиппой [1966], Данни [1968] и Сильвестером [1969].

[2]) *Симплексом* в k-мерном пространстве называется выпуклое множество S, определяемое совокупностью $k+1$ вершин (узлов) $N_1, N_2, \ldots, N_{k+1}$, не лежащих в одной $(k-1)$-мерной гиперплоскости. Это множество S состоит из всех точек y вида $y = \sum_{i=1}^{k+1} c_i N_i$, где $c_i \geqslant 0$ и $\sum_{i=1}^{k+1} c_i = 1$. См., например, Грейвс [1956, стр. 146—150] или Гройб [1963, стр. 253, 254]. В эвклидовых пространствах $\mathscr{E}^k$ симплексами являются, например, тетраэдр (4 узла) в трехмерном пространстве $\mathscr{E}^3$, треугольник (три узла) в двумерном пространстве $\mathscr{E}^2$ и отрезок прямой (2 узла) в одномерном пространстве $\mathscr{E}^1$.

[3]) Симплексные модели связаны с использованием линейных интерполяционных функций в элементе, и они одними из первых применялись в методе конечных элементов. См., например, Тэрнер, Клаф, Мартин и Топп [1956], Синг [1957], Галлагер, Пэдлог и Бейлард [1962]. Свойства симплексных аппроксимаций исследовались Висманном [1963], Оденом [1967a, 1967б, 1969a], Фелиппой [1966], Оденом и Агирре-Рамиресом [1969] и другими. Симплексные модели для пространств более высокой размерности обсуждались Оденом [1969a] и Фридом [1969a].

(10.98a) в матричной форме

$$\begin{bmatrix} 1 & x^{11} & x^{12} & \dots & x^{1k} \\ 1 & x^{21} & x^{22} & \dots & x^{2k} \\ 1 & x^{31} & x^{32} & \dots & x^{3k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x^{k+1,1} & x^{k+1,2} & \dots & x^{k+1,k} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u^1 \\ u^2 \\ u^3 \\ \dots \\ u^{k+1} \end{bmatrix}, \quad (10.98б)$$

или

$$\mathbf{Ca} = \mathbf{u}, \quad (10.98в)$$

где $\mathbf{C}$ — матрица коэффициентов уравнений (10.48б) размера $(k+1) \times (k+1)$. Уравнение (10.98в) будет иметь единственное решение при условии, что матрица $\mathbf{C}$ невырождена. Таким образом, для единственности требуется, чтобы

$$\det \mathbf{C} \neq 0. \quad (10.99)$$

Условие (10.99) можно трактовать как условие того, что $k+1$ узловых точек $\mathbf{x}^N$ не лежат в одной $(k-1)$-мерной гиперплоскости.

Предполагая, что (10.99) выполнено, решаем уравнение (10.98в) и получаем

$$\mathbf{a} = \mathbf{C}^{-1}\mathbf{u}. \quad (10.100)$$

Соотношение (10.100) позволяет линейно выразить коэффициенты $a_0, a_1, \dots, a_k$ через узловые значения u^N локальной функции и координаты узловых точек x^{Ni}. Подставляя (10.100) в (10.97), после упрощений получаем искомую локальную аппроксимацию [1]):

$$u(\mathbf{x}) = u^N \psi_N(\mathbf{x}), \qquad N = 1, 2, \dots, k+1, \quad (10.101а)$$

где в рассматриваемом случае интерполяционные функции линейны относительно локальных координат x^i:

$$\psi_N(\mathbf{x}) = a_N + b_{Ni} x^i. \quad (10.101б)$$

Величины a_N и b_{Ni} с помощью (10.100) выражаются через координаты узлов x^{Ni}. В частности, если C_{ij} $(i, j = 1, 2, \dots, k+1)$ — элемент i-й строки и j-го столбца матрицы $\mathbf{C}$, то [2])

$$a_N = \frac{1}{C} \operatorname{cofactor}(C_{N1}), \quad (10.102а)$$

$$b_{Ni} = \frac{1}{C} \operatorname{cofactor}(C_{N(i+1)}), \quad (10.102б)$$

---

[1]) Такие линейные интерполяционные функции иногда называются *барицентрическими координатами* симплекса. См. Гройб [1963, стр. 253].

[2]) Ниже cofactor означает «алгебраическое дополнение». — *Прим. ред.*

где

$$C = \det \mathbf{C}. \tag{10.102в}$$

Функции $\psi_N(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in r_e$, обладают следующими свойствами:

$$\psi_N(\mathbf{x}) \geqslant 0, \qquad \sum_{N=1}^{k+1} \psi_N(\mathbf{x}) = 1. \tag{10.103а, б}$$

Кроме того, для любой узловой точки $\mathbf{x}^M \in r_e$

$$\psi_N(\mathbf{x}^M) = \delta_N^M. \tag{10.103в}$$

Кратко суммируем важные свойства симплексной модели.

1. Число N_e узловых точек симплексного элемента на единицу больше размерности пространства, в котором располагается элемент ($N_e = k + 1$).
2. Локальные аппроксимации $u(\mathbf{x})$ [и интерполяционные функции $\psi_N(\mathbf{x})$] являются линейными функциями локальных координат x^i.
3. Выполняются требования полноты и непрерывности. Линейная функция в $\mathscr{E}^k$ единственным образом определяется заданием ее значений в $k + 1$ точках, находящихся в общем положении. Поскольку локальные функции $u(\mathbf{x})$ линейны на границах элемента, соединение двух симплексных элементов вместе сводится к заданию одинаковых узловых значений соседних локальных аппроксимаций в двух точках на их межэлементной границе. Значит, локальные поля совпадают во всех точках межэлементных границ, а глобальные базисные функции $\Phi_\Delta(\mathbf{x})$ всюду непрерывны. Чтобы проверить, что (10.101) может представлять постоянные значения $u^{(e)}(\mathbf{x})$ на элементе, достаточно положить каждое узловое значение $u^N = \lambda$, где λ — произвольная постоянная. Тогда в силу (10.103б) $u(\mathbf{x}) = \lambda$ для всех $\mathbf{x} \in r_e$.
4. Требование непрерывности, упомянутое в (3), выполняется при произвольной ориентации элемента, т. е. для выполнения требований непрерывности не обязательно, чтобы границы элемента были координатными линиями. (Как будет видно впоследствии, этим свойством обладают не все соответственные конечные элементы.)
5. Интерполяционные функции $\psi_N(\mathbf{x})$ удовлетворяют соотношениям (10.103) (это свойство, конечно, присуще не только симплексным моделям).

Рассмотрим некоторые частные виды интерполяционных функций (10.101б) для пространств размерности $k \leqslant 3$.

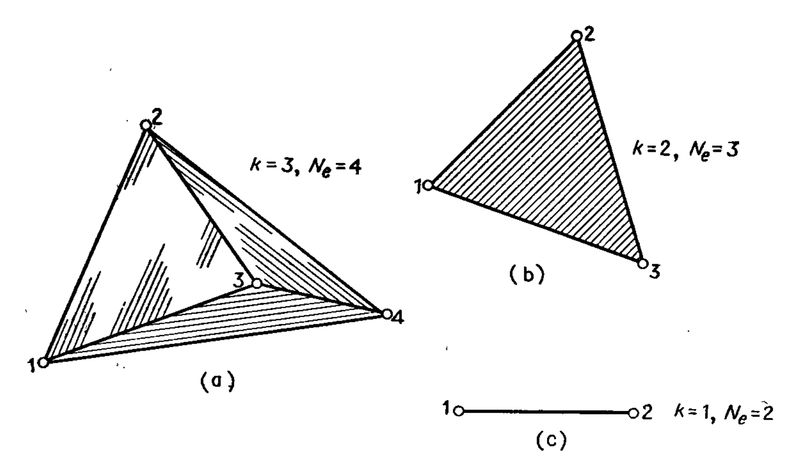


Рис. 10.1. Симплексные конечные элементы, $N_e = k + 1$.

Симплекс в трехмерном пространстве. В трехмерном эвклидовом пространстве симплексная модель представляет собой тетраэдр с четырьмя узлами (см. рис. 10.1, *a*). Имеем

$$\mathbf{C}=\begin{bmatrix} 1 & x^{11} & x^{12} & x^{13} \\ 1 & x^{21} & x^{22} & x^{23} \\ 1 & x^{31} & x^{32} & x^{33} \\ 1 & x^{41} & x^{42} & x^{43} \end{bmatrix} \tag{10.104}$$

и

$$a_N = \frac{1}{6C}\varepsilon_{NRST}\varepsilon_{ijk}x^{Ri}x^{Sj}x^{Tk}, \tag{10.105а}$$

$$b_{Ni} = \frac{-1}{6C}\varepsilon_{NRST}\varepsilon_{mjk}\beta_{(i)}^{Rm}\beta_{(i)}^{Sj}\beta_{(i)}^{Tk}, \tag{10.105б}$$

где ε_{ijk} и ε_{NRST} соответственно трех- и четырехмерные перестановочные символы, $N, R, S, T = 1, 2, 3, 4$; $i, j, k, m = 1, 2, 3$; $\beta_{(i)}^{Rm} = x^{Rm}$, если $i = m$, и $\beta_{(i)}^{Rm} = 1$, если $i \neq m$. Далее,

$$|C| = |\det \mathbf{C}| = 6v, \tag{10.105в}$$

где v — объем тетраэдра.

Симплекс в двумерном пространстве. В двумерном эвклидовом пространстве симплекс — это треугольник с тремя узлами (см. рис. 10.1, *b*). Имеем

$$\{a_N\} = \frac{1}{2A}\begin{bmatrix} x^{21}x^{32} - x^{31}x^{22} \\ x^{31}x^{12} - x^{11}x^{32} \\ x^{11}x^{22} - x^{21}x^{12} \end{bmatrix}, \tag{10.106а}$$

$$[b_{Ni}] = \frac{1}{2A}\begin{bmatrix} x^{22}-x^{32} & x^{31}-x^{21} \\ x^{32}-x^{12} & x^{11}-x^{31} \\ x^{12}-x^{22} & x^{21}-x^{11} \end{bmatrix}, \qquad (10.106б)$$

$$2A = \det C = \det\begin{bmatrix} 1 & x^{11} & x^{12} \\ 1 & x^{21} & x^{22} \\ 1 & x^{31} & x^{32} \end{bmatrix}. \qquad (10.106в)$$

Если узлы пронумерованы по правилу правой руки, то A в (10.106в) — площадь треугольника.

Интерполяционные функции ψ_N (x), соответствующие двумерному симплексу, показаны на рис. 10.2. Если эти три функции сложить, то в силу (10.103б) получим постоянное значение на всем треугольнике. Если же каждую предварительно умножить на узловую величину u^N и уже после этого сложить, то получим изображенное на рис. 10.2 локальное приближенное представление u (x), даваемое формулой (10.101а).

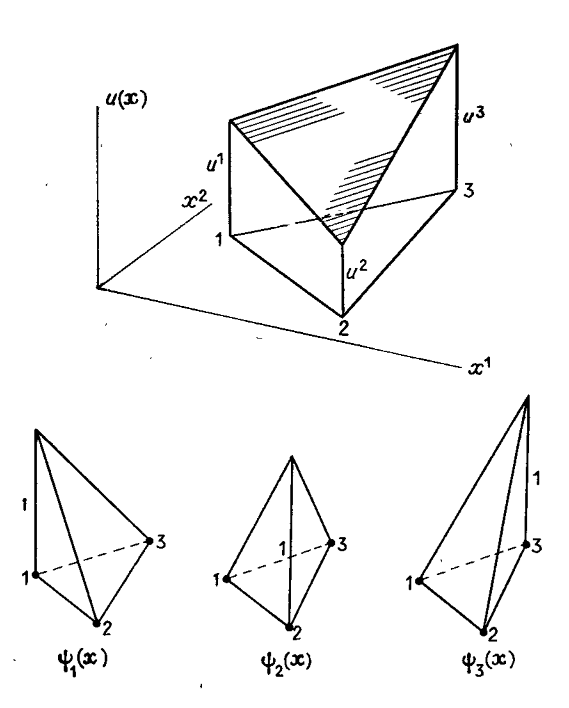


Рис. 10.2. Интерполяционные функции ψ_N (x) для двумерного симплекса.

Что касается погрешности симплексных аппроксимаций в $\mathscr{E}^2$, то Синг [1]) доказал, что если конечноэлементная аппроксимация $\bar{u}^{(e)}$ совпадает в узлах с заданной функцией u, то

$$|u_{,i}-\bar{u}^{(e)}_{,i}|\leqslant\frac{1}{2}\frac{K\delta_e}{\sin\theta}, \qquad (10.107)$$

где K — граница $|u_{,ij}|$, δ_e — диаметр элемента, а θ — наибольший из углов треугольника. Этот результат можно рассматривать как предостережение при построении равномерных измельчений симплексных моделей: избегать длинных, заостренных треугольников с малыми внутренними углами. Очевидно, что равносторонние треугольники дадут по оценке (10.107) наименьшую погрешность.

Симплекс в одномерном пространстве. В одномерном эвклидовом пространстве симплексная модель состоит из двух узлов, соединенных отрезком прямой линии (рис. 10.1, *c*). Если положить $x^1 = x$, то

$$\begin{aligned} a_1&=\frac{x^2}{L}, & a_2&=\frac{-x^1}{L},\\ b_{11}&=\frac{-1}{L}, & b_{21}&=\frac{1}{L}, \end{aligned} \qquad (10.108)$$

где $L=x^2-x^1$. Значит,

$$\psi_1(x)=\frac{x^2-x}{L}, \qquad \psi_2(x)=\frac{x-x^1}{L}. \qquad (10.109)$$

Это — знакомые нам линейные интерполяционные функции Лагранжа (7.60).

Криволинейные симплексные модели. Во всех приведенных соотношениях, относящихся к симплексным моделям, характер локальных координат x^i совершенно произволен, и поэтому нет никаких оснований требовать, чтобы они были прямоугольными декартовыми. Действительно, x^i может быть произвольной криволинейной системой «вмороженных» координат, а пространство, в котором расположен конечный элемент, может быть неэвклидовым. В общем случае можно использовать криволинейные

---

[1]) Синг [1957, стр. 211]. Подобные результаты были получены Ки [1966]. Ему удалось показать, что для трехмерного симплекса

$$|u_{,i}-\bar{u}^{(e)}_{,i}|\leqslant 18\frac{K\delta_e}{\cos\theta/2\sin\varphi},$$

где θ — наибольший из углов, образованных ребрами любой треугольной грани, а φ — наибольший из углов, образованных содержащей угол θ гранью с остальными гранями тетраэдра.

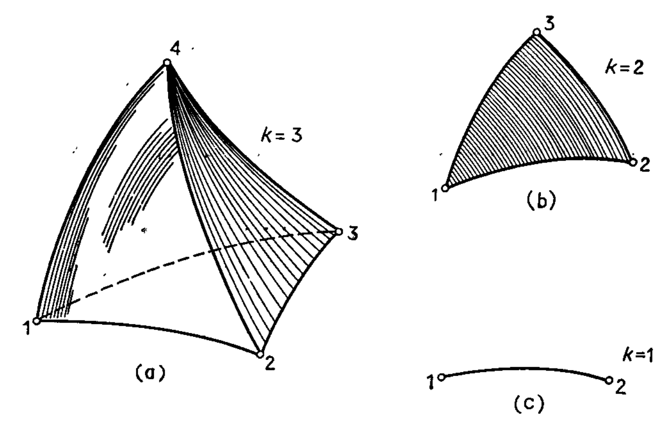


Рис. 10.3. Криволинейные симплексные модели.

симплексные модели типа показанных на рис. 10.3. Функции u (**x**) в этом случае линейны относительно криволинейных координат x^i, и непрерывность на межэлементных границах сохраняется.

Естественные координаты. При построении локальных интерполяционных функций часто бывает удобно использовать специальные координаты ζ_i, называемые естественными или, в случае двумерных симплексов, координатами площади [1]). В k-мерном пространстве координатами ζ_i служит набор $k + 1$ чисел, определенных так, чтобы они обладали свойствами

$$\zeta_i(\mathbf{x}^N) = \delta_i^N, \qquad \zeta_1 + \zeta_2 + \ldots + \zeta_{k+1} = 1. \tag{10.110}$$

Таким образом, $\zeta_i = \text{const}$ является параметрическим уравнением гиперплоскости, параллельной i-й грани элемента, а $\zeta_i = 0$ есть уравнение самой грани. Естественными координатами узлов $1, 2, \ldots, N_e = k + 1$ являются $(1, 0, 0, \ldots, 0)$, $(0, 1, 0, \ldots, 0)$, $\ldots$, $(0, 0, 0, \ldots, 1)$. Для треугольного элемента естественными координатами центра тяжести 0 являются $\zeta_1 = A_1/A$, $\zeta_2 = A_2/A$ и $\zeta_3 = A_3/A$, где A_1, A_2, A_3 — площади частей треугольника, образованных сходящимися к точке 0 от узлов 1, 2, 3 линиями [т. е. A_1 — площадь треугольника (2, 0, 3), A_2 — треугольника (3, 0, 1), A_3 — треугольника (1, 0, 2)], а $A = A_1 + A_2 + A_3$ — общая площадь треугольника. Это объясняет использование термина «координаты площади». Ясно, что эти координаты являются

---

[1]) См., например, Тэйг и Керр [1964], Аргирис [1966а], Зенкевич и Ченг [1967], Стриклин [1968] и Фрид [1969а]. В общей постановке этот вопрос рассмотрен Фридом [1969а], а вопросы использования таких координат для различных типов конечных элементов исследованы Фелиппой [1966].

безразмерными и «вмороженными», т. е. не зависящими от выбора внешних систем отсчета и формы элемента.

Как указано Фридом [1969а], полезно ввести линейное аффинное преобразование координат ζ_i в x^i посредством соотношений

$$x^i = \gamma^{ij}\zeta_j, \quad i = 1, 2, \ldots, k, \quad j = 1, 2, \ldots, k, k+1 \qquad (10.111а)$$

и

$$x^{k+1} = \zeta_1 + \zeta_2 + \ldots + \zeta_{k+1}. \qquad (10.111б)$$

Тогда можно определить матрицу C_{ij} $(i, j = 1, 2, \ldots, k+1)$ со свойствами

$$C_{1j} = \frac{\partial x^{k+1}}{\partial \zeta_j} = 1, \qquad C_{i+1, j} = \frac{\partial x^i}{\partial \zeta_j} = \gamma^{ij}, \qquad (10.112а, б)$$

$$\det C_{ij} = C, \qquad (10.112в)$$

где C — определитель (10.102в). Далее, можно показать [Фрид, 1969а], что если

$$A_{ij} = \frac{1}{C} \operatorname{cofactor} (C_{i+1, j}), \qquad (10.112г)$$

то

$$\frac{\partial}{\partial x^i} = A_{ij}\frac{\partial}{\partial \zeta_j}, \qquad i = 1, 2, \ldots, k, \qquad j = 1, 2, \ldots, k+1. \qquad (10.113)$$

При $k \leqslant 3$ имеем $A_{ij} = A_{(j)}\alpha_{ij}$, где $A_{(j)}$ — площадь (длина) j-грани элемента, а α_{ij} — направляющий косинус угла между x_i и нормалью к A_j. Можно показать, что отсюда следует такое выражение для производной по направлению единичного вектора $\mathbf{n}$:

$$\frac{\partial}{\partial n} = \frac{1}{C} A_j n_i \alpha_{ij}. \qquad (10.114)$$

Кроме того, как было отмечено тем же Фридом, полное множество полиномов степени M может быть получено перебором всевозможных комбинаций $i_1, i_2, \ldots, i_p$ в членах вида $\zeta_1^{i_1}\zeta_2^{i_2} \ldots \zeta_{k+1}^{i_p}$ с $i_1 + i_2 + \ldots + i_p = M$. Это обстоятельство можно использовать при интегрировании полиномов относительно естественных координат по конечным элементам [1]).

10.4.2. Комплексные модели. *Комплексными моделями* мы будем называть конечные элементы с $N_e > k+1$, с помощью которых можно добиться межэлементной непрерывности, не требуя, чтобы границы элемента были координатными линиями [2]).

---

[1]) См. Стриклин [1968].

[2]) Такие элементы использовали Вёбеке [1965], Аргирис [1965а, 1965б, 1965в], Фелиппа [1966], Зенкевич и Ченг [1967] и другие.

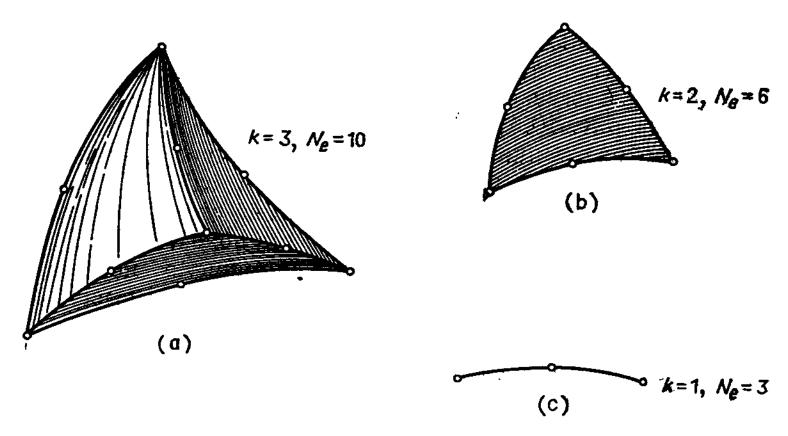


Рис. 10.4. Комплексные конечные элементы.

Например, можно использовать квадратичную аппроксимацию

$$u(\mathrm{x}) = a_0 + a_i x^i + a_{ij} x^i x^j, \tag{10.115а}$$

где $a_{ij} = a_{ji}$ и $i, j = 1, 2, \ldots, k$. Соответствующие интерполяционные функции имеют вид

$$\psi_n(\mathrm{x}) = a_N + b_{Ni} x^i + c_{Nij} x^i x^j, \tag{10.115б}$$

где $c_{Nij} = c_{Nji}$. Коэффициенты a_N, b_{Ni}, c_{Nij}, как и ранее, определяются в результате решения N_e уравнений, соответствующих вычислению значений (10.115 а) в каждой узловой точке.

При квадратичной аппроксимации можно использовать элементы такой же формы, как и в симплексной модели, но с дополнительными узлами. Например, в качестве трехмерного комплексного элемента можно использовать криволинейный тетраэдр типа, показанного на рис. 10.4, *a*. В этом случае $N_e = 10$, $k = 3$. Вершины тетраэдра являются узловыми точками, а расположение остальных шести узлов достаточно произвольно (оно должно лишь быть таким, чтобы определитель из элементов матрицы C не обращался в нуль). Удобно расположить эти узлы симметрично в серединах ребер тетраэдра.

Для двумерной модели $N_e = 6$ и можно использовать треугольный элемент с шестью узлами, показанный на рис. 10.4, *b*. Отметим, что вдоль каждой стороны функция u (x) квадратична. Поскольку квадратичная функция единственным образом определяется тремя независимыми величинами, при соединении соседних элементов непрерывность сохраняется. Зламал [1968] показал, что для такого элемента

$$|u_{,i} - \overline{u}^{(e)}_{,i}| \leqslant \frac{2}{\sin\theta} K\delta_e^2,$$

где $u_{,i}$ и $\overline{u}^{(e)}_{,i}$ совпадают в узлах, K — верхняя граница для $|u_{,ijk}|$, δ_e — диаметр элемента, а θ — наибольший угол в треугольнике.

В одномерном случае $N_e = 3$ и можно использовать элемент, показанный на рис. 10.4, *c*. Отметим, что связывания таких одномерных элементов в концевых точках недостаточно для определения квадратичной функции в элементе. В этом случае необходимо задать значение локальной аппроксимации во внутренней узловой точке. То обстоятельство, что один из узлов обязательно является внутренним, существенно отличает одномерную комплексную модель от подобных моделей в пространствах более высокой размерности.

10.4.3. Сложные[1]) модели. В сложных моделях для достижения межэлементной непрерывности нужно, чтобы границами элемента были координатные линии. Приведем несколько примеров.

Билинейная аппроксимация[2]). Для криволинейного элемента в $\mathscr{E}^2$ с четырьмя узлами (рис. 10.5а)

$$u(\mathrm{x}) = a_0 + a_\alpha x^\alpha + b x^1 x^2. \qquad (10.116)$$

Четыре коэффициента a_0, a_1, a_2, b определяются из условий

$$u^N = a_0 + a_\alpha x^{N\alpha} + b x^{N1} x^{N2}, \qquad (10.117)$$

где $\alpha = 1, 2$; $N = 1, 2, 3, 4$ и по N суммирования нет. Решая (10.117) и подставляя результат в (10.116), как обычно, получаем соотношение вида $u(\mathrm{x}) = u^N \psi_N(\mathrm{x})$. В рассматриваемом случае

$$\psi_N(\mathrm{x}) = \bar{a}_N + \bar{b}_{N\alpha} x^\alpha + \bar{c}_N x^1 x^2, \qquad (10.118а)$$

где

$$\bar{a}_N = \frac{1}{\bar{C}} \varepsilon_{NMRS} x^{M1} x^{R2} y^S, \qquad (10.118б)$$

$$\bar{b}_{N\alpha} = \frac{1}{\bar{C}} \varepsilon_{NMRS} \varepsilon_{\alpha\beta} a^M x^{R\beta} y^S, \qquad (10.118в)$$

$$\bar{c}_N = \frac{1}{\bar{C}} \varepsilon_{NMRS} a^M x^{R2} x^{S1}. \qquad (10.118г)$$

---

[1]) В оригинале multiplex. — *Прим. ред.*

[2]) Билинейные аппроксимации в прямоугольных координатах использовали Галлагер, Раттингер и Арчер [1964], Аргирис [1965в], Зенкевич и Ченг [1967] и др. Криволинейные элементы были описаны Эргатудисом, Айронсом и Зенкевичем [1968а] и Оденом [1969а]. Криволинейные неэвклидовы билинейные аппроксимации использовались Вемпнером, Оденом и Кроссом [1968].

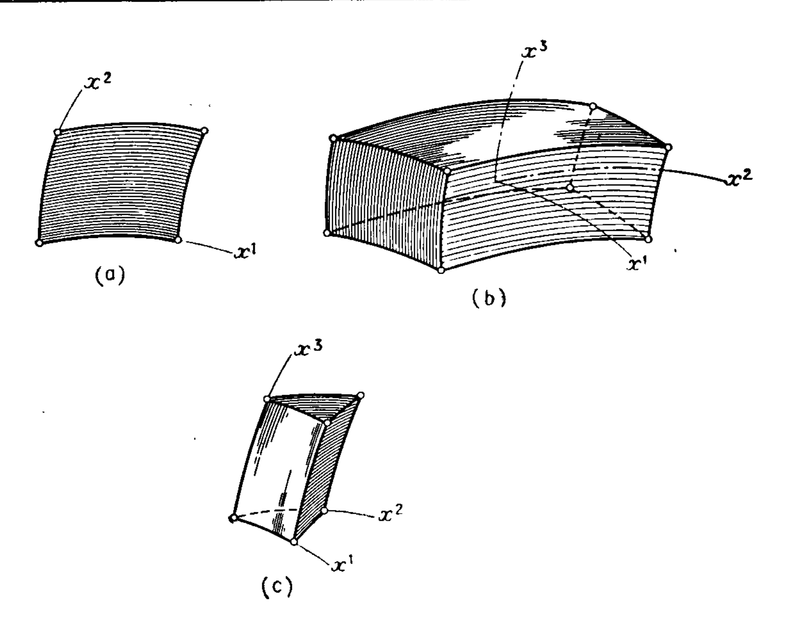


Рис. 10.5. Сложные конечные элементы.

Здесь $y^S = x^{S1}x^{S2}$ (суммирования нет), $a^M = 1$, $M = 1, 2, 3, 4$, $\varepsilon_{\alpha\beta}$ и ε_{NMRS} — перестановочные символы, а

$$\bar{C} = \det \begin{bmatrix} 1 & x^{11} & x^{12} & y^1 \\ 1 & x^{21} & x^{22} & y^2 \\ 1 & x^{31} & x^{32} & y^3 \\ 1 & x^{41} & x^{42} & y^4 \end{bmatrix}. \tag{10.118д}$$

Заметим, что выражение (10.117) линейно на всех границах элемента. Значит, при связывании элементов в узлах линейная функция определяется единственным образом и аппроксимационное поле получается непрерывным на всех границах элементов.

Трилинейная аппроксимация. Для криволинейного параллелепипеда с восемью узлами в $\mathscr{E}^k$ (рис. 10.5, *b*) положим [1])

$$u(\mathrm{x}) = a_0 + a_i x^i + a_{ij} x^i x^j + b x^1 x^2 x^3, \tag{10.119}$$

где $a_{ij} = a_{ji}$ и $a_{ij} \neq 0$ при $i = j$. Восемь коэффициентов определяются из условий

$$u^N = a_0 + a_i x^{Ni} + a_{ij} x^{Ni} x^{Nj} + b x^{N1} x^{N2} x^{N3} \tag{10.120}$$

[1]) Впервые такие аппроксимации для прямоугольных «брусков» использовались Мелошем [1963б]. См. также Ки [1966], Зенкевич и Ченг [1967] и Оден [1969а].

(суммирование по N не производится), так что u (x) можно записать в виде

$$u(\mathrm{x}) = u^N \psi_N(\mathrm{x}), \qquad N = 1, 2, \ldots, 8. \qquad (10.121)$$

Если начало системы координат расположено в центре элемента, то

$$\begin{aligned}
\psi_1(\mathrm{x}) &= \frac{1}{8}(1+\xi)(1+\eta)(1+\zeta),\\
\psi_2(\mathrm{x}) &= \frac{1}{8}(1+\xi)(1-\eta)(1+\zeta),\\
\psi_3(\mathrm{x}) &= \frac{1}{8}(1-\xi)(1-\eta)(1+\zeta),\\
\psi_4(\mathrm{x}) &= \frac{1}{8}(1-\xi)(1+\eta)(1+\zeta),\\
\psi_5(\mathrm{x}) &= \frac{1}{8}(1+\xi)(1+\eta)(1-\zeta),\\
\psi_6(\mathrm{x}) &= \frac{1}{8}(1+\xi)(1-\eta)(1-\zeta),\\
\psi_7(\mathrm{x}) &= \frac{1}{8}(1-\xi)(1-\eta)(1-\zeta),\\
\psi_8(\mathrm{x}) &= \frac{1}{8}(1-\xi)(1+\eta)(1-\zeta),
\end{aligned} \qquad (10.122\text{а})$$

где

$$\xi = \frac{x^1}{a}, \qquad \eta = \frac{x^2}{b}, \qquad \zeta = \frac{x^3}{c}; \qquad (10.122\text{б})$$

предполагается, что границами элемента являются плоскости $x^1 = \pm a$, $x^2 = \pm b$ и $x^3 = \pm c$. Отметим, что функция u (x) линейна на всех границах элемента, так что непрерывность на межэлементных границах при связывании элементов обеспечена.

Призматические элементы. Локальные аппроксимации вида [1])

$$u(\mathrm{x}) = a_0 + a_i x^i + x^3(cx^1 + dx^2), \qquad (10.123\text{а})$$

$$\psi_N(\mathrm{x}) = \hat{a}_N + \hat{b}_{Ni} x^i + c_N x^1 x^3 + d_N x^2 x^3 \qquad (10.123\text{б})$$

соответствуют призматическим элементам типа, показанного на рис. 10.5, *с*.

Параллелепипеидальные элементы. Для криволинейных параллелепипеидальных элементов с двадцатью узлами (см. рис. 10.6, *а*) применяются локальные аппроксимации вида [2])

$$u(\mathrm{x}) = a_0 + a_i x^i + a_{ij} x^i x^j + (x^1)^2(b_2 x^2 + b_3 x^3) + (x^2)^2(c_1 x^1 + c_3 x^3) + \\ + (x^3)^2(d_1 x^1 + d_2 x^2) + x^1 x^2 x^3 (e_0 + e_i x^i), \qquad (10.124)$$

[1]) См. Ки [1966].

[2]) См. Эргатудис, Айронс и Зенкевич [1968а, 1968б].

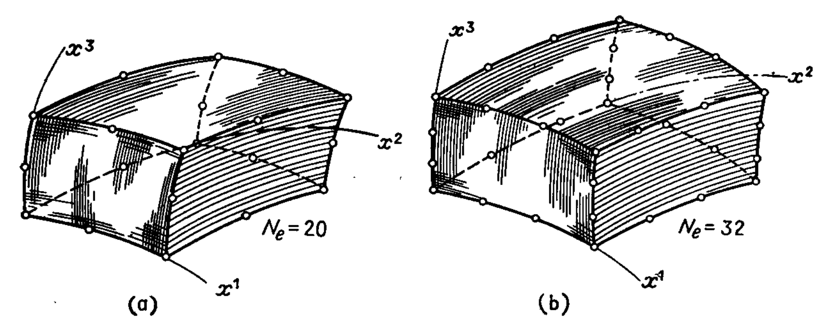


Рис. 10.6. Криволинейные параллелепипеидальные конечные элементы.

где $a_{ij} = a_{ji}$. Для элемента с тридцатью двумя узлами[1]) (рис. 10.6,*b*) используются аппроксимации, содержащие наряду со всеми членами (10.124) дополнительно члены

$$f_1 (x^1)^3 + f_2 (x_2)^3 + f_3 (x^3)^3 + x^1x^2x^3 (g_{ij}x^ix^j) + (x^1)^3 (h_2x^2 + h_3x^3) + \\ + (x^2)^3 (j_1x^1 + j_3x^3) + (x^3)^3 (k_1x^1 + k_2x^2), \quad (10.125)$$

где $g_{ij} = 0$ при $i \neq j$.

10.4.4. Изопараметрические элементы. Построение криволинейных конечных элементов, описанное в предыдущем пункте, основано на предположении, что система локальных внутренних криволинейных координат известна заранее и что локальные поля могут быть аппроксимированы соответствующими полиномами относительно этих координат. Однако во многих задачах границы столь сложны, что практически невозможно подобрать систему координат, в которой они были бы координатными линиями. Границы элементов в лучшем случае могут служить только аппроксимацией действительных криволинейных границ. Наилучшая аппроксимация криволинейных границ достигается с помощью криволинейных изопараметрических конечных элементов [2]). Построение таких элементов основано на идее подбора полиномиальных кривых, проходящих через заданные точки на границе. Подбор осуществляется практически так же, как и аппроксимация локальной функции u (x) на каждом элементе.

Предположим, например, что x^1, x^2, x^3 — система прямоугольных декартовых координат в $\mathscr{E}^3$. Преобразование x^i в произволь-

---

[1]) См. работы, указанные в предыдущем подстрочном примечании.

[2]) Один тип сдвиговых изопараметрических элементов был использован Тэйгом [1961]. Эту идею обобщили и подробно разработали Эргатудис [1966], Эргатудис, Айронс и Зенкевич [1968а, 1968б]. См. также Ахмад, Айронс и Зенкевич [1969] и Фелиппа и Клаф [1968].

ную систему криволинейных координат осуществляется соотношениями

$$\xi^i = \xi^i(x^1, x^2, x^3), \tag{10.126}$$

причем предполагается, что существует обратное преобразование

$$x^i = x^i(\xi^1, \xi^2, \xi^3). \tag{10.127}$$

В практических приложениях координаты x^i могут быть локальными координатами типичного конечного элемента, однако форма соотношений (10.127), требуемых для описания заданной границы, может быть очень сложной и к тому же меняться от элемента к элементу. Подберем аппроксимацию преобразования (10.127), которую можно было бы использовать для границ различной формы. Естественно обратиться к полиномиальным аппроксимациям вида

$$x^i = a^i + a^i_j\xi^j + a^i_{jk}\xi^j\xi^k + \ldots . \tag{10.128}$$

Поступая таким же образом, как и при построении локальных аппроксимаций u (x), вычисляем (10.128) в конечном числе N_e узловых точек, расположенных, как правило, на границе элемента, и приходим к системе уравнений

$$x^{Ni} = a^i + a^i_j\xi^{Nj} + a^i_{jk}\xi^{Nj}\xi^{(N)k} + \ldots, \tag{10.129}$$

где x^{Ni} и ξ^{Nj} — соответственно декартовы и криволинейные координаты узла N. Решая систему (10.129) и подставляя результат в (10.128), получаем такую аппроксимацию нашего преобразования координат:

$$x^i = \psi_N(\xi)\, x^{Ni}. \tag{10.130}$$

Интерполяционные функции $\psi_N(\xi)$ являются полиномами по ξ^i и удовлетворяют обычным условиям:

$$\sum_{N=1}^{N_e} \psi_N(\xi) = 1, \qquad \psi_N(\xi) \geqslant 0. \tag{10.131а, б}$$

Эти же самые интерполяционные функции $\psi_N(\xi)$ можно использовать и для аппроксимации локального поля $u(\xi)$ на элементе: $u(\xi) = u^N\psi_N(\xi)$.

Легко проверить, что функции $\psi_N(\xi)$ автоматически обеспечивают возможность представления линейных вариаций (и постоянных первых производных) функции $u(\xi)$ на элементе [1]). Возьмем, например,

$$u = a_0 + a_i x^i = u^N\psi_N(\xi). \tag{10.132}$$

[1]) См. Эргатудис, Айронс и Зенкевич [1968а].

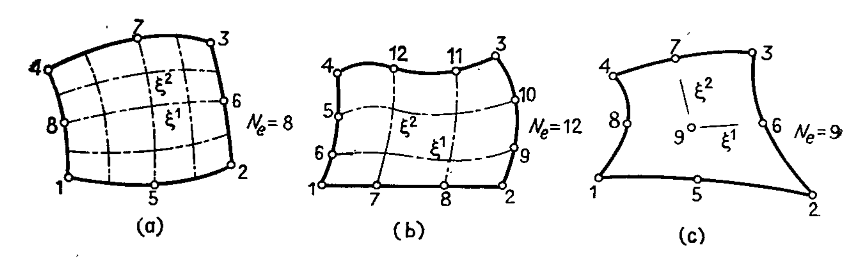


Рис. 10.7. Примеры изопараметрических конечных элементов (по Эргатудису, Айронсу и Зенкевичу [1968a]).

Поскольку $u^N = a_0 + a_i x^{Ni}$, имеем

$$u(\mathbf{x}) = a_0 \sum_{N=1}^{N_e} \psi_N(\xi) + a_i \psi_N(\xi)\, x^{Ni}. \tag{10.133}$$

Первый член в силу (10.131a) равен a_0, а второй в соответствии с (10.130) равен $a_i x^i$, т. е. (10.132) представляет собой тождество.

Эргатудис, Айронс и Зенкевич [1968a] использовали различные полиномиальные аппроксимации для получения криволинейных элементов типа показанных на рис. 10.7. Можно использовать и изопараметрические элементы типа показанных на рис. 10.6. Доказано, что функции, соответствующие элементам, изображенным на рис. 10.7, в общем случае удовлетворяют требованиям полноты, обеспечивают получение постоянных производных и удовлетворяют условиям непрерывности на межэлементных границах. Для представленного на рис. 10.7, *a* элемента соотношение (10.128) принимает вид

$$x^k = a_0^k + a_i^k \xi^i + a_{ij}^k \xi^i \xi^j + b_1^k (\xi^1)^2 \xi^2 + b_2^k \xi^1 (\xi^2)^2, \tag{10.134}$$

где $i, j, k = 1, 2$, $a_{ij}^k = a_{ji}^k$ и предполагается, что уравнения $\xi^i = \pm 1$ определяют границы элемента. Тогда

$$\psi_N(\xi) = \frac{1}{4}(1 + \xi^1 \xi^{N1})(1 + \xi^2 \xi^{N2}) - \frac{1}{4}[1 - (\xi^1)^2][1 + \xi^2 \xi^{N2}] - \\ - \frac{1}{4}[1 + \xi^1 \xi^{N1}][1 - (\xi^2)^2], \tag{10.135}$$

$N = 1, 2, \ldots, 8$. В случае элемента, изображенного на рис. 10.7, *b*,

$$\psi_N(\xi) = \frac{1}{32}(1 + \xi^1 \xi^{N1})(1 + \xi^2 \xi^{N2})\{9[(\xi^1)^2 + (\xi^2)^2] - 10\} \tag{10.136a}$$

для $N = 1, 2, 3, 4$ (только для узлов в углах). Для узлов, расположенных в точках $\xi^1 = \pm 1$, $\xi^2 = \pm\frac{1}{3}$, имеем

$$\psi_N(\xi) = \frac{9}{32}(1+\xi^1\xi^{N1})[1-(\xi^2)^2](1+\xi^2\xi^{N2}), \qquad (10.136б)$$

а в точках $\xi^2 = \pm 1$, $\xi^1 = \pm\frac{1}{3}$

$$\psi_N(\xi) = \frac{9}{32}[1-(\xi^1)^2](1+\xi^1\xi^{N1})(1+\xi^2\xi^{N2}). \qquad (10.136в)$$

Таким образом, (10.128) в этом случае принимает вид

$$x^k = a_0^k + a_i^k\xi^i + a_{ij}^k\xi^i\xi^j + c_1^k(\xi^1)^3 + c_2^k(\xi^1)^2\xi^2 + \\ + c_3^k\xi^1(\xi^2)^2 + c_4^k(\xi^2)^3 + d_1^k\xi^1(\xi^2)^3 + d_2^k(\xi^1)^3\xi^2, \qquad (10.137)$$

и выражения для $\psi_N(\xi)$ аналогичны. Если элемент имеет форму, показанную на рис. 10.7, *c*, то, в матричной записи,

$$\begin{bmatrix} \psi_1(\xi) & \psi_8(\xi) & \psi_4(\xi) \\ \psi_5(\xi) & \psi_9(\xi) & \psi_7(\xi) \\ \psi_2(\xi) & \psi_6(\xi) & \psi_3(\xi) \end{bmatrix} = \beta(\xi^1)\beta^T(\xi^2), \qquad (10.138а)$$

где в случае расположения узлов в точках $\xi^i = 0, \pm 1$

$$\beta(\xi^1) = \begin{bmatrix} \beta_1(\xi^1) \\ \beta_2(\xi^1) \\ \beta_3(\xi^1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -{}^1/{}_2\xi^1(1-\xi^1) \\ 1-(\xi^1)^2 \\ {}^1/{}_2\xi^1(1+\xi^1) \end{bmatrix}. \qquad (10.138б)$$

10.4.5. Примеры элементов высших порядков. В большинстве приложений, рассматриваемых в последующих параграфах, мы ограничиваемся конечноэлементными представлениями первого порядка. Однако для полноты картины приведем ряд примеров конечноэлементных представлений высших порядков[1]).

Представления высших порядков в $\mathscr{E}^1$. В случае одномерного пространства мы используем, конечно, обычные интерполяционные функции Эрмита, рассмотренные в § 8 (см. формулы (8.23) —

---

[1]) Ряд примеров элементов высших порядков был рассмотрен Фелиппой [1966], который классифицировал их по признаку «*C*-*q*-совместимости». По этой классификации элемент относится к *C*-0-совместному типу, если на межэлементных границах непрерывны только сами локальные функции. Если же непрерывны и первые *q* частных производных, то элемент считается *C-q-совместимым*. В соответствии с определением 10.2 элемент *C*-*q*-совместимого типа является *q*-соответственным. Кроме того, Фелиппа классифицировал элементы по признаку существования внутренних узловых точек, числу степеней свободы и т. д. См. также Фелиппа и Клаф [1968].

(8.26)), например для представления второго порядка

$$u(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3, \quad (10.139)$$

или

$$u(x) = u^N \psi_N^0(x) + u_{,1}^N \psi_N^1(x), \qquad N = 1, 2, \quad (10.140)$$

где

$$\begin{aligned} \psi_1^0(x) &= 1 - 3\xi^2 + 2\xi^3, \\ \psi_2^0(x) &= 3\xi^2 - 2\xi^3, \\ \psi_1^1(x) &= L(\xi - 2\xi^2 + \xi^3), \\ \psi_2^1(x) &= -L(\xi^2 - \xi^3) \end{aligned} \quad (10.141)$$

и

$$\xi = \frac{x - x_1}{L}, \qquad L = x_2 - x_1. \quad (10.142а, б)$$

Представление третьего порядка на одномерном элементе с двумя узлами получается при использовании полинома пятой степени [1]):

$$u(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + a_5 x^5. \quad (10.143)$$

В каждой узловой точке задаются $u(x)$, $du(x)/dx$ и $d^2u(x)/dx^2$.

В общем случае для одномерных элементов с двумя узлами представление n-го порядка получится, если взять в качестве $u(x)$ полный полином степени $n + 2$ и задать в обеих узловых точках $u(x)$, $du(x)/dx$, . . ., $d^n u(x)/dx^n$.

Представление второго порядка в $\mathscr{E}^3$. Функция $u(\mathbf{x})$ и ее первые частные производные задаются в каждой из четырех вершин тетраэдра, и $u(\mathbf{x})$ берется в виде полного полинома третьей степени (рис. 10.8а) [2]):

$$u(\mathbf{x}) = a_0 + a_i x^i + a_{ij} x^i x^j + a_{ijk} x^i x^j x^k, \quad (10.144)$$

где $i, j, k = 1, 2, 3$; $a_{ij} = a_{ji}$, $a_{ijk} = a_{ikj} = a_{jik}$. Независимых параметров $a_0, \ldots, a_{ijk}$ двадцать, а узлов пока 4. Пятый узел можно расположить произвольно, но обычно удобно помещать в его центре тяжести.

Представление второго порядка в $\mathscr{E}^2$. Аппроксимацию второго порядка функции $u(x^1, x^2)$ на треугольной области можно построить, задавая $u(x^1, x^2)$ в четырех узловых точках и первые частные производные $u(\mathbf{x})_{,\alpha}$ в трех узловых точках — вершинах

[1]) См. Ланхар и Чу [1968].

[2]) См., например, Аргирис [1965а].

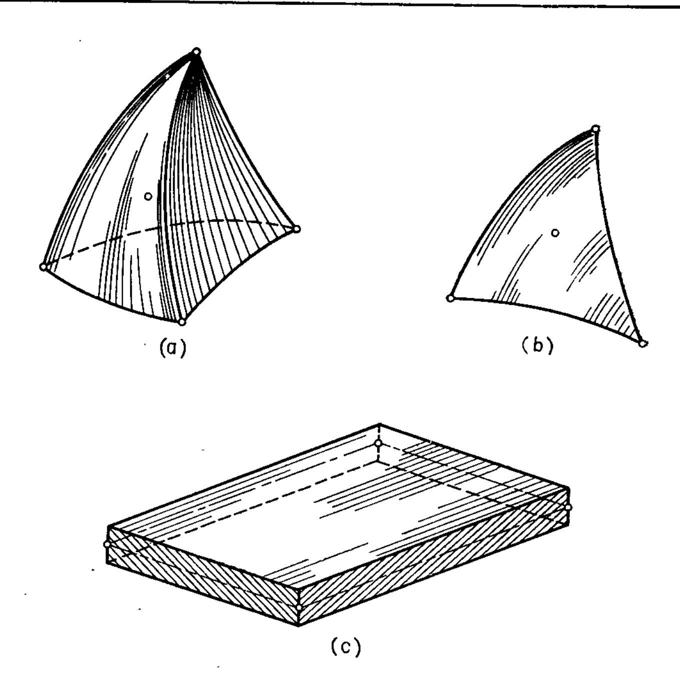


Рис. 10.8. Конечные элементы высших порядков.

треугольника (рис. 10.8b) [1]). В этом случае $N_e = 4$, а $u(\mathbf{x})$ — полный полином третьей степени:

$$u(\mathbf{x}) = a_0 + a_i x^i + a_{11}(x^1)^2 + a_{12}x^1x^2 + a_{22}(x^2)^2 + \\ + a_{111}(x^1)^3 + a_{112}(x^1)^2 x^2 + a_{122}x^1(x^2)^2 + a_{222}(x^2)^3. \quad (10.145)$$

Окончательно аппроксимация имеет вид

$$u(\mathbf{x}) = u^N \psi_N^0(\mathbf{x}) + u^N_{,i} \psi_N^i(\mathbf{x}), \quad (10.146)$$

где $N = 1, 2, 3, 4$; $i = 1, 2$; и для любого $\mathbf{x}$

$$\psi_N^0(\mathbf{x}) \neq 0, \qquad \psi_4^i(\mathbf{x}) = 0\ ^{2)}. \quad (10.147)$$

---

[1]) Такие элементы использовались Бестом и Оденом [1963]. Подробное обсуждение этого и сходных элементов можно найти у Фелиппы [1966]. См. также Айронс [1966], Точер и Харц [1967] и Оден, Ригсби и Корнетт [1969].

[2]) Или можно положить $\psi_4^0(\mathbf{x}) = 0$ и в качестве десятого условия задать производную $du/\partial n$ по нормали к границе в четвертой узловой точке, расположенной на границе. Введение таких «плавающих» граничных узлов, в которых задаются значения функции или ее нормальной производной, позволяет строить разнообразные модели, в которых связываются разнотипные элементы с различным числом узлов. См. Фелиппа [1966] и Фелиппа и Клаф [1968].

Размещение четвертого узла произвольно, но логично поместить его в центре тяжести.

Зламал [1968] доказал, что если конечноэлементная аппроксимация $\bar{u}^{(e)}$ совпадает с непрерывно дифференцируемой функцией, у которой существуют четвертые производные во всех узловых точках (три вершины и центр тяжести), и если производные функций $\bar{u}^{(e)}$ и u совпадают, то

$$|u_{,i}-\bar{u}_{,i}|\leqslant\frac{5}{\sin\theta}K\delta_e^3 \quad \text{и} \quad |u-\bar{u}^{(e)}|\leqslant\frac{3}{\sin\theta}K\delta_e^4, \qquad (10.148\text{а})$$

где θ — наибольший из углов треугольника, K — верхняя граница для $|u_{,ijkl}|$, а δ_e — диаметр элемента.

Представление третьего порядка в $\mathscr{E}^2$. Представление третьего порядка на треугольном элементе в двумерном пространстве получается при использовании полного полинома пятой степени [1]) относительно x^1 и x^2:

$$u(\mathrm{x})=a_0+a_ix^i+a_{ij}x^ix^j+a_{ijk}x^ix^jx^k+ \\ +a_{ijkm}x^ix^jx^kx^m+a_{ijkmn}x^ix^jx^kx^mx^n. \qquad (10.148\text{б})$$

Учитывая зависимости между выписанными членами, устанавливаем, что в таком полиноме пятой степени 21 независимый параметр. Двадцать одно условие получается в результате задания u, $u_{,1}$, $u_{,2}$, $u_{,11}$, $u_{,12}$ и $u_{,22}$ в трех вершинах треугольника и нормальных производных $\partial u/\partial n$ в средней точке каждой из сторон. В этом случае u имеет вид

$$u(\mathrm{x})=u^N\psi_N^0(\mathrm{x})+u^N_{,i}\psi_N^i(\mathrm{x})+u^N_{,ij}\psi_N^{ij}(\mathrm{x})+u^{N'}_{,n}\varphi_{N'}(\mathrm{x}), \qquad (10.149)$$

где $N=1, 2, 3$, $N'=4, 5, 6$, $\varphi_{N'}(\mathrm{x}^N)=0$, $\partial\varphi_{N'}(\mathrm{x}^{M'})/\partial n=\delta_{N'}^{M'}$. Вершины пронумерованы цифрами 1, 2, 3, а середины сторон — цифрами 4, 5, 6.

Зламал [1968] показал, что

$$|u_{,i}-\bar{u}^e_{,i}|\leqslant\frac{K}{(\sin\theta)^{|i|}}\delta_e^{6-|i|}, \qquad (10.150)$$

где $|i|\leqslant 4$, а K — верхняя граница для шести производных от u.

[1]) Такой элемент впервые был предложен, по-видимому, Витхумом [1966]; для исследования упругих пластин его использовали Босхард [1968], Белл [1969], Аргирис, Фрид и Шарпф [1968в], Аргирис и Бак [1968]. Свойства сходимости для этого элемента исследовал Зламал [1968]. Возможны, конечно, представления более высоких порядков. Брэмбл и Зламал [1970], например, предложили общий метод полиномиальных аппроксимаций на треугольниках, в которых полином относительно x^1 и x^2 степени $4m+1$ определяется заданием всех его производных до порядка $2m$ в вершинах, производных порядка $2m-1$ в центре тяжести и производных по нормали в $r+1$ равностоящих узловых точках на каждой стороне треугольника ($r=1, 2, \ldots, m$).

Замечания о других элементах высших порядков. Наиболее широко конечноэлементные модели высших порядков использовались в связи с приложениями к задачам изгиба тонких пластин и оболочек. При использовании теорий, основанных на гипотезах Кирхгофа — Лява, деформации элемента пластины или оболочки описываются полем перемещений точек срединной поверхности и первыми производными этого поля. Вследствие этого для непрерывности всего поля перемещений требуется не только непрерывность перемещений срединной поверхности, но и непрерывность первых частных производных [1]. Это в совокупности с требованием, что модель должна обеспечивать возможность описания случая постоянных кривизн [2], приводит к значительным трудностям построения соответственных конечных элементов [3]. Эти трудности — один из многочисленных примеров того, как упрощающие предположения (например, гипотезы Кирхгофа — Лява, предположение о несжимаемости и т. д.), предназначавшиеся первоначально для того, чтобы облегчить применения теории, существенно усложняют построение удобных конечноэлементных моделей. Практически очень часто при использовании более фундаментальной (неупрощенной) теории проще строить приемлемые конечноэлементные модели.

В качестве примера полностью совместимой двумерной конечноэлементной модели третьего порядка, соответствующей прямоугольному элементу пластины (см. рис. 10.8, *c*) или криволинейному четырехугольному элементу оболочки (Богнер, Фокс и Шмит [1967]), приведем функцию

$$u(\mathbf{x}) = \sum_{r=0}^{3} \sum_{s=0}^{3} C_{rs} (x^1)^r (x^2)^s. \qquad (10.151)$$

[1]) Проблему непрерывности можно обойти, отказавшись от гипотез Кирхгофа — Лява и используя аппроксимации первого порядка перемещений и углов поворота. См., например, Мелош [1966], Утку [1966], Утку и Мелош [1967], Вемпнер, Оден и Кросс [1968] и Оден и Вемпнер [1967].

[2]) Это требование, по-видимому, впервые было выдвинуто Айронсом и Дрейпером [1965] и подробно рассмотрено в статье Бейзли и др. [1966]. См. примечание на стр. 134.

[3]) В первых работах по методу конечных элементов для тонких пластин требованиями непрерывности и полноты, включая требования возможности описания (в пределе) постоянных деформаций (кривизн и кручений), как правило, пренебрегали, и было предложено много недопустимых элементов. Интересный обзор ранних работ сделан Фелиппой [1966, стр. 215—219]. Сравнение некоторых прямоугольных и треугольных элементов, применявшихся до 1965 г., проведено Клафом и Точером [1966]. Бейзли, Ченг, Айронс и Зенкевич [1966] использовали несоответственные треугольные элементы, а Клаф и Точер [1966] получили полностью совместимый треугольный пластинчатый элемент, применив композицию трех кубичных полиномов. Полностью совместимый прямоугольный пластинчатый элемент был построен Богнером, Фоксом и Шмитом [1966]. Ряд элементов для пластин и оболочек был предложен при аппроксимации напряжений или напряжений и перемещений вместе; см., например, Бест [1963], Пайэн [1964б], Вёбеке [1966], Геррманн [1966] и Пайэн и Тонг [1969а, 1969б].

Шестнадцать коэффициентов C_{rs} определяются таким образом, чтобы u (x), ∂u (x)/∂x^i и $\partial^2 u$ (x)/$\partial x^1\, \partial x^2$ принимали заданные значения в четырех узлах, размещенных в углах. Интерполяционными функциями в этом случае являются двумерные интерполяционные функции Эрмита, и u (x) можно записать в виде

$$u(\mathbf{x}) = u^N \psi_N^0(\mathbf{x}) + u^N_{,i} \psi_N^i(\mathbf{x}) + u^N_{,12} \psi_N^{12}(\mathbf{x}), \tag{10.152}$$

где $N = 1, 2, 3, 4$. Выражения для функций ψ_N^0, ψ_N^i, ψ_N^{12} в ортогональных координатах можно найти в статье Богнера, Фокса и Шмита [1967].

10.4.6. Дополнительные замечания о конечноэлементных моделях. В заключение этого параграфа сделаем ряд замечаний общего характера относительно свойств конечноэлементных моделей.

Замечание 1. Дополнительные параметры. Напомним, что в соответствии с (7.7) локальная аппроксимация в общем случае имеет вид

$$u(\mathbf{x}) = \Psi(\mathbf{x}, u^N), \tag{10.153}$$

где функция Ψ ( ) должна удовлетворять условию

$$\Psi(\mathbf{x}_M, u^N) = u^M. \tag{10.154}$$

Мы использовали специальную линейную форму

$$u(\mathbf{x}) = u^N \psi_N(\mathbf{x}), \tag{10.155}$$

требуя, чтобы

$$\psi_N(\mathbf{x}^M) = \delta_N^M. \tag{10.156}$$

Однако условия (10.154) будут выполнены и в том случае, если положить [1])

$$u(\mathbf{x}) = u^N \psi_N(\mathbf{x}) + \chi(\mathbf{x}), \tag{10.157}$$

где χ (x) — любая функция, обращающаяся в нуль в узлах:

$$\chi(\mathbf{x}^N) = 0. \tag{10.158}$$

Пайэн [1964a] показал, что можно получить уточненные конечноэлементные модели, задав функцию χ (x) в виде полинома

$$\chi(\mathbf{x}) = b_0 + b_i x^i + b_{ij} x^i x^j + \ldots. \tag{10.159}$$

Например, при билинейной аппроксимации (10.116) можно взять

$$u(\mathbf{x}) = u^N \psi_N(\mathbf{x}) + x^1 x^2 (a - x^1)(b - x^2)(b_0 + b_1 x^1 + b_2 x^2 + b_3 (x^1)^2 + \ldots), \tag{10.160}$$

[1]) Пример аппроксимации, обладающей таким свойством, приведен в подстрочном примечании на стр. 60.

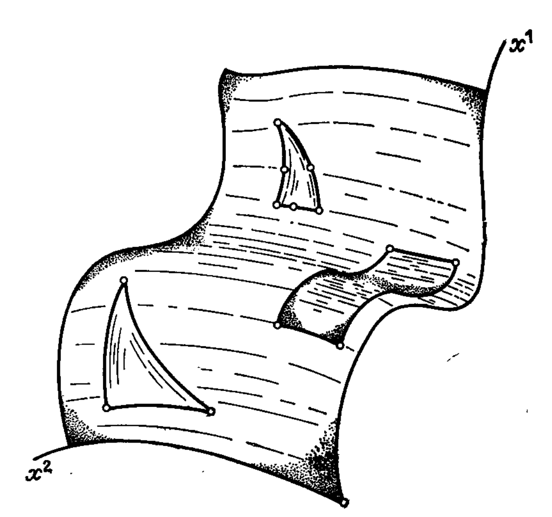


Рис. 10.9. Неэвклидовы симплексные, комплексные и сложные конечные элементы.

где a и b — длины сторон элемента, а начало системы координат x^i помещено в точке (0,0). Дополнительные параметры b_0, b_1, b_2, ... должны быть определены из вспомогательных условий, связанных с рассматриваемой задачей (например, условия минимума потенциальной энергии).

Крахула и Полемус [1968] использовали вместо (10.159) ряды Фурье, т. е. вместо (10.160) —

$$u(\mathbf{x}) = u^N \psi_N(\mathbf{x}) + \\ + x^1 x^2 (a - x^1)(b - x^2) \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \sin \frac{m\pi x^1}{a} \sin \frac{n\pi x^2}{b}. \quad (10.161)$$

Замечание 2. Неэвклидовы элементы. Еще раз отметим, что описанные ранее элементы могут рассматриваться не только в эвклидовых пространствах. Элементы в римановом пространстве строятся так же легко, если надлежащим образом определено само пространство. Например, двумерные симплексные, комплексные и сложные элементы на римановой поверхности получаются с помощью формул (10.106), (10.115) и (10.118), если рассматривать x^i как внутренние поверхностные координаты. Эти модели показаны на рис. 10.9.

Замечание 3. Производные элементы. Часто бывает удобно строить модели в k-мерном пространстве, порождаемые движением (k — 1)-мерной области (или области еще более низкой раз-

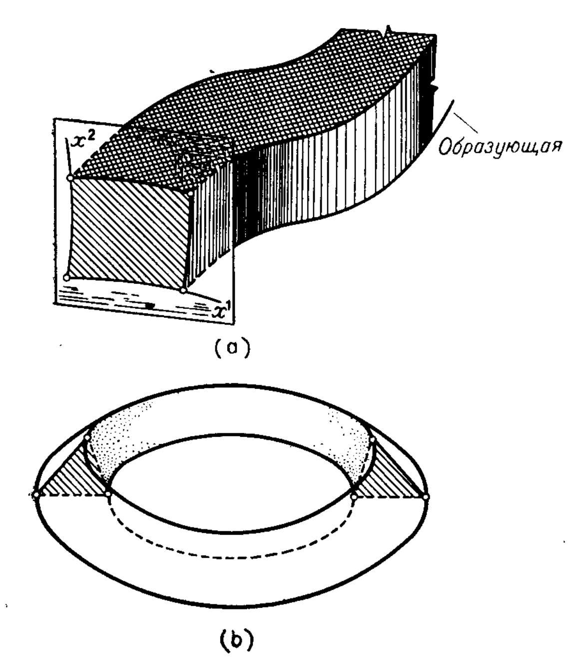


Рис. 10.10. Примеры производных элементов.

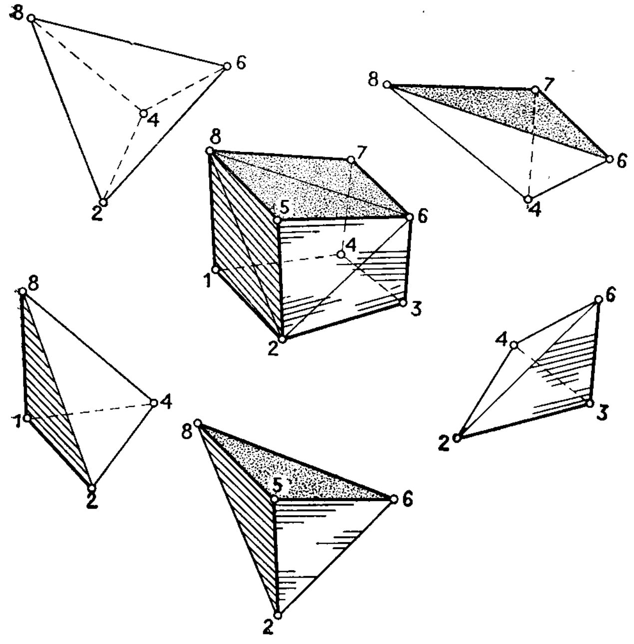


Рис. 10.11. Составные призматические конечные элементы.

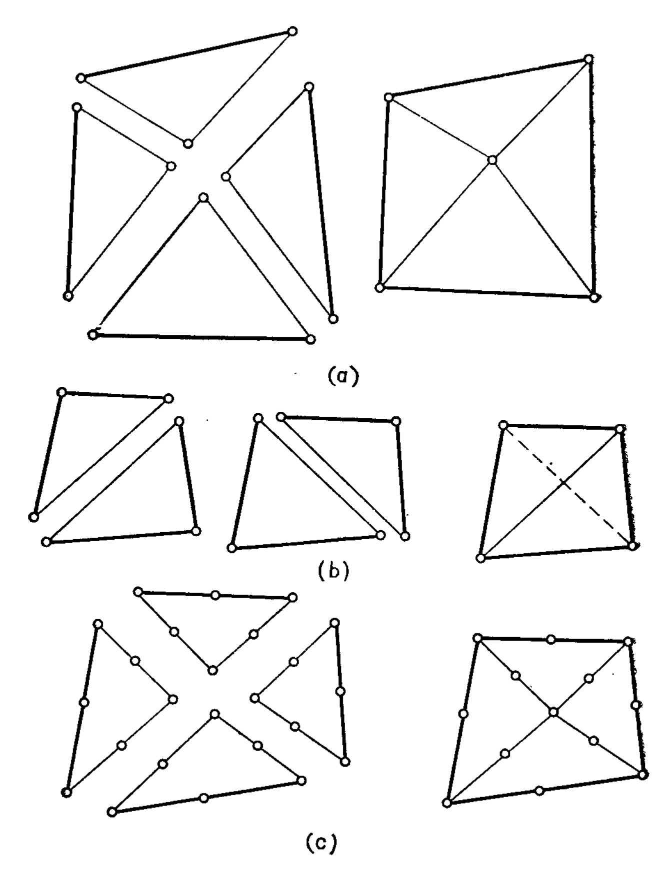


Рис. 10.12. Другие примеры составных конечных элементов.

мерности) вдоль соответствующей образующей в $\mathscr{E}^k$. Например, конечные элементы для трехмерного тела вращения могут порождаться поворотом на 2π любого двумерного элемента вокруг оси вращения [1]). Узловые точки в $(k-1)$-мерном пространстве превращаются в узловые линии в k-мерном пространстве. Интерполяционные функции берут в виде

$$\hat{\psi}_N(\mathbf{x}, s) = \psi_N(\mathbf{x}) f(s), \tag{10.162}$$

где $\mathbf{x} \in \mathscr{E}^{k-1}$, а s — производящий параметр. Некоторые примеры приведены на рис. 10.10.

---

[1]) См., например, Рашид [1964, 1966], Клаф и Рашид [1965], Вильсон [1965].

Замечание 4. Составные элементы [1]. Отметим, наконец, что путем объединения двух или более базисных элементов описанных выше типов можно построить множество так называемых *составных элементов*. Некоторые примеры представлены на рис. 10.11 и 10.12: призматический элемент, полученный в результате объединения пяти симплексных тетраэдров (рис. 10.11); четырехсторонний элемент, полученный соединением четырех треугольных симплексов (рис. 10.12а); плоский четырехсторонний элемент, образованный наложением четырех треугольников (рис. 10.12b); и четырехсторонний элемент, полученный в результате соединения четырех комплексных треугольных элементов (рис. 10.12, *c*).

11. НЕКОТОРЫЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

Для того чтобы применять изложенные выше понятия к линейным или нелинейным задачам, нужно еще располагать средствами перехода от соотношений, выполняющихся в точке, к соотношениям, выполняющимся в некоторой конечной области. При решении дифференциальных уравнений в частных производных такой переход от соотношений в точке к соотношениям в области может осуществляться с помощью вариационной постановки задачи или с помощью других методов, таких, как метод взвешенных невязок, метод Галёркина и т. д. В ряде физических задач он может осуществляться с помощью локальных и глобальных форм законов сохранения термодинамики и электродинамики. В этом параграфе мы рассмотрим несколько примеров.

11.1. КОНЕЧНЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ В ПРОСТРАНСТВЕННО-ВРЕМЕННОЙ ОБЛАСТИ[2]

Поскольку описанные ранее конечноэлементные модели в принципе могут использоваться для аппроксимации функций в пространствах любой размерности, вполне естественно рассмотреть их применение для представления функций в четырехмерной пространственно-временно́й области.

Рассмотрим, например, скалярную функцию $\Phi\ (X^1, X^2, X^3, t)$. Ясно, что можно положить $X^4 = t$ и считать функцию Φ ( ) опре-

---

[1]) Составные элементы использовались целым рядом исследователей. Вот некоторые из них: Висманн [1962], Беккер и Брисбейн [1965], Аргирис [1966a], Клаф и Точер [1966], Фелиппа [1966], Перси [1967], Зенкевич и Ченг [1967], Хьюджес и Эллик [1969].

[2]) Использовать конечные элементы в пространственно-временной области предложили независимо Никелл и Сэкмэн [1968], Оден [1969б] и Фрид [1969б]; данное здесь изложение основано на работе Одена. См. также Аргирис и Шарпф [1969].

деленной на четырехмерном пространстве, точки которого задаются координатами X^i ($i = 1, 2, 3, 4$). Если область определения представлена в виде набора из E четырехмерных подобластей, то можно рассмотреть локальную аппроксимацию поля $\varphi^{(e)}(x^1, x^2, x^3, x^4)$ на типичном конечном элементе e:

$$\varphi^{(e)} = \varphi^{N}_{(e)}\psi^{(e)}_{N}(\mathrm{x}), \tag{11.1}$$

где интерполяционные функции $\psi^{(e)}_N(\mathbf{x})$ являются функциями от x^1, x^2, x^3, x^4. Вообще говоря, процесс связывания элементов состоит в простом применении методов, изложенных в § 7. Однако подробности использования моделей при решении задач распространения волн, дифференциальных уравнений гиперболического и параболического типов и т. д. можно разобрать только на конкретных примерах.

Двумерные задачи. Для того чтобы проиллюстрировать использование конечных элементов в пространственно-временной области, рассмотрим простой пример одномерного упругого стержня длины L с поперечным сечением A под действием заданной силы $P(t)$ на свободном конце или при заданном начальном перемещении $u(x, 0) = f(x)$. В обычных конечноэлементных моделях продольное перемещение $u = u(x, t)$ аппроксимируется одномерными интерполяционными функциями $\psi_N(x)$ ($N = 1, 2, \ldots, N_e$), помноженными на являющиеся функциями времени узловые перемещения. Мы же сейчас будем считать перемещения $u^N_{(e)}$ значениями локального поля $u^{(e)}(x, t)$, определенного в некоторой области двумерного пространства (x, t). Интерполяционные функции являются функциями как продольной координаты x, так и времени t, т. е. $\psi_N = \psi_N(x, t)$. Для типичного конечного элемента

$$u^{(e)}(x, t) = u^{N}_{(e)}\psi_N(x, t). \tag{11.2}$$

Лагранжев потенциал $\mathfrak{L}$ для линейно упругого стержня с модулем упругости E и массовой плотностью ρ равен

$$\mathfrak{L} = \frac{1}{2}\int_t\int_v\left[\rho\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 - E\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\right]dv\,dt + \int_t\sum_\alpha S_\alpha(t)\,u(x_\alpha, t)\,dt, \tag{11.3}$$

где v — объем стержня и $-\sum_\alpha S_\alpha(t)\,u(x_\alpha, t) = -S_1(t)\,u(x_1, t) - S_2(t)\,u(x_2, t)$ — потенциал сил $S_1(t)$ и $S_2(t)$ на концах рассматриваемого участка стержня. Таким образом, для типичного конечного элемента e

$$\mathfrak{L}_{(e)} = \frac{1}{2}\,a^{(e)}_{MN}u^{M}_{(e)}u^{N}_{(e)} + u^{N}_{(e)}p^{(e)}_{N}, \tag{11.4}$$

где

$$a_{MN}^{(e)} = \int_t \int_v \rho \left(\frac{\partial \psi_M}{\partial t} \frac{\partial \psi_N}{\partial t} - E \frac{\partial \psi_M}{\partial x} \frac{\partial \psi_N}{\partial x} \right) dv\, dt \tag{11.5}$$

и

$$p_N^{(e)} = \int_t \sum_\alpha S_\alpha(t)\, \psi_N(x_\alpha, t)\, dt. \tag{11.6}$$

В этих выражениях интегрирование производится по отрезку времени, «захватываемому» элементом.

Из (11.4) видно, что лагранжиан $\mathfrak{L}$ обладает интересным свойством: в отличие от обычного случая он не является функционалом от скорости. Действительно, $\mathfrak{L}$ является обычной функцией узловых значений перемещений, которые в принятой нами постановке не зависят от времени. Однако принцип Гамильтона [1]) использовать все равно, конечно, можно, так что

$$\delta \mathfrak{L}_{(e)} = \frac{\partial \mathfrak{L}_{(e)}}{\partial u_{(e)}^N} \delta u_{(e)}^N = 0, \tag{11.7}$$

и мы получаем

$$a_{MN}^{(e)} u_{(e)}^M + p_N^{(e)} = 0. \tag{11.8}$$

Связывание элементов в общую модель осуществляется обычным для двумерных конечноэлементных моделей способом.

Одномерные волны. Важно отметить, что техника решения записанных выше конечноэлементных уравнений совершенно не такова, как в задачах эллиптического типа. Уравнение (11.8) есть конечноэлементный аналог гиперболического волнового уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = f(t), \tag{11.9}$$

где $\alpha = \sqrt{E/\rho}$.

Для иллюстрации этой техники рассмотрим простой пример, в котором локальное поле задано в виде линейной симплексной аппроксимации:

$$u^{(e)} = u_{(e)}^N \psi_N^{(e)}(x,\ t) = a + bx + ct, \tag{11.10}$$

где a, b, c — постоянные и $N = 1, 2, 3$. В этом случае конечный элемент представляет собой треугольник в двумерном простран-

[1]) Который правильнее было бы называть принципом Гамильтона — Остроградского. — *Прим. ред.*

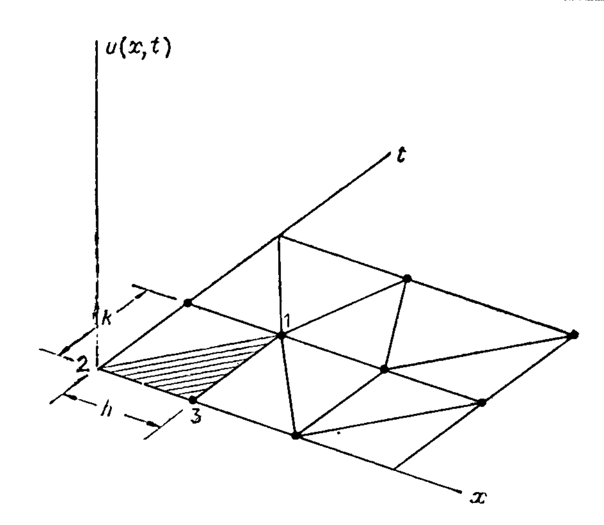


Рис. 11.1. Конечные элементы в пространственно-временной области.

стве, показанный на рис. 11.1. Видно, что

$$\psi_1(x,\ t)=\frac{1}{2\Delta}\left[(x_2t_3-x_3t_2)+(t_2-t_3)\,x+(x_3-x_2)\,t\right],$$

$$\psi_2(x,\ t)=\frac{1}{2\Delta}\left[(x_3t_1-x_1t_3)+(t_3-t_1)\,x+(x_1-x_3)\,t\right],\qquad(11.11)$$

$$\psi_3(x,\ t)=\frac{1}{2\Delta}\left[(x_1t_2-x_2t_1)+(t_1-t_2)\,x+(x_2-x_1)\,t\right],$$

где Δ — площадь элемента в плоскости x, t. Например, для заштрихованного элемента на рис. 11.1 мы с помощью (11.11) и (11.8) устанавливаем, что при такой довольно грубой аппроксимации локальные уравнения принимают вид

$$\hat{p}_1^{(e)}=u_{(e)}^1-u_{(e)}^3,$$

$$\hat{p}_2^{(e)}=\lambda^2\left(u_{(e)}^3-u_{(e)}^1\right),\qquad(11.12)$$

$$\hat{p}_3^{(e)}=u_{(e)}^3-u_{(e)}^1-\lambda^2\left(u_{(e)}^3-u_{(e)}^1\right),$$

где $\hat{p}_N=-k^2p_N/A\rho\Delta$ и $\lambda^2=k^2\alpha^2/h^2$.

Предположим, что $u(0,\ t)=u(L,\ t)=0$, $u(x,\ 0)=f(x)$ и $\partial u(x,\ 0)/\partial t=0$ — заданные краевые и начальные условия и что используется система конечных элементов, изображенная на рис. 11.2. Решение осуществляется следующим образом:

1. Принципиальным моментом является то, что каждый раз следует рассматривать только один ряд элементов (первый ряд соответствует промежутку $0\leqslant t\leqslant k$, второй — проме-

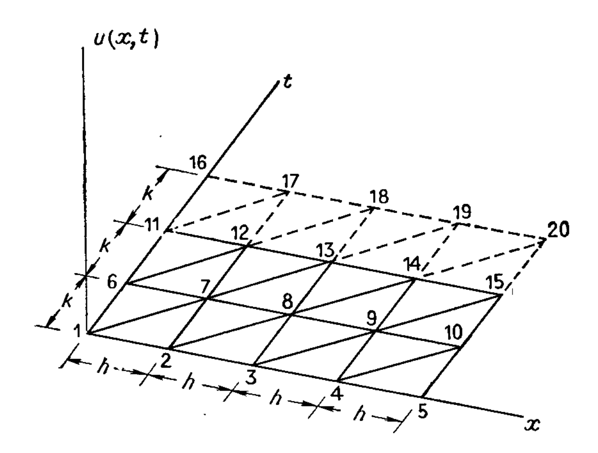


Рис. 11.2. Пример распространения решения во времени.

жутку $k \leqslant t \leqslant 2k$ и т. д.). Глобальные значения U^Δ перемещений граничных узлов в соответствии с краевыми условиями приравниваются нулю: $U^1 = U^6\ (=U^{11} = U^{16} = = \ldots) = 0$, $U^5 = U^{10}\ (=U^{15} = U^{20} = \ldots) = 0$. Перемещения внутренних узлов, соответствующих $t = 0$, принимают заданные значения, т. е. $U^2 = f(h)$, $U^3 = f(2h)$, $U^4 = = f(3h)$ и т. д.

2. Поскольку перемещения U^2, U^3, U^4 принимают заданные значения, соответствующие глобальные обобщенные «силы» (сопряженные переменные) $\hat{P}_2$, $\hat{P}_3$, $\hat{P}_4$ обращаются в нуль. Неизвестными в получающихся уравнениях

$$\hat{P}_2(U^2,\ U^7) = \hat{P}_3(U^3,\ U^8) = \hat{P}_4(U^4,\ U^9) = 0 \qquad (11.13)$$

являются узловые значения U^7, U^8, U^9, характеризующие эпюру перемещений через k секунд. Поскольку каждое из уравнений (11.13) содержит только одну неизвестную, величины U^7, U^8 и U^9 сразу выражаются через заданные узловые значения перемещений при $t = 0$.

3. Далее рассматривается следующий ряд злементов ($k \leqslant t \leqslant \leqslant 2k$). Перемещения U^{12}, U^{13} и U^{14} находятся из условий $\hat{P}^7 = \hat{P}^8 = \hat{P}^9 = 0$. Затем рассматривается третий ряд элементов и т. д.

Таким образом, конечнозлементное решение распространяется во времени точно так же, как и при обычных явных конечноразностных схемах.

Отметим, что в случае, когда на конце бруса приложена изменяющаяся во времени нагрузка, а начальные перемещения не зада-

ны, способ решения таков же, с той лишь разницей, что U^5, U^{10}, ... $\neq 0$ и вместо (11.13) величины $\hat{P}_2$, $\hat{P}_3$, $\hat{P}_4$ (и $\hat{P}_7$, $\hat{P}_8$, ...) принимают заданные ненулевые значения.

Устойчивость. Довольно грубая симплексная модель, использованная в приведенном выше примере, является простейшей конечноэлементной моделью для задач рассматриваемого типа. В более сложных волновых задачах можно ожидать повышения точности при использовании аппроксимаций высших порядков или при увеличении числа степеней свободы элементов. Тем не менее интересно отметить, что для внутреннего узла показанной на рис. 11.12 системы (например, узла 8)

$$-2\hat{P}_8 = 0 = (-U^3 - 2U^8 + U^{13}) + \lambda^2 (U^7 - 2U^8 + U^9), \qquad (11.14)$$

что в точности совпадает с центрально-разностной аппроксимацией первого порядка для уравнения (11.9). Значит, можно воспользоваться критерием Куранта, Фридрихса и Леви [1928] для того, чтобы сделать вывод об устойчивости описанной схемы решения. В соответствии с этим критерием решение неустойчиво при $\lambda > 1$ и с увеличением λ неустойчивость становится сильнее; при $\lambda < 1$ решение устойчиво, но с уменьшением λ точность уменьшается; при $\lambda = 1$ решение устойчиво и может быть сделано сколь угодно близким к точному решению уравнения (11.9).

Динамические системы. Нетрудно применить изложенные ранее идеи к случаю динамических систем более общего вида. Пусть, например, $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ обозначает поле перемещений. Рассмотрим локальную конечноэлементную аппроксимацию

$$\mathbf{u}_e = \psi_N(\mathbf{x})\, \mathbf{u}^N(t). \qquad (11.15)$$

Узловые величины $\mathbf{u}^N$ являются функциями времени, так что можно построить конечноэлементную аппроксимацию $\mathbf{u}^N$ на «элементе времени» $[t_1, t_2]$. Например, при использовании эрмитовой интерполяции по времени получаем [1])

$$\mathbf{u}_e(\mathbf{x}, t) = \psi_N(\mathbf{x}) \left(\varphi_0^\alpha(t)\, \mathbf{u}_\alpha^N + \varphi_1^\alpha(t)\, \dot{\mathbf{u}}_\alpha^N\right), \qquad (11.16)$$

где $\alpha = 1, 2$, $\mathbf{u}_\alpha^N = \mathbf{u}^N(t_\alpha)$, $\dot{\mathbf{u}}_\alpha^N = d\mathbf{u}^N(t_\alpha)/dt$ и ввиду (8.24)

$$\begin{aligned} \varphi_0^1(t) &= 2\xi^3 - 3\xi^2 + 1, \qquad & \varphi_0^2(t) &= 3\xi^2 - 2\xi^3, \\ \varphi_1^1(t) &= \xi^3 - 2\xi^2 + \xi, \qquad & \varphi_1^2(t) &= \xi^3 - \xi^2, \end{aligned} \qquad (11.17)$$

где $\xi = t/h$, $h = \Delta t$ — длина элемента времени и для простоты используется локальный отсчет $t_1 = 0$, $t_2 = h$.

---

[1]) См. Фрид [1969б].

Рассмотрим динамическую систему, для которой

$$\mathfrak{L}_{(e)} = \int_{t_1}^{t_2} (\varkappa - U + V + D)\, dt, \tag{11.18}$$

где $\varkappa$ — кинетическая энергия, $U - V$ — потенциальная энергия, а D — работа сил вязкости. Поскольку подынтегральное выражение содержит интегралы от перемещения $\mathbf{u}$ и его градиентов по объему среды, подстановка (11.16) в (11.18) приводит к соотношению

$$\mathfrak{L}_{(e)} = \frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} (m_{NM}\dot{\mathbf{u}}^N \cdot \dot{\mathbf{u}}^M - k_{NM}\mathbf{u}^N \cdot \mathbf{u}^M + 2\mathbf{p}_N \cdot \mathbf{u}^N + 2c_{NM}\mathbf{u}^N \cdot \dot{\mathbf{u}}^M)\, dt, \tag{11.19}$$

где m_{NM}, k_{NM} и c_{NM} — соответственно матрицы масс, жесткостей и демпфирования для нашего элемента, а $\mathbf{p}_N = \mathbf{p}_N(t)$ — вектор обобщенной силы в узле N [1]). Здесь

$$\mathbf{u}^N(t) = \varphi_0^\alpha(t)\, \mathbf{u}_\alpha^N + \varphi_1^\alpha(t)\, \dot{\mathbf{u}}_\alpha^N. \tag{11.20}$$

Если мы возьмем для $\mathbf{p}_N(t)$ такую аппроксимацию по времени:

$$\mathbf{p}_N(t) = \psi_\alpha(t)\, \mathbf{p}_N^\alpha, \tag{11.21}$$

$\alpha = 1, 2$, то, подставляя (11.20) и (11.21) в (11.19), получаем

$$\mathfrak{L}_{(e)} = \frac{1}{2}(A_{NM}^{\alpha\beta}\mathbf{u}_\alpha^N \cdot \mathbf{u}_\beta^M + B_{NM}^{\alpha\beta}\dot{\mathbf{u}}_\alpha^N \cdot \mathbf{u}_\beta^M + C_{NM}^{\alpha\beta}\mathbf{u}_\alpha^N \cdot \dot{\mathbf{u}}_\beta^M + D_{NM}^{\alpha\beta}\dot{\mathbf{u}}_\alpha^N \cdot \dot{\mathbf{u}}_\beta^M + d_{\alpha 0}^\beta \mathbf{p}_N^\alpha \cdot \mathbf{u}_\beta^N + d_{\alpha 1}^\beta \mathbf{p}_N^\alpha \cdot \dot{\mathbf{u}}_\beta^N), \tag{11.22}$$

где

$$A_{NM}^{\alpha\beta} = m_{NM}a_{00}^{\alpha\beta} - k_{NM}c_{00}^{\alpha\beta} + 2c_{NM}b_{00}^{\alpha\beta}, \tag{11.23а}$$

$$B_{NM}^{\alpha\beta} = m_{NM}a_{10}^{\alpha\beta} - k_{NM}c_{10}^{\alpha\beta} + 2c_{NM}b_{10}^{\alpha\beta}, \tag{11.23б}$$

$$C_{NM}^{\alpha\beta} = m_{NM}a_{01}^{\alpha\beta} - k_{NM}c_{01}^{\alpha\beta} + 2c_{NM}b_{01}^{\alpha\beta}, \tag{11.23в}$$

$$D_{NM}^{\alpha\beta} = m_{NM}a_{11}^{\alpha\beta} - k_{NM}c_{11}^{\alpha\beta} + 2c_{NM}b_{11}^{\alpha\beta} \tag{11.23г}$$

и

$$a_{rs}^{\alpha\beta} = \int_{t_1}^{t_2} \dot{\varphi}_r^\alpha \dot{\varphi}_s^\beta\, dt, \tag{11.24а}$$

$$b_{rs}^{\alpha\beta} = \int_{t_1}^{t_2} \varphi_r^\alpha \dot{\varphi}_s^\beta\, dt, \tag{11.24б}$$

[1]) Более подробно матрицы масс и жесткостей и обобщенные силы для конечных элементов рассматриваются в § 13 и 16.

$$c_{rs}^{\alpha\beta}=\int_{t_1}^{t_2}\varphi_r^\alpha\varphi_s^\beta\,dt, \qquad (11.24\text{в})$$

$$d_{\alpha 0}^{\beta}=\int_{t_1}^{t_2}2\psi_\alpha\varphi_0^\beta\,dt, \qquad (11.24\text{г})$$

$$d_{\alpha 1}^{\beta}=\int_{t_1}^{t_2}2\psi_\alpha\varphi_1^\beta\,dt \qquad (11.24\text{д})$$

при $r, s = 0, 1$.

Из принципа Гамильтона следует, что

$$\delta\mathfrak{L}_{(e)}=(\partial\mathfrak{L}_{(e)}/\partial\mathbf{u}_\alpha^N)\cdot\delta\mathbf{u}_\alpha^N+(\partial\mathfrak{L}_{(e)}/\partial\dot{\mathbf{u}}_\alpha^N)\cdot\delta\dot{\mathbf{u}}_\alpha^N=0.$$

Значит,

$$\begin{aligned}&A_{NM}^{\alpha\beta}\mathbf{u}_\beta^M+\frac{1}{2}\left(B_{MN}^{\beta\alpha}+C_{NM}^{\alpha\beta}\right)\dot{\mathbf{u}}_\beta^M+d_{\beta 0}^{\alpha}\mathbf{p}_N^\beta=0,\\&D_{NM}^{\alpha\beta}\dot{\mathbf{u}}_\beta^M+\frac{1}{2}\left(B_{NM}^{\alpha\beta}+C_{MN}^{\beta\alpha}\right)\mathbf{u}_\beta^M+d_{\beta 1}^{\alpha}\mathbf{p}_N^\beta=0.\end{aligned} \qquad (11.25)$$

После связывания конечных элементов (в пространстве и времени) и использования краевых и начальных условий из (11.25) получаем систему линейных уравнений относительно $\mathbf{u}_\alpha^N$ и $\dot{\mathbf{u}}_\alpha^N$. Таким образом, в противоположность рассмотренной ранее схеме для примера распространения волны эта конечноэлементная модель приводит к неявной (и, следовательно, часто безусловно устойчивой) схеме интегрирования.

11.2. КОНЕЧНЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ В КОМПЛЕКСНОЙ ПЛОСКОСТИ. УРАВНЕНИЕ ШРЁДИНГЕРА

Волновое уравнение Шрёдингера из квантовой механики записывается в терминах комплексной волновой функции χ. Посмотрим, как строятся конечноэлементные аналоги уравнений Шрёдингера для χ и для комплексно-сопряженной функции $\bar{\chi}$ в случае, когда частица массы m находится под воздействием потенциального поля $V(\mathbf{x}) = V(x, y, z)$.

Волновая функция $\chi(\mathbf{x}, t)$ может быть записана в виде

$$\chi(\mathbf{x}, t) = u(\mathbf{x}, t) + iv(\mathbf{x}, t), \qquad (11.26)$$

где $i=\sqrt{-1}$. Комплексно-сопряженная функция $\bar{\chi}(\mathbf{x}, t) = u(\mathbf{x}, t) - iv(\mathbf{x}, t)$, и произведение $\chi(\mathbf{x}, t)\,\bar{\chi}(\mathbf{x}, t)$ с физической точки зрения характеризует плотность вероятности в момент времени t нахождения частицы в положении, определяемом координатами $\mathbf{x}$. Ограничиваясь рассмотрением типичного конечного

элемента e, локально аппроксимируем действительную и мнимую части функции χ (x, t) следующим образом:

$$u^{(e)}(\mathbf{x}, t) = \psi_N(\mathbf{x})\, u^N_{(e)}, \qquad v^{(e)}(\mathbf{x}, t) = \psi_N(\mathbf{x})\, v^N_{(e)}, \quad (11.27а, б)$$

где $u^N_{(e)}$, $v^N_{(e)}$ — зависящие от времени узловые значения функций u (x, t) и v (x, t). Тогда

$$\chi^{(e)}(\mathbf{x}, t) = \chi^N_{(e)}\psi^{(e)}_N(\mathbf{x}), \qquad (11.28а)$$

$$\bar{\chi}^{(e)}(\mathbf{x}, t) = \bar{\chi}^N_{(e)}\psi^{(e)}_N(\mathbf{x}), \qquad (11.28б)$$

где

$$\chi^N_{(e)} = u^N_{(e)} + iv^N_{(e)}, \qquad \bar{\chi}^N_{(e)} = u^N_{(e)} - iv^N_{(e)}. \qquad (11.29а, б)$$

Лагранжева плотность $L^{(e)}$ для нашего элемента равна [1])

$$L^{(e)} = \frac{h^2}{8\pi^2 m}\operatorname{grad}\bar{\chi}\cdot\operatorname{grad}\chi - \frac{h}{4\pi i}\left(\bar{\chi}\frac{\partial\chi}{\partial t} - \frac{\partial\bar{\chi}}{\partial t}\chi\right) - \bar{\chi}V\chi, \qquad (11.30)$$

где h — постоянная Планка; варьируя функции $\bar{\chi}$ и χ, мы должны минимизировать $\mathfrak{L} = \int\int\int\int L^{(e)}\, d\mathscr{R}\, dt$.

Подставляя (11.28) в (11.30) и требуя, чтобы

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L^{(e)}}{\partial\dot{\chi}^N}\right) - \frac{\partial L^{(e)}}{\partial\chi^N} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L^{(e)}}{\partial\dot{\bar{\chi}}^N}\right) - \frac{\partial L^{(e)}}{\partial\bar{\chi}^N} = 0,$$

получаем пару уравнений:

$$\frac{h^2}{8\pi^2 m}\alpha^{(e)}_{MN}\bar{\chi}^M_{(e)} + \frac{h}{2\pi i}\beta^{(e)}_{MN}\dot{\bar{\chi}}^M_{(e)} - \gamma^{(e)}_{MN}\bar{\chi}^M_{(e)} = 0, \qquad (11.31а)$$

$$\frac{h^2}{8\pi^2 m}\alpha^{(e)}_{MN}\chi^M_{(e)} - \frac{h}{2\pi i}\beta^{(e)}_{MN}\dot{\chi}^M_{(e)} - \gamma^{(e)}_{MN}\chi^M_{(e)} = 0, \qquad (11.31б)$$

где

$$\alpha^{(e)}_{MN} = \int_{r_e}\psi_{M,i}(\mathbf{x})\,\psi_{N,i}(\mathbf{x})\,dr_e, \qquad (11.32а)$$

$$\beta^{(e)}_{MN} = \int_{r_e}\psi_M(\mathbf{x})\,\psi_N(\mathbf{x})\,dr_e \qquad (11.32б)$$

и

$$\gamma^{(e)}_{MN} = \int_{r_e}\psi_M(\mathbf{x})\,V(\mathbf{x})\,\psi_N(\mathbf{x})\,dr_e. \qquad (11.32в)$$

Уравнения (11.31) представляют собой дискретную интерпретацию волновых уравнений Шрёдингера для конечного элемента.

[1]) См. Морс и Фешбах [1958].

Величины $h\beta_{MN}^{(e)}\chi_{(e)}^{M}/2\pi i$ и $h\beta_{MN}^{(e)}\bar{\chi}_{(e)}^{M}/2\pi i$ являются обобщенными каноническими моментами в узловой точке N элемента, а $(h^2\alpha_{MN}^{(e)}/8\pi^2 m) - \gamma_{MN}^{(e)}$ — дискретным эквивалентом оператора Гамильтона для частицы, находящейся в конечном элементе e.

11.3. ОДНО НЕЛИНЕЙНОЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

Кратко рассмотрим конечноэлементную формулировку одной нелинейной краевой задачи, состоящей в нахождении функции $u(x, y)$, определенной в некоторой замкнутой области $\mathcal{R}$ эвклидовой плоскости и удовлетворяющей там нелинейному дифференциальному уравнению

$$2u\nabla^2 u + u_x^2 + u_y^2 = f(x, y) \tag{11.33}$$

при однородном условии

$$u(s) = 0 \tag{11.34}$$

на граничной кривой Г. Здесь $\nabla^2 = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$, $u_x = \partial u/\partial x$ и $u_y = \partial u/\partial y$.

Поступая, как указано в п. 10.1, вводим нелинейный оператор

$$\mathcal{P}(u) = f - 2u\nabla^2 u - u_x^2 - u_y^2, \tag{11.35}$$

так что (11.33) можно записать в виде

$$\mathcal{P}(u) = 0. \tag{11.36}$$

Нетрудно показать, что $\mathcal{P}$ — потенциальный оператор; действительно, в соответствии с (10.19)

$$\begin{aligned}\delta\mathcal{P}(u, h) &= \mathcal{P}(u+h) - \mathcal{P}(u) - \omega(u, h) = \\ &= -2(\nabla^2 uh - u_x h_x - u_y h_y),\end{aligned} \tag{11.37}$$

где h — произвольная функция, удовлетворяющая условию (11.34). Если g — еще одна такая функция, то

$$\begin{aligned}&\langle\delta\mathcal{P}(u, h), g\rangle - \langle\delta\mathcal{P}(u, g), h\rangle = \\ &= -2\int_{\mathcal{R}} [g\nabla^2 uh - h\nabla^2 ug - g(u_x h_x + u_y h_y) + h(u_x g_x + u_y g_y)]\, d\mathcal{R} = \\ &= -2\int_{\mathcal{R}} [gu\nabla^2 h - hu\nabla^2 g + g(u_x h_x + u_y h_y) - h(u_x g_x + u_y g_y)]\, d\mathcal{R}.\end{aligned} \tag{11.38}$$

Поскольку

$$\int_{\mathcal{R}} gu\nabla^2 h\, d\mathcal{R} = -\int_{\mathcal{R}} \left[h_x \frac{\partial}{\partial x}(gu) + h_y \frac{\partial}{\partial y}(gu)\right] d\mathcal{R} + \int_{\Gamma} gu \frac{\partial h}{\partial n}\, ds$$

и т. д., а интеграл по контуру обращается в нуль, ибо g и h удовлетворяют условию (11.34), последний интеграл в (11.38) равен нулю и

$$\langle \delta\mathcal{F}(u, h), g\rangle = \langle \delta\mathcal{F}(u, g), h\rangle. \qquad (11.39)$$

Эта симметричность и показывает, что оператор $\mathcal{F}$ потенциален.

Следовательно, по теореме 10.4 существует функционал $K(u)$, определяемый формулой (10.21), градиентом которого является $\mathcal{F}(u)$. Замечая, что

$$-\langle \mathcal{F}(\tau u), u\rangle = \int_{\mathcal{R}} [\tau^2(2u^2\nabla^2 u + uu_x^2 + uu_y^2) - uf]\, d\mathcal{R},$$

где τ — параметр, интегрируя последовательно по частям и используя (11.34), находим, что

$$\langle \mathcal{F}(\tau u), u\rangle = \int_{\mathcal{R}} [3\tau^2 u(u_x^2 + u_y^2) + uf]\, d\mathcal{R}. \qquad (11.40)$$

Подставляя (11.40) в (10.21) (с s, замененным на τ, и $u_0 = K_0 = 0$) и выполняя интегрирование, получаем функционал

$$K(u) = \int_{\mathcal{R}} [u(u_x^2 + u_y^2) + uf]\, d\mathcal{R}. \qquad (11.41)$$

Легко проверить, что $\mathcal{F}(u)$ действительно является градиентом для $K(u)$:

$$K(u + \alpha h) - K(u) = \alpha \int_{\mathcal{R}} [h(u_x^2 + u_y^2) + 2u(u_x h_x + u_y h_y) + hf]\, d\mathcal{R} +$$
$$+ \alpha^2 \int_{\mathcal{R}} [u(h_x^2 + h_y^2) + 2h(u_x h_x + u_y h_y)]\, d\mathcal{R} +$$
$$+ \alpha^3 \int_{\mathcal{R}} h(h_x^2 + h_y^2)\, d\mathcal{R}. \qquad (11.42)$$

Поскольку $h = 0$ на Γ, первый интеграл в правой части (11.42) после интегрирования по частям можно записать в виде

$$-\alpha \int_{\mathcal{R}} h(2u\nabla^2 u + u_x^2 + u_y^2 - f)\, d\mathcal{R},$$

так что

$$\lim_{\alpha\to 0} \frac{1}{\alpha}[K(u + \alpha h) - K(u)] = \int_{\mathcal{R}} \mathcal{F}(u)\, h\, d\mathcal{R} = \langle \mathcal{F}(u), h\rangle.$$

Следовательно,

$$\operatorname{grad} K(u) = \mathcal{F}(u), \qquad (11.43)$$

и в точке u^*, удовлетворяющей уравнению (11.36),

$$\operatorname{grad} K(u^*) = 0, \tag{11.44}$$

т. е. u^* является критической точкой функционала $K(u)$.

Возвращаясь теперь к построению конечноэлементной модели уравнения (11.33), представим $\mathscr{R}$ в виде совокупности E конечных элементов $\overline{\mathscr{R}}$ и обозначим через $k^{(e)}(u)$ ограничение $K(u)$ на элемент e. Тогда приближенно

$$K(u) = \sum_{e=1}^{E} k^{(e)}(u^{(e)}), \tag{11.45}$$

где

$$k^{(e)}(u^{(e)}) = \int_{r_e} [u^{(e)}(u_x^{(e)2} + u_y^{(e)2}) + u^{(e)}f]\, dr_e. \tag{11.46}$$

Локально на типичном элементе r_e имеем $u^{(e)}(x, y) = u_{(e)}^N \psi_N^{(e)}(x, y)$ и

$$k^{(e)}(u^{(e)}) = a_{NMR}^{(e)} u_{(e)}^N u_{(e)}^M u_{(e)}^R + u_{(e)}^N f_N^{(e)}, \tag{11.47}$$

где

$$a_{NMR}^{(e)} = \int_{r_e} \psi_N^{(e)} \left(\frac{\partial\psi_M^{(e)}}{\partial x} \frac{\partial\psi_R^{(e)}}{\partial x} + \frac{\partial\psi_M^{(e)}}{\partial y} \frac{\partial\psi_R^{(e)}}{\partial y} \right) dr_e, \tag{11.48а}$$

$$f_N^{(e)} = \int_{r_e} \psi_N^{(e)} f\, dr_e, \tag{11.48б}$$

$M, N, R = 1, 2, \ldots, N_e$. Локально $u^{(e)}$ реализует экстремум $k^{(e)}$ в подпространстве, порождаемом функциями $\psi_N^{(e)}(x, y)$, если коэффициенты $u_{(e)}^I$ выбраны так, чтобы

$$\frac{\partial k^{(e)}(u^{(e)})}{\partial u_{(e)}^I} = 0. \tag{11.49}$$

Используя (11.47), приходим к системе квадратных уравнений

$$\hat{a}_{IMN}^{(e)} u_{(e)}^M u_{(e)}^N + f_I^{(e)} = 0, \tag{11.50}$$

где

$$\hat{a}_{IMN}^{(e)} = a_{IMN}^{(e)} + 2a_{NMI}^{(e)}. \tag{11.51}$$

Поскольку

$$u_{(e)}^N = \overset{(e)}{\Omega}{}_{\Delta}^N U^\Delta, \tag{11.52}$$

из (11.47) и (11.45) вытекает, что

$$K(u) = A_{\Lambda\Gamma\Delta} U^\Lambda U^\Gamma U^\Delta + F_\Delta U^\Delta, \tag{11.53}$$

где

$$A_{\Lambda\Gamma\Delta} = \sum_{e=1}^{E} \overset{(e)}{\Omega}{}_{\Lambda}^{N} \overset{(e)}{\Omega}{}_{\Gamma}^{M} \overset{(e)}{\Omega}{}_{\Delta}^{R} a_{NMR}^{(e)}, \qquad F_{\Delta} = \sum_{e=1}^{E} \overset{(e)}{\Omega}{}_{\Delta}^{N} f_{N}^{(e)}. \quad (11.54а, б)$$

Окончательно конечноэлементный аналог уравнения (11.33) получается из условий $\partial K(u)/\partial U^{\Delta} = 0$ [или непосредственно подстановкой (11.52) в (11.50) и результата этой подстановки в (11.54б)]:

$$\hat{A}_{\Lambda\Gamma\Delta} U^{\Gamma} U^{\Delta} + F_{\Lambda} = 0, \quad (11.55)$$

где

$$\hat{A}_{\Lambda\Gamma\Delta} = A_{\Lambda\Gamma\Delta} + 2A_{\Delta\Gamma\Lambda}. \quad (11.56)$$

Используя теперь краевые условия (т. е. полагая $U^{\Delta} = 0$ в узлах Δ на границе $\overline{\mathscr{R}}$), мы видим, что (11.55) дает нам систему квадратных уравнений относительно неизвестных узловых значений U^{Δ}. Методы решения таких систем нелинейных алгебраических уравнений рассматриваются в § 17.

11.4. КИНЕТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ГАЗОВ. УРАВНЕНИЕ БОЛЬЦМАНА

В статистической механике разреженных газов (свободное молекулярное течение без столкновений) встречаются задачи, в которых успешно можно использовать конечноэлементные модели в шестимерном μ-пространстве. Молекулярная плотность предполагается достаточно низкой, а температура достаточно высокой, так что каждая молекула газа может рассматриваться как классическая частица с определенным положением и импульсом. Поведение содержащегося в некотором объеме газа в классической кинетической теории [1]) описывается функцией распределения $f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$, определенной таким образом, что она характеризует число молекул, находящихся в момент времени t в элементарном «объеме» $d\Omega$ шестимерного фазового пространства (x_1, x_2 и x_3 задают положение молекулы, а $x_4 = v_1$, $x_5 = v_2$, $x_6 = v_3$ суть компоненты ее скорости). В отличие от классической механики, в которой имеют дело только со средними скоростями, величины v_1, v_2 и v_3 считаются независимыми от x_1, x_2 и x_3. Укажем в общих чертах, как строятся конечноэлементные аппроксимации таких функций распределения [2]).

Рассмотрим уравнение Больцмана для функции распределения $f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$ при неустановившемся состоянии для модели столкновения Батангера — Гросса — Крука (БГК) в условиях отсут-

[1]) См., например, Хуанг [1963].

[2]) Такие конечноэлементные аппроксимации рассматривались в статьях Одена [1969б], Брэмлетта и Мэллета [1970] и Агирре-Рамиреса, Одена и Ву [1970]. Наше изложение основано на последней статье.

ствия внешних сил:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v}\cdot\operatorname{grad} f = \frac{F-f}{\tau}. \tag{11.57}$$

Здесь $\mathbf{v}$ — (микро)скорость, $\mathbf{x}$ — радиус-вектор, F — максвелловское распределение и τ — время столкновения.

В принципе можно было бы непосредственно построить конечноэлементную модель (11.57) с помощью шестимерных конечных элементов в μ-пространстве, поскольку все необходимое для такого построения было подготовлено в § 7. Например, можно было бы представить область дискретной моделью $\overline{\mathscr{R}}$, являющейся совокупностью шестимерных элементов (скажем, симплексов), и записать для ограничения функции $f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$ на типичный элемент:

$$f^{(e)}(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) \approx f^N_{(e)}(t)\,\psi^{(e)}_N(x_1, x_2, \ldots, x_6), \tag{11.58}$$

$N = 1, 2, \ldots, N_e$ $(N_e > 7)$. Используя метод взвешенных невязок, мы получили бы аналог (11.57) для типичного элемента в виде

$$r^{(e)}_{NM}\dot{f}^M_{(e)} + s^{(e)}_{NM} f^M_{(e)} = y^{(e)}_N, \tag{11.59}$$

где $\dot{f}^M_{(e)} = df^M_{(e)}/dt$ (для сокращения письма введем $\mathbf{x}^* = (x_1, x_2, \ldots, x_6)$)

$$r^{(e)}_{NM} = \int\limits_{\Omega_{(e)}} \psi^{(e)}_N(\mathbf{x}^*)\,\dot{\psi}^{(e)}_M(\mathbf{x}^*)\,d\Omega, \tag{11.60а}$$

$$s^{(e)}_{NM} = \int\limits_{\Omega_{(e)}} \left[\psi^{(e)}_N(\mathbf{x}^*) \sum_{m=1}^{3} v_m \frac{\partial \psi^{(e)}_M(\mathbf{x}^*)}{\partial x_m} + \frac{1}{\tau}\psi^{(e)}_N(\mathbf{x}^*)\,\psi^{(e)}_M(\mathbf{x}^*)\right] d\Omega, \tag{11.60б}$$

$$y^{(e)}_N = \int\limits_{\Omega_{(e)}} \frac{1}{\tau} F\psi^{(e)}_N(\mathbf{x}^*)\,d\Omega. \tag{10.60в}$$

Все дальнейшие рассуждения по существу те же.

К сожалению, записанные выше уравнения чрезвычайно трудно использовать в практических расчетах, и поэтому целесообразно поискать другую конечноэлементную модель. Для иллюстрации одной из таких возможностей скомбинируем основные идеи метода конечных элементов и метода Канторовича [1]) [1933]. Предположим, что в области Ω функция $f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$ приближенно представима в виде

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) = \sum_{\alpha=1}^{n} c_\alpha(\mathbf{x}, t)\,\Omega_\alpha(\mathbf{v}), \tag{11.61}$$

[1]) Точнее, метода Бубнова — Власова.— *Прим. ред.*

где c_α и Ω_α — некоторые функции указанных аргументов, а n — некоторое целое число. Поскольку равенство (11.61) является лишь приближенным, можно с помощью (11.57) определить невязку

$$R=\sum_{\alpha=1}^{n}\left(\frac{\partial c_\alpha(\mathbf{x},t)}{\partial t}+\mathbf{v}\cdot\operatorname{grad}c_\alpha+\frac{c_\alpha}{\tau}\right)\Omega_\alpha-\frac{F}{\tau}. \qquad (11.62)$$

Тогда при соответствующем выборе весовых функций $W_\beta(\mathbf{v})$ из условий

$$\int\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int W_\beta(\mathbf{v})\,R\,d\mathbf{v}=0 \qquad (11.63)$$

получим систему дифференциальных уравнений

$$a_{\beta\alpha}\frac{\partial c_\alpha}{\partial t}+\mathbf{b}_{\beta\alpha}\cdot\operatorname{grad}c_\alpha+a^*_{\beta\alpha}c_\alpha-F^*_\beta=0, \qquad (11.64)$$

где по повторяющемуся индексу α производится суммирование от 1 до n и

$$a_{\beta\alpha}=\int\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int W_\beta(\mathbf{v})\,\Omega_\alpha(\mathbf{v})\,d\mathbf{v}, \qquad \mathbf{b}_{\beta\alpha}=\int\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int \mathbf{v}W_\beta(\mathbf{v})\,\Omega_\alpha(\mathbf{v})\,d\mathbf{v}, \qquad (11.65)$$

$$a^*_{\beta\alpha}=\int\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int \frac{1}{\tau}W_\beta(\mathbf{v})\,\Omega_\alpha(\mathbf{v})\,d\mathbf{v}, \qquad F^*_\beta=\int\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int \frac{1}{\tau}W_\beta(\mathbf{v})\,F(\mathbf{v})\,d\mathbf{v}.$$

Теперь можно приступить к построению конечноэлементной модели для (11.64). Представляя $\mathcal{R}$ (пространственную область определения функций $c_\alpha(\mathbf{x},t)$) в виде некоторой совокупности элементов, запишем для типичного элемента e

$$c_\alpha^{(e)}(\mathbf{x},t)\approx c^N_{\alpha(e)}(t)\,\psi_N^{(e)}(\mathbf{x}). \qquad (11.66)$$

Локальная невязка r_e для каждого элемента равна

$$r_e=a_{\beta\alpha}\psi_N^{(e)}(\mathbf{x})\,\dot{c}^N_{\alpha(e)}+\left[\mathbf{b}_{\beta\alpha}\cdot\operatorname{grad}\psi_N^{(e)}(\mathbf{x})+a^*_{\beta\alpha}\psi_N^{(e)}(\mathbf{x})\right]c^N_{\alpha(e)}-F^*_\beta, \qquad (11.67)$$

где $\dot{c}^N_{\alpha(e)}=dc^N_{\alpha(e)}/dt$. Из условия

$$\int\limits_{r_e}\psi_N^{(e)}(\mathbf{x})\,r_e\,dr_e=0 \qquad (11.68)$$

получаем конечноэлементное уравнение

$$a_{\beta\alpha}A_{MN}\dot{c}^N_{\alpha(e)}+\left(\mathbf{b}_{\beta\alpha}\cdot\mathbf{B}_{MN}+a^*_{\beta\alpha}A_{MN}\right)c^N_{\alpha(e)}-F^*_{\beta M}=0, \qquad (11.69)$$

где

$$A_{MN} = A_{NM} = \int_{r_{(e)}} \psi_M(\mathbf{x})\, \psi_N(\mathbf{x})\, dr_e,$$

$$\mathbf{B}_{MN} = \int_{r_{(e)}} \psi_M(\mathbf{x}) \operatorname{grad} \psi_N(\mathbf{x})\, dr_e, \qquad (11.70)$$

$$F^*_{\beta M} = F^*_\beta \int_{r_{(e)}} \psi_M(\mathbf{x})\, dr_e;$$

идентификационная метка элемента e для простоты опущена. Используя соотношения

$$c^N_{\alpha(e)} = \overset{(e)}{\Omega}{}^N_\Delta C^\Delta_\alpha, \qquad F^*_{\beta\Gamma} = \sum_{e=1}^{E} \overset{(e)}{\Omega}{}^M_\Gamma F^*_{\beta M}, \qquad (11.71)$$

придем к системе дискретных уравнений для связанной системы:

$$a_{\beta\alpha} A_{\Gamma\Delta} \dot{C}^\Delta_\alpha + (\mathbf{b}_{\beta\alpha} \cdot \mathbf{B}^*_{\Gamma\Delta} + a^*_{\beta\alpha} A_{\Gamma\Delta})\, C^\Delta_\alpha - F^*_{\beta\Gamma} = 0, \qquad (11.72)$$

где

$$A_{\Gamma\Delta} = A_{\Delta\Gamma} = \sum_{e=1}^{E} \overset{(e)}{\Omega}{}^M_\Gamma A^{(e)}_{MN} \overset{(e)}{\Omega}{}^N_\Delta,$$

$$\mathbf{B}^*_{\Gamma\Delta} = \sum_{e=1}^{E} \overset{(e)}{\Omega}{}^M_\Gamma \mathbf{B}^{(e)}_{MN} \overset{(e)}{\Omega}{}^N_\Delta. \qquad (11.73)$$

Уравнения (11.72) представляют собой систему дифференциальных уравнений относительно узловых величин C^Δ_α. Отметим, что после нахождения $C^\Delta_\alpha(t)$ можно с помощью (11.61) построить дискретную модель функции распределения:

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) = \sum_{\alpha=1}^{n} C^\Delta_\alpha(t)\, \Phi_\Delta(\mathbf{x})\, \Omega_\alpha(\mathbf{v}), \qquad (11.74)$$

где

$$\Phi_\Delta(\mathbf{x}) = \sum_{e=1}^{E} \overset{(e)}{\Omega}{}^N_\Delta \psi^{(e)}_N(\mathbf{x}).$$

Неустановившееся куэттовское течение. В качестве примера рассмотрим течение между двумя параллельными пластинами, расположенными на расстоянии d друг от друга и ускоряющимися в противоположных направлениях от состояния покоя до некоторой постоянной скорости $U/2$ (рис. 11.3). Удобно ввести постоянную $\beta = (m/2kT)^{1/2}$, где m — молекулярная масса, k — постоянная Больцмана, а T — температура. Направив ось x

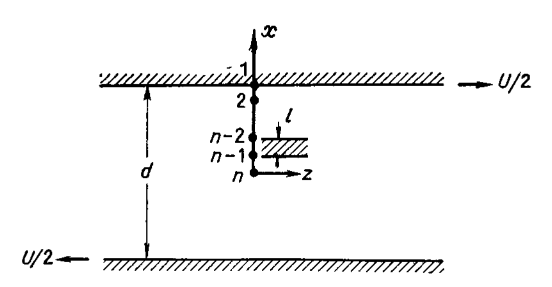


Рис. 11.3. Модель куэттовского течения между параллельными пластинами.

перпендикулярно течению, введем безразмерную координату ξ и безразмерную скорость **c** соотношениями

$$\xi = \frac{x}{d}, \qquad \mathbf{c} = \beta \mathbf{v}. \tag{11.75}$$

Предположим, что функция распределения f имеет вид

$$f(\xi, \mathbf{c}, t) = n_0 \beta^3 \pi^{-3/2} \exp(-\mathbf{c}^2) [1 + \varphi^*(\xi, \mathbf{c}, t)], \tag{11.76}$$

где n_0 — число, характеризующее плотность, а φ^* — функция возмущения. Для линеаризированной задачи течения без изменения плотности и температуры можно принять, что функция возмущения φ^* имеет вид

$$\varphi^*(\xi, \mathbf{c}, t) = U c_z \varphi(\xi, c_x, t), \tag{11.77}$$

и линеаризированное одномерное уравнение Больцмана для модели столкновения БГК принимает вид

$$\beta \frac{\partial \varphi}{\partial t} + c_x \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} + \alpha \varphi = \frac{\alpha}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi, \zeta, t) \exp(1 - \zeta^2)\, d\zeta, \tag{11.78}$$

где α — число, обратное числу Кнудсена. Интересующие нас величины макроскопической скорости течения $q_z(\xi, t)$ и вязкого сдвигового напряжения $\tau_{xz}(\xi, t)$ определяются формулами

$$\begin{gathered} \frac{q_z(\xi, t)}{U/2} = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-\zeta^2)\, \varphi(\xi, \zeta, t)\, d\zeta, \\ \frac{\tau_{xz}(\xi, t)}{\tau_{xz_{\mathrm{fm}}}} = \int_{-\infty}^{\infty} \zeta \exp(-\zeta^2)\, \varphi(\xi, \zeta, t)\, d\zeta, \end{gathered} \tag{11.79}$$

где $\tau_{xz_{\mathrm{fm}}} = -U/2\sqrt{\pi}$ — свободная молекулярная [1]) величина сдвигового напряжения.

---

[1]) В оригинале free molecular; отсюда индекс fm.— *Прим. ред.*

Для получения приближенного решения уравнения (11.78) по методу конечных элементов рассмотрим полиномы Эрмита, определяемые формулой

$$H_\lambda(\zeta) = (-1)^\lambda \exp(\zeta^2) \frac{d^\lambda}{d\zeta^\lambda} \exp(-\zeta^2), \qquad \lambda = 0,\ 1,\ \ldots \tag{11.80}$$

Множество функций Ω_λ в (11.61) введем следующим образом:

$$\Omega_\lambda(\zeta) = \exp\left(-\frac{1}{2}\zeta^2\right) H_\lambda(\zeta). \tag{11.81}$$

Функции $H_\lambda(\zeta)$ ортогональны на $(-\infty,\ \infty)$ относительно веса $\exp\left(-\frac{1}{2}\zeta^2\right)$. Кроме того,

$$\int_{-\infty}^{\infty} [\Omega_\lambda(\zeta)]^2\, d\zeta = 2^\lambda \lambda!\, \sqrt{\pi}. \tag{11.82}$$

Предположим, что аппроксимация функции φ имеет вид

$$\varphi(\xi,\ c_x,\ t) = \sum_{\lambda=1}^{n} c_\lambda(\xi,\ t)\, \Omega_\lambda(c_x), \tag{11.83}$$

где Ω_λ определяется формулой (11.81), и найдем невязку:

$$R = \sum_{\lambda=1}^{n} \left(\beta \frac{\partial c_\lambda}{\partial t}(\xi,\ t) + c_x \frac{\partial c_\lambda}{\partial \xi}(\xi,\ t) + \alpha c_\lambda(\xi,\ t)\right) \Omega_\lambda(c_x) - \frac{\alpha}{\sqrt{\pi}} \sum_{\lambda=1}^{n} G_\lambda c_\lambda(\xi,\ t), \tag{11.84}$$

где

$$G_\lambda = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-\zeta^2)\, \Omega_\lambda(\zeta)\, d\zeta. \tag{11.85}$$

Уравнение (11.64) теперь принимает вид

$$a_{\psi\lambda} \frac{\partial c_\lambda}{\partial t} + b_{\psi\lambda} \frac{\partial c_\lambda}{\partial \xi} + a^*_{\psi\lambda} c_\lambda = 0, \tag{11.86}$$

где

$$a_{\psi\lambda} = \beta \int_{-\infty}^{\infty} W_\psi(\zeta)\, \Omega_\lambda(\zeta)\, d\zeta,$$

$$b_{\psi\lambda} = \alpha \int_{-\infty}^{\infty} \zeta W_\psi(\xi)\, \Omega_\lambda(\zeta)\, d\zeta, \tag{11.87}$$

$$a^*_{\psi\lambda} = \frac{\alpha}{\beta} a_{\psi\lambda} - \frac{\alpha}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} W_\psi(\zeta)\, d\zeta\, G_\lambda.$$

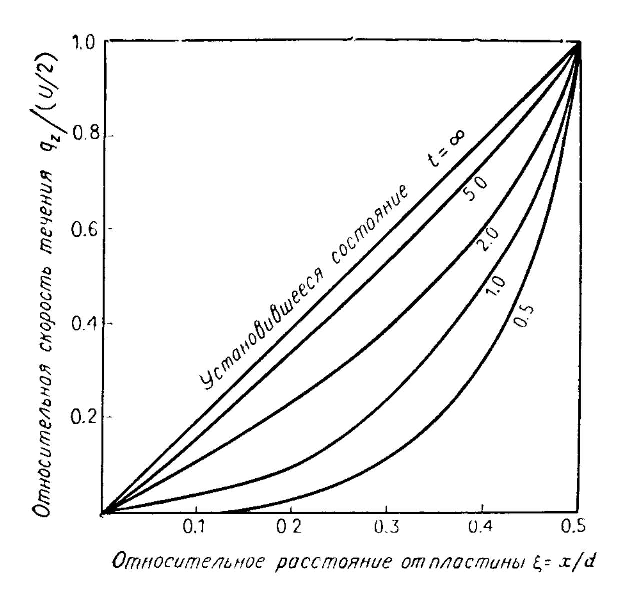


Рис. 11.4. Профили скоростей для различных моментов времени. Неустановившееся куэттовское течение.

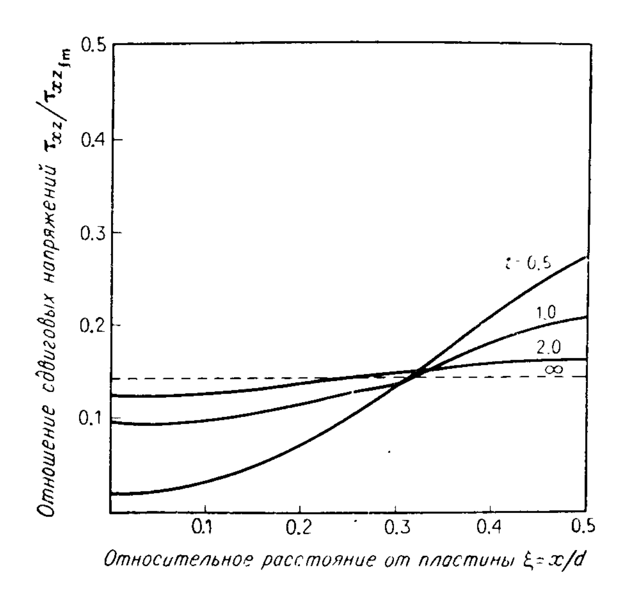


Рис. 11.5. Распределение сдвиговых напряжений для различных моментов времени. Неустановившееся куэттовское течение.

Ввиду ортогональности функций Ω_λ удобно выбрать $W_\beta(\zeta) = \Omega_\beta(\zeta)$ (т. е. использовать метод Галёркина). Взяв для примера в (11.83) $n = 2$, найдем, что

$$\frac{\partial c_\lambda}{\partial t} + E_{\lambda\psi}\frac{\partial c_\psi}{\partial \zeta} + D_{\lambda\psi}c_\psi = 0, \qquad (11.88)$$

где

$$[E_{\lambda\psi}] = \frac{\alpha}{2\beta}\begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad [D_{\lambda\psi}] = \frac{\alpha}{4\beta}\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}, \qquad (11.89)$$

а $b = 4 + \sqrt{8/27}$. Формулы (11.79) принимают вид

$$\frac{q_z(\xi, t)}{U/2} = -\frac{2}{3\sqrt{3}}c_2(\xi, t),$$
$$\frac{\tau_{xz}(\xi, t)}{\tau_{xzfm}} = +\frac{2}{3\sqrt{3}}c_1(\xi, t). \qquad (11.90)$$

Окончательное уравнение для типичного конечного элемента таково:

$$A_{MN}\dot{c}^N_{\lambda(e)} + (E_{\lambda\psi}B_{MN} + D_{\lambda\psi}A_{MN})\, c^N_{\psi(e)} = 0. \qquad (11.91)$$

Численные результаты, полученные при использовании формул (11.90) и (11.91) для $n = 2$, показаны на рис. 11.4 и 11.5. Они очень хорошо согласуются с решениями, найденными другими методами[1])

[1]) См., например, Хуанг и Гидденс [1967].

Глава III

Термомеханическое поведение конечных элементов сплошной среды

12. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ТЕРМОДИНАМИКИ

Хотя рассмотренные общие приемы построения дискретных моделей в принципе применимы к любым непрерывным полям, мы будем заниматься главным образом термомеханическими явлениями, поскольку именно с ними связаны наиболее важные проблемы нелинейной механики твердых тел. Термодинамические законы естественным образом устанавливают связь кинематических и динамических переменных с другими величинами, характеризующими термодинамическое состояние тел. Глобальные энергетические законы сохранения дополняют локальные уравнения сохранения количества движения и момента количества движения. Их можно использовать для получения конечноэлементных уравнений, удовлетворяющих, по крайней мере в некотором осредненном смысле, основным физическим законам (например, законам движения Коши) для конечных объемов тела.

Кратко изложим некоторые термодинамические понятия и законы [1]), являющиеся исходными при выводе общих уравнений сохранения энергии и уравнений движения для конечных элементов нелинейных сплошных сред.

12.1. ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ И ПОНЯТИЯ

В термодинамике отдельную часть физической вселенной или отдельное количество материи, идентифицированное для исследования, называют *системой*. Если между системой и ее окружением не происходит обмена материей, то говорят, что система

---

[1]) Обсуждение основ термодинамики применительно к теории сплошных сред имеется у Колемана [1964], Трусделла [1966а, 1966б] и Эрингена [1967]. См. также монографию Трусделла [1969] [и *[1972].— *Ред.*]. Обзор приложений к изучению деформируемых тел можно найти в ряде книг и статей. Вот некоторые из них: Био [1955, 1956], Боли и Уэйнер [1960], Фын [1965]. Изложение классической термодинамики имеется у Хатсопуласа и Кинэна [1965]. Вопросы прикладной термодинамики необратимых процессов освещены Майкснером [1943], Эккартом [1948], Пригожиным [1947, 1961], Де Гроотом и Мазуром [1962].

замкнута; если система не взаимодействует с окружающей средой, то говорят, что она *изолирована*. Таким образом, некоторое количество материи, выделенное для изучения его поведения, независимое от других количеств материи, не взаимодействующее и не обменивающееся материей с окружающей средой, является замкнутой изолированной системой.

Совокупность информации, которая полностью характеризует систему во всех отношениях, описывает *состояние* системы. В общем случае информация, характеризующая состояние системы в заданный момент времени, представляет собой значения некоторых функций, называемых *параметрами состояния* или *переменными состояния* и описывающих различные свойства системы.

Естественной и фундаментальной характеристикой состояния каждой термомеханической системы является то, насколько она горяча или холодна в данный момент времени. Описывается степень нагрева или охлаждения с помощью обычного понятия температуры. *Температура* θ — это вещественное число, показываемое термометром [1]. Если тело нагревается, то его температура повышается, если охлаждается, то понижается; во всем остальном шкала, в которой мы измеряем температуру, совершенно произвольна.

Экспериментальные исследования показывают, что безотносительно к масштабу используемого термометра существует температура, ниже которой никакая система не может быть охлаждена. Другими словами, температура ограничена снизу. Если точная нижняя грань принята за нуль, то температура называется *абсолютной* и при любом масштабе

$$\theta > 0. \qquad (12.1)$$

Работа определяется обычным путем; например, работа силы $\mathbf{F}$ при перемещении $d\mathbf{u}$ равна $\mathbf{F}\cdot d\mathbf{u}$. Конечно, для систем общего вида работу можно выразить многими разными способами.

При исследовании механического поведения сплошных тел мы имеем дело с *механической мощностью* Ω, развиваемой действующими на тело внешними силами. Мощность является мерой скорости,

[1] В некоторых работах по классической термостатике понятие температуры вводится в связи с определением равновесного состояния системы. Если переменные состояния системы не зависят явно от времени и система сама по себе не стремится изменить свое состояние (т. е. изменения могут происходить только вследствие внешних причин), то говорят, что система находится *в равновесии*. Постулат, гласящий, что две системы, каждая из которых пребывает в равновесии с третьей системой, пребывают в равновесии и между собой, обычно называют *нулевым законом термодинамики*. Можно показать, что равновесие трех систем означает существование у них общей переменной состояния, называемой температурой. Любая из этих трех (или большего количества) систем может играть роль термометра, который показывает температуру на некоторой удобной, но произвольной шкале. См. Уэплз [1952].

с которой эти силы совершают работу ($\Omega = \mathbf{F}\cdot d\mathbf{u}/dt$). Если $\mathbf{F}$ и $\mathbf{S}$ — плотности объемных сил и поверхностных усилий, действующих на тело объема v с площадью поверхности A и массовой плотностью ρ, то механическая мощность тела Ω задается формулой

$$\Omega = \int\limits_v \rho\mathbf{F}\cdot\mathbf{v}\,dv + \int\limits_A \mathbf{S}\cdot\mathbf{v}\,dA, \tag{12.2}$$

где $\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ — поле скоростей.

С понятием работы тесно связано понятие энергии. Энергия — это, попросту говоря, способность совершать работу. Это аддитивная скалярная мера, приписываемая количествам материи и характеризующая способность всех сил, которые могут быть связаны с данным количеством материи (или с любой его частью), совершать работу. Работа всегда совершается благодаря изменению энергии, и различные классификации энергии отражают природу сил, совершающих работу при изменении энергии.

Энергия, которой обладает механическая система в силу ее движения, называется *кинетической энергией* (энергией движения). В механике сплошных сред кинетическая энергия $\varkappa$ тела с массовой плотностью ρ, занимающего объем v, определяется так:

$$\varkappa = \frac{1}{2}\int\limits_v \rho\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}\,dv. \tag{12.3}$$

Кроме кинетической энергии тело может обладать *внутренней энергией* U, обусловленной способностью сил, действующих внутри тела, совершать работу. При рассмотрении сплошных тел мы будем предполагать, что существует *плотность внутренней энергии* ε, представляющая собой внутреннюю энергию единицы массы тела. Тогда

$$U = \int\limits_v \rho\varepsilon\,dv. \tag{12.4}$$

В элементарных курсах механики часто рассматривается лишь чисто механическое поведение твердых тел, характеризуемое изменениями кинетической и внутренней энергий и механической мощностью, развиваемой внешними силами. Однако в природе поведение твердых тел редко ограничивается только механическими эффектами. Когда над телом совершается работа, оно, как правило, нагревается. С другой стороны, когда два тела, находящихся при различных температурах, приводятся в контакт друг с другом, то, как показывает опыт, от одного тела к другому передается энергия и этот процесс может сопровождаться совершением работы. Эта передаваемая [1]) вследствие разности температур

[1]) В единицу времени. — *Прим. ред.*

энергия называется *скоростью нагрева* или *скоростью тепловой работы* и обозначается через Q.

Полный приток теплоты к телу складывается из теплоты, возникающей в результате действия источников внутри тела и притока теплоты в тело из окружающей среды. Для измерения первой части теплоты введем *тепловую плотность* r, характеризующую поступление тепла на единицу массы [1]), обусловленное источниками внутри тела. Для измерения второй части рассмотрим произвольный элемент поверхности тела с площадью dA и внешней единичной нормалью $\mathbf{n}$. Теплота, проходящая через dA, равняется $\mathbf{q}\cdot\mathbf{n}\,dA$, где $\mathbf{q}$ — *вектор теплового потока*, или просто *тепловой поток*. Полная скорость нагрева задается формулой

$$Q=\int_v \rho r\,dv+\int_A \mathbf{q}\cdot\mathbf{n}\,dA. \qquad (12.5)$$

12.2. СОХРАНЕНИЕ ЭНЕРГИИ. ПЕРВЫЙ ЗАКОН

Опыт показал, что все различные энергии системы аддитивны и что, какие бы изменения энергии ни имели места и каковы бы ни были при этом скорости работы и нагрева, внутренняя энергия системы всегда такова, что в сумме никаких утечек энергии не происходит. Этот закон сохранения энергии вводится как фундаментальная аксиома механики [2]):

Закон сохранения энергии. *Сумма скоростей изменения во времени кинетической и внутренней энергий равна сумме скорости работы, совершаемой над системой, и изменений всех других энергий системы в единицу времени:*

$$\dot{\varkappa}+\dot{U}=\Omega+\sum_\alpha E_\alpha, \qquad (12.6)$$

где, как и ранее, точка означает взятие производной по времени, а E_α ($\alpha=1,\ 2,\ \ldots$) — механический эквивалент поступления энергии α-го рода (например, тепловой энергии, электрической энергии, химической энергии) в единицу времени [3]).

При исследовании термомеханических явлений мы в основном имеем дело с механическими энергиями и их взаимным превращением в теплоту, т. е. из всех «энергий на единицу времени» E_α мы рассматриваем только скорость нагрева Q, так что (12.6) принимает вид

$$\dot{\varkappa}+\dot{U}=\Omega+Q. \qquad (12.7)$$

---

[1]) В единицу времени.— *Прим. ред.*

[2]) Три другие фундаментальные аксиомы механики приведены в п. 5.1.

[3]) См. Эринген [1962].

Этот результат известен как *первый закон термодинамики*; он является фундаментальным при исследовании термодинамического поведения сплошных тел.

Равенство (12.7) иногда называют *глобальной формой* первого закона, поскольку оно относится к конечному объему материала. В случае достаточной гладкости рассматриваемых величин с помощью теоремы Грина — Гаусса можно получить *локальную форму* первого закона, служащую выражением энергетического баланса в точке сплошной среды. Чтобы получить эту локальную форму, рассмотрим текущую конфигурацию твердого тела C (мы пользуемся обозначениями, введенными в гл. I). Фиксируем систему внутренних координат x^i, первоначально прямоугольных декартовых в конфигурации C_0, естественными базисными векторами которой являются введенные в гл. I взаимные векторы $\mathbf{G}_i$ и $\mathbf{G}^i$. В начальной конфигурации базис образован ортонормальными векторами $\mathbf{i}_i$, и прямоугольные (пространственные) координаты точки в C, представляющие собой «бывшие» координаты x^i в C_0, обозначаются, как и раньше, через z_i. Поле скоростей $\mathbf{v}$, поле ускорений $\mathbf{a}$ и поле теплового потока $\mathbf{q}$ задаются соотношениями

$$\mathbf{v} = v^m \mathbf{G}_m = v_m \mathbf{G}^m = \dot{u}_m \mathbf{i}_m, \tag{12.8а}$$

$$\mathbf{a} = a^m \mathbf{G}_m = a_m \mathbf{G}^m = \ddot{u}_m \mathbf{i}_m, \tag{12.8б}$$

$$\mathbf{q} = Q^m \mathbf{G}_m = Q_m \mathbf{G}^m = q_m \mathbf{i}_m, \tag{12.8в}$$

где u_m и q_m — прямоугольные декартовы компоненты перемещений и теплового потока относительно координат x^i в начальной конфигурации C_0.

Вспоминая (см. (5.12) и (5.13)), что

$$\mathbf{S} = S^j \mathbf{G}_j = \boldsymbol{\sigma} = \sigma^{ij} n_i \mathbf{G}_j, \tag{12.9}$$

мы видим, что

$$\Omega = \int\limits_v \rho F^j v_j \, dv + \int\limits_A \sigma^{ij} v_j n_i \, dA = \int\limits_v (\rho F^j v_j + \sigma^{ij}_{;i} v_j + \sigma^{ij} v_{j;i}) \, dv, \tag{12.10}$$

где точка с запятой означает ковариантное дифференцирование по конвективным координатным линиям x^i. Аналогично

$$Q = \int\limits_v \rho r \, dv + \int\limits_A Q^j n_j \, dA = \int\limits_v (\rho r + \nabla \cdot \mathbf{q}) \, dv, \tag{12.11}$$

где $\nabla \cdot \mathbf{q} = Q^k_{;k}$, и

$$\dot{\varkappa} = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_v \rho v^j v_j\, dv = \int_v \left[\rho a^j v_j\, dv + \frac{1}{2} v^j v_j \dot{(\rho\, dv)}\right],$$

что в силу закона сохранения масс дает

$$\dot{\varkappa} = \int_v \rho a^j v_j\, dv. \tag{12.12}$$

Подставляя (12.4), (12.10), (12.11) и (12.12) в (12.7), упрощая и группируя члены, получаем

$$\int_v [(\sigma^{ij}_{;i} + \rho F^j - \rho a^j)\, v_j - (\rho\dot{\varepsilon} - \sigma^{ij} v_{j;i} - Q^j_{;j} - \rho r)]\, dv = 0. \tag{12.13}$$

В первой скобке мы узнаем члены, входящие в первый закон движения Коши (5.21). Значит, если удовлетворяется уравнение количества движения, то первая скобка обращается в нуль. Остающийся интеграл должен обращаться в нуль для любого объема. В предположении непрерывности подынтегрального выражения вторая скобка тоже должна обращаться в нуль, и мы приходим к следующей локальной форме первого закона термодинамики:

$$\rho\dot{\varepsilon} = \sigma^{ij} v_{j;i} + Q^j_{;j} + \rho r. \tag{12.14}$$

Компоненты векторов и тензоров в (12.14) отнесены к координатам x^i в деформированном теле. Соотношение (12.14) можно записать и в других видах. Например, компоненты v^i, v_i поля (12.8а) связаны с компонентами скорости в прямоугольных декартовых координатах начального состояния соотношениями

$$v_i = z_{m,i}\dot{u}_m, \quad v^i = \frac{\partial x^i}{\partial z_m}\dot{u}_m, \tag{12.15а, б}$$

где запятая обозначает обычное дифференцирование по x_i. Далее,

$$v_{j;i} = (z_{m,j}\dot{u}_m)_{;i} = z_{m,j}\dot{u}_{m,i}, \tag{12.16}$$

и в силу (4.44), (4.45) и симметричности тензора σ^{ij}

$$\sigma^{ij} v_{j;i} = \sigma^{ij} z_{m,j}\dot{u}_{m,i} = \sigma^{ij}(\delta_{mj} + u_{m,j})\,\dot{u}_{m,i} = \sigma^{ij}\dot{\gamma}_{ij}, \tag{12.17}$$

где γ_{ij} — тензор деформаций (см. (4.16) и (4.17)). Величина $\sigma^{ij} v_{j;i} = \sigma^{ij}\dot{\gamma}_{ij}$ иногда называется *мощностью напряжений*. Если $\mathbf{q}$ — вектор теплового потока на единицу площади в недеформированном теле, то

$$q_i = \sqrt{G}\,\delta_{im} Q^m. \tag{12.18}$$

Подставляя (12.17) и (12.18) в (12.14), получаем

$$\rho\dot{\varepsilon}=\sigma^{ij}\dot{\gamma}_{ij}+\frac{1}{\sqrt{G}}q_{i,\,i}+\rho r. \tag{12.19}$$

С учетом (12.4) и (12.5) соотношение (12.19) дает

$$\dot{U}=\int_v \sigma^{ij}\dot{\gamma}_{ij}\,dv+Q. \tag{12.20}$$

Таким образом, (12.7) можно также записать в виде

$$\dot{\varkappa}+\int_v \sigma^{ij}\dot{\gamma}_{ij}\,dv=\Omega. \tag{12.21}$$

Представляет интерес еще одна локальная форма записи закона сохранения энергии. Пусть e и h обозначают соответственно внутреннюю энергию и скорость притока теплоты на единицу недеформированного объема. Тогда

$$e=\rho_0\varepsilon \quad \text{и} \quad h=\rho_0 r. \tag{12.22а,б}$$

Вспоминая, что, согласно (5.14), напряжение на единицу поверхности недеформированного тела, отнесенное к координатам x^i в деформированном теле, равно $t^{ij}=\sqrt{G}\sigma^{ij}$, и подставляя (12.22) в (12.19), получаем другую форму записи соотношения (12.14):

$$\dot{e}=t^{ij}\dot{\gamma}_{ij}+q_{i,i}+h. \tag{12.23}$$

12.3. ЭНТРОПИЯ. НЕРАВЕНСТВО КЛАУЗИУСА — ДЮГЕМА

Наряду с абсолютной температурой θ мы будем считать фундаментальным свойством всех термодинамических систем энтропию H [1]). Также как и энергия, энтропия важна для нас только в связи со своими изменениями, которые накладывают ограничения на Q/θ. Мы предполагаем, что энтропия — аддитивная функция, присущая любому количеству материи. Таким образом, общая энтропия тела равна сумме энтропий его частей. В случае сплошных тел мы предполагаем, что H абсолютно непрерывна относи-

[1]) В классической термостатике понятие энтропии обычно вводят, пытаясь представить вариацию $Q\,dt$ тепловой энергии в виде точного дифференциала. При этом $Q\,dt$ делят на абсолютную температуру, результат $Q\,dt/\theta$ обозначают через dH и H называют энтропией. К сожалению, такое определение применимо только к очень ограниченному классу термодинамических явлений и теряет смысл для необратимых процессов. Мы предпочитаем ввести энтропию как самостоятельное фундаментальное свойство материи и определить его роль в термодинамике деформаций с помощью неравенства Клаузиуса — Дюгема и его следствий. Этот подход был развит Колеманом и Ноллом [1963], Колеманом и Мизелом [1964], Трусделлом [1966а, 1969] и Эрингеном [1967]. [См. также Трусделл *[1972].— *Ред.*]

тельно массы, так что существует функция η, называемая *удельной энтропией* или *энтропией на единицу массы*, такая, что

$$H = \int_v \rho\eta \, dv. \tag{12.24}$$

Далее, мы предполагаем, что общее изменение энтропии сплошного тела в единицу времени может происходить не только в результате изменения H, но и в результате притока энтропии через граничные поверхности тела и, возможно, поступления энтропии от источников внутри тела. *Полное производство энтропии* в теле определяется формулой

$$\Gamma \equiv \dot{H} - \int_A \mathbf{e}\cdot\mathbf{n}\, dA - \int_v \rho s \, dv, \tag{12.25}$$

где $\mathbf{e}$ — *вектор потока энтропии*, а s — *поступление энтропии за единицу времени на единицу массы от внутренних источников*. Фундаментальной аксиомой термодинамики является постулат неотрицательности Γ:

Неравенство Клаузиуса—Дюгема. *Общее производство энтропии всегда неотрицательно*:

$$\Gamma \geqslant 0. \tag{12.26}$$

В принятом нами способе изложения неравенство (12.26) представляет собой формулировку *второго закона термодинамики*. Согласно (12.25) неравенство Клазуиуса — Дюгема означает, что

$$\dot{H} \geqslant \int_A \mathbf{e}\cdot\mathbf{n}\, dA + \int_v \rho s \, dv, \tag{12.27}$$

т. е. скорость изменения общей энтропии H никогда не меньше суммы притока энтропии через поверхность тела и производства энтропии внутренними источниками. При соответствующих предположениях гладкости соотношения (12.24) и (12.27) дают

$$\rho\dot{\eta} \geqslant \nabla\cdot\mathbf{e} + \rho s. \tag{12.28}$$

Величины $\mathbf{e}$ и s всегда можно представить в виде [1])

$$\mathbf{e} = \frac{\mathbf{q}}{\theta} + \bar{\mathbf{e}}, \qquad s = \frac{r}{\theta} + \bar{s}, \tag{12.29а, б}$$

[1]) Во многих работах величины $\mathbf{e}$ и s полагаются равными $\mathbf{q}/\theta$ и r/θ ab initio. См., например, Колеман и Нолл [1963], Колеман и Мизел [1964] или Трусделл [1966а]. Величины $\bar{\mathbf{e}}$ и $\bar{s}$ (см. (12.29а б)) ввел Эринген [1967, стр. 128—129]. Он называет «простым термомеханическим процессом» процесс, в котором $\bar{\mathbf{e}} = 0$ и $\bar{s} = 0$. Мюллер [1967] довольно подробно исследовал случай, когда $\bar{\mathbf{e}}$, $\bar{s} \neq 0$; величина $\mathbf{e}$ рассматривается им как фундаментальная зависимая переменная наряду с тепловым потоком $\mathbf{q}$.

где $\mathbf{q}/\theta$ — приток энтропии, обусловленный притоком теплоты, r/θ — производство энтропии внутренними источниками, обусловленное притоком тепла от них, а $\bar{\mathbf{e}}$ и $\bar{s}$ — соответственно приток и производство энтропии, обусловленные всеми прочими эффектами. Поскольку нас интересует главным образом термомеханическое поведение, целесообразно принять $\bar{\mathbf{e}} = 0$ и $\bar{s} = 0$, так что

$$\mathbf{e} = \frac{\mathbf{q}}{\theta}, \qquad s = \frac{r}{\theta}. \qquad (12.30\text{а, б})$$

Подставляя (12.30) в (12.28), получаем неравенство

$$\rho\theta\dot{\eta} \geqslant \nabla \cdot \mathbf{q} - \frac{1}{\theta}\mathbf{q} \cdot \nabla\theta + \rho r, \qquad (12.31)$$

которое можно трактовать как локальную форму неравенства Клаузиуса — Дюгема для случая, когда справедливы соотношения (12.30).

12.4. СВОБОДНАЯ ЭНЕРГИЯ И ВНУТРЕННЯЯ ДИССИПАЦИЯ

В теории теплопроводящих материалов удобно ввести *удельную свободную энергию* ψ, определяемую формулой

$$\psi \equiv \varepsilon - \eta\theta, \qquad (12.32)$$

и *внутреннюю диссипацию* δ, определяемую формулой

$$\delta \equiv \sigma^{ij}\dot{\gamma}_{ij} - \rho(\dot{\psi} + \eta\dot{\theta}). \qquad (12.33)$$

Из определений (12.32) и (12.33) следуют соотношения

$$\rho\dot{\varepsilon} = \sigma^{ij}\dot{\gamma}_{ij} + \rho\theta\dot{\eta} - \delta \qquad (12.34)$$

и

$$\rho\dot{\psi} = \sigma^{ij}\dot{\gamma}_{ij} - \rho\eta\dot{\theta} - \delta. \qquad (12.35)$$

Подставляя (12.34) в (12.14), получаем важный результат:

$$\rho\theta\dot{\eta} = \nabla \cdot \mathbf{q} + \rho r + \delta, \qquad (11.36)$$

который представляет собой локальную форму закона сохранения энергии в терминах удельной энтропии η, внутренней диссипации δ и тепловых переменных $\mathbf{q}$ и r. Подставляя (12.36) в (12.31), приходим к *общему диссипационному неравенству* [1]):

$$\frac{1}{\theta}\mathbf{q} \cdot \nabla\theta + \delta \geqslant 0. \qquad (12.37)$$

---

[1]) См. Колеман [1964].

Обычно принято также вводить *неравенство Клаузиуса — Планка*[1])

$$\delta = \rho\theta\dot{\eta} - \nabla \cdot \mathbf{q} - \rho r \geqslant 0. \tag{12.38}$$

Заметим, что можно получить и другие формы записанных выше соотношений, относя величины к недеформированной (начальной) конфигурации. В частности, пусть ξ, φ и σ обозначают соответственно энтропию, свободную энергию и диссипацию на единицу объема в начальной конфигурации:

$$\xi = \rho_0\eta, \tag{12.39}$$

$$\varphi = \rho_0\psi, \tag{12.40}$$

$$\sigma = \sqrt{G}\delta. \tag{12.41}$$

Тогда

$$\varphi = e - \xi\theta, \tag{12.42}$$

$$\sigma = t^{ij}\dot{\gamma}_{ij} - (\varphi + \xi\dot{\theta}), \tag{12.43}$$

и вместо (12.34)—(12.36) мы получаем

$$\dot{e} = t^{ij}\dot{\gamma}_{ij} + \theta\dot{\xi} - \sigma, \tag{12.44}$$

$$\dot{\varphi} = t^{ij}\dot{\gamma}_{ij} - \xi\dot{\theta} - \sigma, \tag{12.45}$$

$$\dot{\xi} = q_{i,i} + h + \sigma. \tag{12.46}$$

12.5. ТЕРМОДИНАМИЧЕСКИЕ ПРОЦЕССЫ

Под *термодинамическим процессом* мы понимаем всякое множество функций, включающее в себя движение z_i (x, t) и поля θ (x, t), σ^{ij} (x, t), $\mathbf{q}$ (**x**, t) и η (x, t), определенные в точках **x** в моменты времени t, при условии, что эти функции удовлетворяют уравнениям количества и момента количества движения и закону сохранения энергии для любой части тела. В каждый заданный момент времени эти функции определяют термодинамическое состояние тела. Для классификации термодинамических процессов будем использовать обычную терминологию: процесс называется *изотермическим*, *адиабатическим*, *изэнтропическим* или *изоэнергетиче-*

---

[1]) Эта терминология предложена Трусделлом [1966а, стр. 245]. [См. также Трусделл, *[1972].— *Ред.*] Соотношение (12.38), вообще говоря, не следует из (12.37), за исключением некоторых случаев, например случая квазиупругого поведения. В классической термостатике δ в (12.37) не фигурирует, и это неравенство означает, что тепло никогда не течет против градиента температуры. Трусделл [1966а] истолковывает присутствие δ в (12.37) как указание на возможность потока тепла против градиента температуры при подводе достаточного количества локальной энергии. Мы будем использовать в качестве фундаментального диссипационного неравенства неравенство (12.37).

ским, если соответственно $\dot{\theta}$, $\dot{Q}$, $\dot{H}$ или $\dot{U}$ равняется нулю. Если функции состояния, включая градиенты деформации, не зависят от x, то процесс называется *однородным*.

13. ТЕРМОМЕХАНИКА КОНЕЧНОГО ЭЛЕМЕНТА

Располагая основными механическими и термодинамическими законами и общим понятием конечноэлементной модели непрерывного поля, объединим их теперь вместе и получим общие конечноэлементные формулировки поведения конечноэлементных моделей сплошных сред.

13.1. КИНЕМАТИКА КОНЕЧНОГО ЭЛЕМЕНТА

Рассмотрим сплошное тело, которое в начальной конфигурации C_0 занимает некоторую область $\mathscr{R}$ трехмерного эвклидова пространства. Геометрия тела и внешние ограничения (связи) произвольны, и на тело может воздействовать любая система внешних сил и тепловых потоков. Для описания движения тела введем, как и ранее, систему внутренних *глобальных* координат, обозначаемых через X^i, которые временно для простоты будем считать прямоугольными декартовыми в начальной конфигурации C_0. Прямоугольные декартовы координаты в произвольной конфигурации C в некоторый момент времени $t \geqslant 0$ частицы x, которая первоначально занимала положение $\mathbf{X} = \mathbf{X}(X^i)$ в C_0, будем обозначать через Z_i и будем говорить, что функции

$$Z_i = Z_i(\mathbf{X}, t) \tag{13.1}$$

описывают *движение тела*.

В соответствии с изложенным в гл. II построим дискретную модель тела, состоящую из конечного числа E связанных соответствующим образом в узловых точках конечных элементов. Внутри каждого конечного элемента r_e тела введем систему внутренних *локальных* координат $x^i_{(e)}$, которую для простоты временно будем считать прямоугольной декартовой в начальной конфигурации $C_{0(e)}$ элемента e. Прямоугольные декартовы координаты частицы x в произвольной конфигурации $C_{(e)}$ элемента r_e в некоторый момент времени $t \geqslant 0$, которая первоначально находилась в точке $\mathbf{x} = \mathbf{x}(x^i)$ в $C_{0(e)}$, будем обозначать через $z_{i(e)}$ и будем говорить, что функции

$$z_{i(e)} = z_{i(e)}(\mathbf{x}_{(e)}, t) \tag{13.2}$$

описывают *движение элемента e*.

Пока точная форма каждого элемента, число узлов и характер связей не имеют особого значения, но мы будем считать, что основные требования совместимости удовлетворены и что поэтому совокупность элементов, соединенных друг с другом, образует связанное целое. Если это так и если $X^{\Delta i}$ обозначают глобальные координаты какого-либо узла в глобальной системе, а $x^{Ni}_{(e)}$ — локальные координаты *этого же* узла в элементе r_e, то связанность модели достигается с помощью отображения

$$\hat{x}^{Ni}_{(e)} = \overset{(e)}{\Omega}{}^N_\Delta X^{\Delta i}, \tag{13.3}$$

где

$$\hat{x}^{Ni}_{(e)} = \overset{(e)}{\alpha}{}^i_j x^{Nj}_{(e)}, \tag{13.4}$$

$\overset{(e)}{\Omega}{}^N_\Delta$ — обычный массив инцидентности, определяемый формулами (7.6); $i = 1,\ 2,\ 3$; $N = 1,\ 2,\ \ldots,\ N_e$; $\Delta = 1,\ 2,\ \ldots,\ G$; $e = 1, 2, \ldots, E$. В (13.4) величины $\overset{(e)}{\alpha}{}^i_j$ суть направляющие косинусы углов между X^i и $x^j_{(e)}$ и $\overset{(e)}{\alpha}{}^i_m \overset{(e)}{\alpha}{}^j_m = \delta^{ij}$, $\det \overset{(e)}{\alpha}{}^i_j = 1$. Аналогично если требования совместимости выполнены в процессе всего движения, то

$$\hat{z}^{Ni}_{(e)} = \overset{(e)}{\Omega}{}^N_\Delta Z^{\Delta i} \tag{13.5}$$

и

$$\hat{z}^{Ni}_{(e)} = \overset{(e)}{\alpha}{}^i_j z^{Nj}_{(e)}, \tag{13.6}$$

где $Z^{\Delta i} = Z^\Delta_i$ — прямоугольные координаты в C узла, который определялся координатами $X^{\Delta i}$ в C_0, а $z^{Nj}_{(e)}$ — соответствующие локальные координаты узла в $C_{(e)}$, который в $C_{0(e)}$ имел координаты $x^{Ni}_{(e)}$.

Поле *глобальных перемещений* $U_i = U_i\,(\mathbf{X},\ t)$ определяется формулой

$$U_i = Z_i - X_i, \tag{13.7}$$

где $X_i = X^i$, а *поле локальных перемещений, соответствующее элементу* r_e,— формулой

$$u_{i(e)} = z_{i(e)} - x_{i(e)}. \tag{13.8}$$

Таким образом, компоненты перемещения узловой точки Δ в глобальной системе суть

$$U^\Delta_i = U_i\,(\mathbf{X}^\Delta) = Z^\Delta_i - X^\Delta_i, \tag{13.9}$$

а компоненты перемещения узловой точки N элемента r_e —

$$u^N_{i(e)} = u^{(e)}_i(\mathbf{x}^N_{(e)}) = z^N_{i(e)} - x^N_{i(e)}. \tag{13.10}$$

Из (13.4), (13.6) и (13.10) следует, что если $\hat{u}^N_{i(e)} = \overset{(e)}{\alpha}{}^i_j u^N_{j(e)}$, то

$$\hat{u}^N_{i(e)} = \overset{(e)}{\Omega}{}^N_\Delta U^\Delta_i. \tag{13.11}$$

Для завершения построения конечной модели поля перемещений $\mathbf{U}$ нужно построить соответствующие аппроксимационные функции для каждого конечного элемента. Ради простоты рассмотрим лишь представления первого порядка. Построение представлений высших порядков хотя и более громоздко, но осуществляется непосредственным применением метода, описанного в § 8. Итак, для элемента r_e имеем

$$u^{(e)}_i \approx \bar{u}^{(e)}_i = u^N_{i(e)} \psi^{(e)}_N(\mathbf{x}), \tag{13.12}$$

где $\psi^{(e)}_N(\mathbf{x})$ — локальные интерполяционные функции для этого элемента. Соответственно

$$U_i \approx \overline{U}_i = \sum_e \hat{u}_{i(e)} = \sum_e \overset{(e)}{\alpha}{}^i_j u^N_{j(e)} \psi^{(e)}_N(\mathbf{x}), \tag{13.13}$$

или, с учетом (13.11),

$$\overline{U}_i = \sum_e \overset{(e)}{\Omega}{}^N_\Delta \psi^{(e)}_N(\mathbf{x}) U^\Delta_i = \Phi_\Delta(\mathbf{x}) U^\Delta_i. \tag{13.14}$$

Соотношения (13.12) и (13.14) дают дискретную модель поля перемещений $\mathbf{U}$. Теперь нетрудно определить поле скоростей $\mathbf{V}$ и поле ускорений $\mathbf{A}$:

$$V_i \equiv \dot{\overline{U}}_i = \sum_e \psi^{(e)}_N(\mathbf{x}) \overset{(e)}{\Omega}{}^N_\Delta \dot{U}^\Delta_i, \tag{13.15}$$

$$A_i \equiv \dot{V}_i = \ddot{\overline{U}}_i = \sum_e \psi^{(e)}_N(\mathbf{x}) \overset{(e)}{\Omega}{}^N_\Delta \ddot{U}^\Delta_i, \tag{13.16}$$

где $\dot{U}^\Delta_i$ и $\ddot{U}^\Delta_i$ — компоненты скорости и ускорения в узловой точке Δ связанной глобальной системы, т. е.

$$V^\Delta_i = \dot{U}^\Delta_i, \qquad A^\Delta_i = \ddot{U}^\Delta_i. \tag{13.17а, б}$$

Отметим также, что

$$v_{i(e)} = v^N_{i(e)} \psi^{(e)}_N(\mathbf{x}), \qquad a_{i(e)} = a^N_{i(e)} \psi^{(e)}_N(\mathbf{x}), \tag{13.18а, б}$$

где

$$v^N_{i(e)} = \overset{(e)}{\Omega}{}^N_\Delta V^\Delta_i = \dot{u}^N_{i(e)}, \tag{13.19а}$$

$$a^N_{i(e)} = \overset{(e)}{\Omega}{}^N_\Delta A^\Delta_i = \ddot{u}^N_{i(e)}. \tag{13.19б}$$

Соотношения (13.15) и (13.16) показывают, что наше конечноэлементное представление представляет поля перемещений, скоростей и ускорений в виде произведений функций одних пространственных переменных на узловые значения, являющиеся функциями одного времени. Ясно, что производные по времени высших порядков от U получаются последовательным дифференцированием соотношения (13.14):

$$\overset{n}{\bar{U}}_i \approx \sum_e \psi_N^{(e)}(\mathbf{x}) \overset{(e)}{\Omega}{}_{\Delta}^{N} \overset{n}{U}{}_i^{\Delta}. \tag{13.20}$$

Имея конечноэлементную модель поля перемещений, нетрудно вычислить все другие величины, характеризующие деформацию конечноэлементной модели тела. Например, для типичного конечного элемента r_e градиенты деформации суть

$$z_{i,j}^{(e)} = u_{i(e)}^N \psi_N^{(e)}(\mathbf{x})_{,j}. \tag{13.21}$$

Компоненты тензора деформации в соответствии с (4.17) имеют вид

$$\gamma_{ij}^{(e)} = (\frac{1}{2} u_{j(e)}^N \psi_{N,i}^{(e)} + u_{i(e)}^N \psi_{N,j}^{(e)} + u_{k(e)}^N u_{k(e)}^M \psi_{N,i}^{(e)} \psi_{M,j}^{(e)}), \tag{13.22}$$

а компоненты тензора скоростей деформации —

$$\dot{\gamma}_{ij}^{(e)} = \frac{1}{2} [\dot{u}_{j(e)}^N \psi_{N,i}^{(e)} + \dot{u}_{i(e)}^N \psi_{N,j}^{(e)} + \psi_{N,i}^{(e)} \psi_{M,j}^{(e)} (\dot{u}_{k(e)}^N u_{k(e)}^M + u_{k(e)}^N \dot{u}_{k(e)}^M)]. \tag{13.23}$$

Значит,

$$\overline{\dot{ds}_{(e)}^2} = \psi_{N,i}^{(e)} (\delta_{jk} + u_{k(e)}^M \psi_{M,j}^{(e)}) \dot{u}_{k(e)}^N \, dx_{(e)}^i \, dx_{(e)}^j. \tag{13.24}$$

Тензор меры деформации G_{ij} для нашего элемента задается, конечно, формулой

$$G_{ij}^{(e)} = \delta_{ij} + 2\gamma_{ij}^{(e)}, \tag{13.25}$$

так что главные инварианты (4.25) можно получить просто подстановкой (13.22) в (4.26).

Интересно отметить, что для симплексных моделей

$$\psi_N^{(e)}(\mathbf{x}) = a_N^{(e)} + b_{Ni}^{(e)} x_{(e)}^i, \tag{13.26}$$

где $a_N^{(e)}$ и $b_{Ni}^{(e)}$ определены формулами (10.102) [а также (10.105), (10.106) и (10.108)]. Значит,

$$\psi_{N,j} = b_{Nj}, \tag{13.27}$$

где для простоты идентификационная метка элемента (e) опущена. Таким образом, для симплексных моделей

$$z_{i,j}^{(e)} = b_{Nj} u_i^N, \tag{13.28}$$

$$\gamma_{ij}^{(e)} = \frac{1}{2} (u_j^N b_{Ni} + u_i^N b_{Nj} + b_{Ni} b_{Mj} u_k^N u_k^M), \tag{13.29}$$

$$\dot{\gamma}_{ij}^{(e)} = \frac{1}{2}\left[\dot{u}_j^N b_{Ni} + \dot{u}_i^N b_{Nj} + b_{Ni} b_{Mj} (\dot{u}_k^N u_k^M + u_k^N \dot{u}_k^M)\right], \qquad (13.30)$$

$$\overline{ds_{(e)}^2} = b_{Ni} (\delta_{jk} + b_{Mj} u_k^M) \dot{u}_k^N \, dx^i dx^j, \qquad (13.31)$$

$$G_{ij}^{(e)} = \delta_{ij} + b_{Ni} u_j^N + b_{Nj} u_i^N + b_{Ni} b_{Mj} u_k^N u_k^M. \qquad (13.32)$$

Мы видим, что для симплексных моделей при использовании прямоугольных декартовых координат относительно начальной конфигурации каждый конечный элемент находится в состоянии *однородной деформации* [1]). Градиенты деформации и компоненты тензора деформации постоянны в каждом элементе.

13.2. ЭНЕРГИЯ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Воспользуемся теперь фундаментальным свойством конечноэлементных моделей: для описания локальных аппроксимаций на каждом элементе различные элементы r_e можно считать никак не связанными между собой. Таким образом, мы можем временно сосредоточить внимание на одном типичном элементе r_e из ансамбля, представляющего сплошную среду, и мыслить этот элемент как изолированный от всей остальной системы. Опять для удобства и простоты не будем писать идентификационную метку элемента (e), за исключением тех случаев, когда это может привести к недоразумению.

Итак, рассмотрим типичный конечный элемент r_e с массовой плотностью $\rho_{(e)} = \rho_{(e)}(\mathbf{x})$ и объемом $v_{(e)}$ в произвольной конфигурации $C_{(e)}$. В начальной конфигурации $C_{0\,(e)}$ эти величины обозначаются через $\rho_{0(e)} = \rho_{0(e)}(\mathbf{x})$ и $v_{0\,(e)}$. В соответствии с (13.12) и (13.18) поля перемещений, скоростей и ускорений для нашего элемента имеют вид

$$u_i = u_i^N \psi_N(\mathbf{x}), \qquad (13.33а)$$

$$\dot{u}_i = \dot{u}_i^N \psi_N(\mathbf{x}), \qquad (13.33б)$$

$$\ddot{u}_i = \ddot{u}_i^N \psi_N(\mathbf{x}), \qquad (13.33в)$$

[1]) Деформация называется *однородной* в случае, когда каждая прямая линия деформируется снова в прямую; см. Трусделл и Тупин [1960, стр. 285]. Градиенты деформации (13.28) постоянны в элементе; плоскости деформируются в плоскости, прямые — в прямые. Однако симплексные модели поля перемещений не всегда приводят к состояниям однородной деформации. Если, например, начальные координаты не прямоугольные декартовы, то деформация, соответствующая симплексной модели поля перемещений, в общем случае не будет однородной. В цилиндрической системе координат (r, z, θ), например, перемещение $u_r = k$ приведет к окружной деформации, зависящей от r. Имеется ряд случаев однородной деформации, представляющих особый интерес (например простой сдвиг, однородное растяжение). В этих случаях конечноэлементная модель дает точное описание кинематики деформации. См. Оден [1968б, 1970а] и Оден и Агирре-Рамирес [1969].

причем подразумевается, что u_i^N зависят от времени. Поэтому все кинематические соотношения для этого элемента могут быть с помощью формул (13.22) — (13.25) записаны через компоненты узловых перемещений u_i^N и их производные по времени $\dot{u}_i^N$ и $\ddot{u}_i^N$.

Кинетическая энергия. Теперь возможно вычислить энергии, связанные с термомеханическим поведением элемента. Обращаясь сначала к (12.3), для кинетической энергии $\varkappa_{(e)}$ элемента получаем

$$\varkappa_{(e)}=\frac{1}{2}\int\limits_{v_{(e)}}\rho\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}\,dv=\frac{1}{2}\int\limits_{v_{0(e)}}\rho_0\dot{\mathbf{u}}\cdot\dot{\mathbf{u}}\,dv_0. \qquad (13.34)$$

В настоящем контексте мы предпочитаем относить движение к начальной конфигурации элемента $C_{0(e)}$. Подставляя (13.33б) в (13.34), находим

$$\varkappa_{(e)}=\frac{1}{2}\int\limits_{v_{0(e)}}\rho_0\dot{u}_i^N\psi_N\mathbf{i}_i\cdot\dot{u}_j^M\psi_M\mathbf{i}_j\,dv_0, \qquad (13.35)$$

или

$$\varkappa_{(e)}=\frac{1}{2}\,m_{NM}\dot{u}_i^N\dot{u}_i^M, \qquad (13.36)$$

где m_{NM} — симметричная матрица размера $N_e\times N_e$, называемая *согласованной матрицей масс* [1]) для элемента и определяемая формулой

$$m_{NM}=\int\limits_{v_{0(e)}}\rho_0(\mathbf{x})\,\psi_N(\mathbf{x})\,\psi_M(\mathbf{x})\,dv_0. \qquad (13.37)$$

Ясно, что матрица m_{NM} распределяет общую массу по узлам в виде дискретных узловых масс таким образом, что кинетическая энергия движения N_e дискретных узловых точек равна кинетической энергии, обусловленной непрерывными полями $\rho_0(\mathbf{x})$ и $\dot{\mathbf{u}}(\mathbf{x})$ в элементе.

Скорость изменения кинетической энергии элемента равна

$$\dot{\varkappa}_{(e)}=m_{NM}\ddot{u}_i^M\dot{u}_i^N; \qquad (13.38)$$

здесь мы воспользовались свойством $m_{NM}=m_{MN}$. Отметим, что $\dot{\varkappa}_e$ можно интерпретировать как мощность, развиваемую «инер-

[1]) Этот термин был введен Арчером [1963], который использовал эпитет «согласованная», чтобы подчеркнуть, что масса элемента распределена по узлам некоторым специальным образом, согласованным с предполагаемым полем скоростей $\psi_N(\mathbf{x})\,\dot{\mathbf{u}}^N$, а не просто без разбора разбросана по узловым точкам, как это часто делается. Позже Арчер [1965] распространил эту идею дальше и ввел *согласованные силы*. Обобщение этих идей, которым занимались Оден [1969а], Оден и Агирре-Рамирес [1969], а также Браули и Оден [1971], лежит в основе теории сопряженных аппроксимаций, изложенной в § 9.

ционными» силами $m_{NM}\ddot{u}_i^M$ в узле N. При такой интерпретации $m_{NM}\ddot{u}_i^M$ видно, что если ускорения всех узлов равны нулю, за исключением, скажем, узла K, то инерционная сила в узле N равна $m_{NK}\ddot{u}_i^K$. Если кроме того $\ddot{u}_i^K = 1$, то сила в узле N просто равна m_{NK}. Таким образом, *элемент* m_{NK} *согласованной матрицы масс можно интерпретировать как инерционную силу в узле* N, *обусловленную единичным ускорением узла* K. А свойство симметрии $m_{MN} = m_{NM}$ можно интерпретировать как динамическую форму *закона взаимности Максвелла*: сила в узле N, обусловленная единичным ускорением в M, равна силе в узле M, обусловленной единичным ускорением в N.

Интересно посмотреть, какой вид принимает (13.36) при использовании симплексных моделей. В этом случае $\psi_N(\mathbf{x}) = a_N + b_{Ni}x^i$ и

$$m_{NM} = m_0 a_N a_M + (a_N b_{Mi} + b_{Ni} a_M) s^i + b_{Ni} b_{Mj} I^{ij}, \qquad (13.39)$$

где m_0 — полная масса элемента, s^i — первые моменты массы, а I^{ij} — тензор моментов инерции относительно начала системы локальных координат x^i:

$$m_0 = \int_{v_{0(e)}} \rho_0(\mathbf{x})\, dv_0, \qquad s^i = \int_{v_{0(e)}} \rho_0(\mathbf{x})\, x^i\, dv_0, \qquad (13.40\text{а, б})$$

$$I^{ij} = \int_{v_{0(e)}} \rho_0(\mathbf{x})\, x^i x^j\, dv_0. \qquad (13.40\text{в})$$

Массив $a_N a_M$ распределяет массу по узлам, а массив $b_{Ni} b_{Mj}$ распределяет по узлам инерцию вращения элемента, приводя к дискретным узловым эквивалентам.

Отметим еще, что величину $\dot{\varkappa}_{(e)}$ можно представить в виде скалярного произведения

$$\dot{\varkappa}_{(e)} = \int_{v_{0(e)}} \rho_0 \mathbf{a} \cdot \dot{\mathbf{u}}^N \psi_N\, dv_0. \qquad (13.41)$$

Значит, в соответствии с (9.181) поле инерционных сил $\rho_0\mathbf{a}$ сопряжено полю скоростей $\dot{\mathbf{u}}$ относительно скорости изменения кинетической энергии.

Внутренняя энергия. Полная внутренняя энергия элемента записывается в виде

$$U_{(e)} = \int_{v_{0(e)}} e\, dv_0 = \int_{v_{(e)}} \rho\varepsilon\, dv, \qquad (13.42)$$

где e и ε — введенные ранее удельные внутренние энергии. Скорость изменения внутренней энергии равна

$$\dot{U}_{(e)} = \int_{v_{0(e)}} \dot{e}\, dv_0. \tag{13.43}$$

Напомним (см. (12.23)), что $\dot{e}$ можно выразить через мощность напряжений $t^{ij}\dot{\gamma}_{ij}$, тепловой поток и поступление тепла от внутренних источников. Значит, $\dot{U}_{(e)}$ тоже можно представить в виде

$$\dot{U}_{(e)} = \int_{v_{0(e)}} t^{ij}\dot{\gamma}_{ij}\, dv_0 + Q_{(e)}, \tag{13.44}$$

или

$$\dot{U}_{(e)} = \int_{v_{(e)}} \sigma^{ij}\dot{\gamma}_{ij}\, dv + Q_{(e)}, \tag{13.45}$$

где $Q_{(e)}$ — общая скорость нагрева элемента e.

С учетом (13.23) получаем

$$t^{ij}\dot{\gamma}_{ij} = t^{ij}\psi_{N,\,i}\,(\delta_{jk} + u_k^M \psi_{M,\,j})\,\dot{u}_k^N, \tag{13.46}$$

где подразумевается, что $\psi_{N,i}$ зависят от x. Поэтому

$$\dot{U}_{(e)} = \int_{v_{0(e)}} t^{ij}\psi_{N,\,i}\,(\delta_{jk} + u_k^M \psi_{M,\,j})\, dv_0 \dot{u}_k^N + Q_{(e)}. \tag{13.47}$$

Мало что еще можно сказать о виде $\dot{U}_{(e)}$, не зная характеристических свойств материала, из которого состоит элемент.

Механическая мощность. Возвращаясь к (12.2), укажем, что внешние силы $\mathbf{F}$ и $\mathbf{S}$ сопряжены полю скоростей $\dot{\mathbf{u}}$ элемента относительно механической мощности Ω. Пусть $\hat{\mathbf{F}}(\mathbf{x})$ — действующая на элемент объемная сила на единицу недеформированного объема, а $\hat{\mathbf{S}}$ — поверхностная сила, отнесенная к конвективным координатам x^i, но измеренная на единицу площади A_0 в начальной конфигурации [$\hat{\mathbf{S}} = \mathbf{t} = t^{ij}\hat{n}_i\mathbf{G}_j$; см. (5.15)]. Тогда механическая мощность, развиваемая действующими на элемент внешними силами, равняется

$$\Omega_{(e)} = \int_{v_{0(e)}} \hat{\mathbf{F}}(\mathbf{x}) \cdot \psi_N(\mathbf{x})\, \dot{\mathbf{u}}^N dv_0 + \int_{A_{0(e)}} \hat{\mathbf{S}} \cdot \psi_N(\mathbf{x})\, \dot{\mathbf{u}}^N dA_0, \tag{13.48}$$

где $A_0 = A_{0(e)}$ — площадь поверхности элемента в начальной конфигурации. Поступая так же, как и при рассмотрении кине-

тической энергии, запишем

$$\Omega_{(e)} = \dot{\mathbf{u}}^N \cdot \mathbf{f}_N + \dot{\mathbf{u}}^N \cdot \mathbf{s}_N, \tag{13.49}$$

где

$$\mathbf{f}_N = \int\limits_{v_{0(e)}} \hat{\mathbf{F}}(\mathbf{x})\, \psi_N(\mathbf{x})\, dv_0 \tag{13.50}$$

и

$$\mathbf{s}_N = \int\limits_{A_{0(e)}} \hat{\mathbf{S}}(\mathbf{x})\, \psi_N(\mathbf{x})\, dA_0. \tag{13.51}$$

Величина $\mathbf{f}_N$ является *обобщенной силой в узле N элемента, обусловленной объемными силами* $\hat{\mathbf{F}}(\mathbf{x})$, а $\mathbf{s}_N$ — *обобщенной силой в узле N, обусловленной поверхностными силами* $\hat{\mathbf{S}}(\mathbf{x})$. Силы $\mathbf{s}_N$ служат *дискретными аналогами напряжений для конечноэлементной модели*. В них выражается влияние контакта элемента с окружающей средой (например, с соседним конечным элементом). Обобщенные силы $\mathbf{f}_N$ и $\mathbf{s}_N$ иногда называют *согласованными* обобщенными силами, поскольку они вычисляются способом, согласованным с принятым полем скоростей, а именно обобщенные силы $\mathbf{f}_N + \mathbf{s}_N$ определяются так, чтобы механическая мощность, развиваемая сосредоточенными узловыми силами при движении с узловыми скоростями $\dot{\mathbf{u}}^N$, равнялась мощности, развиваемой непрерывными полями $\hat{\mathbf{F}}(\mathbf{x})$, $\hat{\mathbf{S}}(\mathbf{x})$ и $\dot{\mathbf{u}}(\mathbf{x})$.

Важно отметить, что *действительные поверхностные силы* $\hat{\mathbf{S}}(\mathbf{x})$ *наблюдаются нами только в деформированном элементе*, т. е. эти силы в общем случае зависят от деформации и, следовательно, являются функциями узловых перемещений $\mathbf{u}^N$. Точная форма этой зависимости определяется характером приложенных нагрузок, начальной формой элемента и видом интерполяционных функций $\psi_N(\mathbf{x})$ [1]. Пока нам достаточно будет писать просто $\hat{\mathbf{S}} = \hat{\mathbf{S}}(\mathbf{x})$, а впоследствии мы будем определять поверхностные усилия через градиенты перемещений для каждого случая нагружения и каждого рассматриваемого типа конечного элемента.

---

[1]) В гл. IV, например, показывается, что в случае равномерного давления p мы имеем

$$S_i = -p\sqrt{G}\,\hat{n}_j\,(\delta_{im} + u_{i,m})\,G^{jm},$$

что для конечного элемента дает

$$S_i = -p\sqrt{G_{(e)}}\,\hat{n}_j\,(\delta_{im} + \psi_{N,m} u_i^N)\,G_{(e)}^{jm}.$$

Здесь $G_{(e)}$ и $G_{(e)}^{jm}$ — тоже функции от $u_{i,j}$. К счастью, для конкретных форм $\psi_N(\mathbf{x})$ возможны существенные упрощения. См. § 16—20.

Пусть $\mathbf{p}_N$ обозначает полную обобщенную силу в узловой точке N:

$$\mathbf{p}_N = \mathbf{f}_N + \mathbf{s}_N. \tag{13.52}$$

Ее компоненты равны

$$p_{Ni} = f_{Ni} + s_{Ni}, \tag{13.53}$$

или

$$p_{Ni} = \int\limits_{v_{0(e)}} \hat{F}_i(\mathrm{x})\,\psi_N(\mathrm{x})\,dv_0 + \int\limits_{A_{0(e)}} \hat{S}_i(\mathrm{x})\,\psi_N(\mathrm{x})\,dA_0. \tag{13.54}$$

Теперь (13.49) принимает вид

$$\Omega_{(e)} = \dot{\mathbf{u}}^N \cdot \mathbf{p}_N = \dot{u}_i^N p_{Ni}, \tag{13.55}$$

где $N = 1, 2, \ldots, N_e$ и $i = 1, 2, 3$.

Скорость нагрева. Полную скорость нагрева конечного элемента обозначим через $Q_{(e)}$ и этим ограничимся. На данном этапе конкретные формы представления $Q_{(e)}$ приближенными полями не имеют значения, поскольку они не влияют на вид уравнений движения элемента. Производство энтропии и теплопередача в конечном элементе будут рассмотрены позднее [1]).

13.3. СОХРАНЕНИЕ ЭНЕРГИИ В КОНЕЧНОМ ЭЛЕМЕНТЕ

Если ограничиться рассмотрением термомеханического поведения, то закон сохранения энергии в конечном элементе в соответствии с (12.7) имеет вид

$$\dot{\varkappa}_{(e)} + \dot{U}_{(e)} = \Omega_{(e)} + Q_{(e)}, \tag{13.56}$$

где, согласно (13.38), (13.47) и (13.55),

$$\dot{\varkappa}_{(e)} = m_{NM}\ddot{u}_i^N \dot{u}_i^M, \tag{13.57а}$$

$$\dot{U}_{(e)} = \int\limits_{v_{0(e)}} t^{ij}\psi_{N,\,i}\,(\delta_{jk} + \psi_{M,\,j}u_k^M)\,dv_0 \dot{u}_k^N + Q_{(e)}, \tag{13.57б}$$

$$\Omega_{(e)} = p_{Ni} + \dot{u}_i^N, \tag{13.57в}$$

$$Q_{(e)} = Q_{(e)}. \tag{13.57г}$$

Подставляя (13.57) в (13.56), получаем уравнение энергетического баланса для случая термомеханического поведения конечного

---

[1]) См. п. 13.8.

элемента:

$$m_{NM}\ddot{u}_i^M\dot{u}_i^N + \int\limits_{v_{0(e)}} t^{mj}\psi_{N,m}(\delta_{ji}+\psi_{M,j}u_i^M)\,dv_0\dot{u}_i^N = p_{Ni}\dot{u}_i^N. \qquad (13.58)$$

Заметим, что поскольку мы заменили скорость изменения внутренней энергии $\dot{e}$ в выражении для $\dot{U}_{(e)}$ правой частью соотношения (12.23), скорость нагрева $Q_{(e)}$ не входит в (13.58). Еще раз отметим, что (13.58) справедливо для любых материалов без каких-либо ограничений на порядок и величину градиентов деформации. Для получения конкретных форм уравнения (13.58) для различных материалов нужно исключить t^{ij} с помощью уравнений состояния.

13.4. ОБЩИЕ УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ КОНЕЧНОГО ЭЛЕМЕНТА

Теперь нетрудно написать общие уравнения движения для типичного конечного элемента сплошной среды. Обращаясь к (13.58), мы видим, что каждый член содержит компоненты узловой скорости $\dot{u}_i^N$, являющиеся функциями одного времени. Поэтому уравнение энергетического баланса можно переписать следующим образом:

$$\left[m_{NM}\ddot{u}_i^M + \int\limits_{v_{0(e)}} t^{mj}\psi_{N,m}(\delta_{ji}+\psi_{M,j}u_i^M)\,dv_0 - p_{Ni}\right]\dot{u}_i^N = 0. \qquad (13.59)$$

Как обычно, по повторяющимся индексам производится суммирование по всем допустимым для них значениям: N, $M = 1, 2, \ldots$ $\ldots, N_e$; $i, j, m = 1, 2, 3$. Соотношение (13.59) представляет собой закон сохранения энергии для конечного элемента. Поскольку этот закон справедлив при произвольных движениях элемента, он должен быть справедлив и при любых значениях узловых скоростей $\dot{u}_i^N$. «Разворачивая» в (13.59) суммирование по повторяющимся индексам N и i и рассматривая каждый член, мы убеждаемся, что если (13.59) выполняется при произвольных $\dot{u}_i^N$, то член, стоящий в скобках, должен обращаться в нуль при всех значениях N и i. Таким образом,

$$m_{NM}\ddot{u}_i^M + \int\limits_{v_{0(e)}} t^{mj}\psi_{N,m}(\delta_{ji}+\psi_{M,j}u_i^M)\,dv_0 = p_{Ni}. \qquad (13.60)$$

Уравнение (13.60) представляет собой *общее уравнение движения конечного элемента сплошной среды* [1]). Это система $3N_e$ уравнений

[1]) Это уравнение и некоторые другие его формы были выведены Оденом [1967в, 1969б, 1970а]. См. также Оден и Кубица [1967], Оден и Агирре-Рамирес [1969] и Оден [1970б]. Отметим, что этот же результат можно получить

относительно узловых перемещений и их производных по времени. Снова конкретные формы уравнения (13.60) могут быть получены после того, как специализирован материал. Тогда t^{ij} можно выразить через узловые температуры, величины u_i^N, $\dot{u}_i^N$, . . ., предыстории изменения этих величин и т. д. и таким образом исключить из уравнений движения. В представленном выше виде уравнение (13.60) является дискретным эквивалентом первого закона движения Коши (5.27) и выражает баланс количества движения в некотором осредненном смысле для элемента r_e.

13.5. ГЛОБАЛЬНЫЕ ФОРМЫ УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ

Уравнение (13.60) описывает движение типичного конечного элемента. Для получения уравнений движения всего ансамбля элементов используем обозначения U_i^Δ, $\dot{U}_i^\Delta$ и $\ddot{U}_i^\Delta$ для глобальных значений компонент перемещения, скорости и ускорения узла Δ связанной модели. Тогда в соответствии с (13.11) — (13.20) имеем

$$u_{i(e)}^N = \overset{(e)}{\Omega}{}_\Delta^N U_i^\Delta, \qquad (13.61а)$$

$$\dot{u}_{i(e)}^N = \overset{(e)}{\Omega}{}_\Delta^N \dot{U}_i^\Delta, \qquad (13.61б)$$

$$\ddot{u}_{i(e)}^N = \overset{(e)}{\Omega}{}_\Delta^N \ddot{U}_i^\Delta, \qquad (13.61в)$$

где для простоты временно принято, что локальные координатные линии $x^i_{(e)}$ параллельны глобальным X^i (т. е. $\overset{(e)}{\alpha}{}_j^i = \delta_j^i$).

Пусть $\mathbf{P}_\Delta$ — глобальное значение обобщенной силы в узле Δ связанной модели. Тогда полная механическая мощность, развиваемая в модели, равна

$$\Omega = \dot{\mathbf{U}}^\Delta \cdot \mathbf{P}_\Delta = \dot{U}_i^\Delta P_{\Delta i}, \qquad (13.62)$$

с помощью понятия «виртуальной работы». А именно, рассматривая энергию, обусловленную произвольной вариацией $\delta\dot{u}_i^N$ узловых скоростей, получаем уравнение, идентичное (13.59), с той лишь разницей, что $\dot{u}_i^N$ за скобкой заменяется на $\delta\dot{u}_i^N$. Далее используется то соображение, что баланс энергии должен сохраняться при произвольных вариациях узловых скоростей (см. Оден и Агирре-Рамирес [1969]). С другой стороны, можно рассматривать вывод уравнения (13.60) как приложение метода Галёркина, в соответствии с которым уравнения движения Коши (5.27) умножаются на «произвольную» функцию $\dot{u}_i^N\psi_N$ (x) и интегрируются по объему элемента. Однако произведенный здесь вывод физически более нагляден и естественнее связан с основными физическими законами.

где $\Delta = 1, 2, \ldots, G$. Однако Ω можно также представить в виде суммы

$$\Omega = \sum_{e=1}^{E} \Omega_{(e)}, \tag{13.63}$$

где $\Omega_{(e)}$ определяется формулой (13.55). Тогда

$$\mathbf{P}_\Delta \cdot \dot{\mathbf{U}}^\Delta = \sum_{e=1}^{E} \mathbf{p}_N^{(e)} \cdot \dot{\mathbf{u}}_{(e)}^N. \tag{13.64}$$

Подставляя сюда (13.61б), находим

$$\Big(\mathbf{P}_\Delta - \sum_e \overset{(e)}{\Omega}{}_\Delta^N \mathbf{p}_N^{(e)}\Big) \cdot \dot{\mathbf{U}}^\Delta = 0, \tag{13.65}$$

что дает

$$\mathbf{P}_\Delta = \sum_{e=1}^{E} \overset{(e)}{\Omega}{}_\Delta^N \mathbf{p}_N^{(e)}, \tag{13.66}$$

или, в покомпонентной записи,

$$P_{\Delta i} = \sum_{e=1}^{E} \overset{(e)}{\Omega}{}_\Delta^N p_{Ni}^{(e)}. \tag{13.67}$$

Этот результат, конечно, сразу следует также из определения сопряженных полей (см. (9.189)). Однако данный здесь вывод приводит к разумной физической интерпретации обобщенных сил $\mathbf{P}_\Delta$. Снова мы видим, что обобщенные силы $\mathbf{P}_\Delta$ и $\mathbf{p}_N$ сопряжены скоростям $\dot{\mathbf{U}}^\Delta$ и $\dot{\mathbf{u}}^N$ относительно механической мощности Ω. Силы $\mathbf{P}_\Delta$ вычисляются таким образом, что механическая мощность, развиваемая в результате «дискретных» движений $\dot{\mathbf{U}}^\Delta$, такова же, как и механическая мощность, развиваемая во всех элементах модели; таким образом, равенство (13.64) можно интерпретировать как утверждение об инвариантности механической мощности для модели. Равенства (13.66) и (13.67) показывают, что глобальная обобщенная сила в узле Δ связанной модели является векторной суммой локальных обобщенных сил в узлах $\mathbf{p}_N^{(e)}$ всех элементов, соединяющихся в узловой точке Δ связанной модели (см. (9.191)).

Прежде чем двигаться дальше, стоит отметить еще одно свойство обобщенных сил $\mathbf{P}_\Delta$. Подставляя (13.52) в (13.66), получаем

$$\mathbf{P}_\Delta = \mathbf{F}_\Delta + \mathbf{S}_\Delta, \tag{13.68}$$

где

$$\mathbf{F}_\Delta = \sum_{e=1}^{E} \overset{(e)}{\Omega}{}_\Delta^N \mathbf{f}_N^{(e)}, \tag{13.69}$$

$$\mathbf{S}_\Delta = \sum_{e=1}^{E} \overset{(e)}{\Omega}{}_\Delta^N \mathbf{s}_N^{(e)}. \tag{13.70}$$

Ясно, что величина $\mathbf{F}_\Delta$ является глобальной обобщенной силой в узле Δ, обусловленной распределенными в нашей сплошной среде объемными силами $\hat{\mathbf{F}}(\mathbf{x})$. Если предположить, что поле $\hat{\mathbf{F}}(\mathbf{x})$ задано, то локальные обобщенные силы $\mathbf{f}_N^{(e)}$ для каждого элемента можно вычислить, используя (13.50). Тогда $\mathbf{F}_\Delta$ в каждой узловой точке связанной модели находится по формуле (13.69).

Величина $\mathbf{S}_\Delta$ представляет собой глобальную обобщенную силу в узле Δ, обусловленную поверхностными силами $\mathbf{S}(\mathbf{x})$. Однако локальные значения $\mathbf{s}_N^{(e)}$ *являются дискретными аналогами напряжений в конечноэлементной модели*. Таким образом, для любого внутреннего узла величина $\mathbf{s}_N^{(e)}$ характеризует действие одного элемента на другой (т. е. это дискретный эквивалент контактных сил). Значит, для *внутренних* узлов имеет место равенство [1])

$$\mathbf{S}_\Delta = \mathbf{0} \tag{13.71}$$

и (13.68) сводится к

$$\mathbf{P}_\Delta = \mathbf{F}_\Delta. \tag{13.72}$$

Однако для узлов, расположенных на границе, в общем случае $\mathbf{S}_\Delta \neq \mathbf{0}$ и справедливо (13.68).

Возвращаясь к построению глобальных уравнений, преобразуем узловые перемещения, скорости и ускорения в (13.60) с помощью (13.61):

$$p_{Ni}^{(e)}(t) = m_{NM}^{(e)} \overset{(e)}{\Omega}{}_\Delta^M \ddot{U}_i^\Delta + \int\limits_{v_{0(e)}} t_{(e)}^{mj} \psi_{N,m}^{(e)} \left(\delta_{ji} + \psi_{M,j}^{(e)} \overset{(e)}{\Omega}{}_\Delta^M U_i^\Delta\right) dv_0. \tag{13.73}$$

Наконец, подставляя (13.73) в (13.67) и производя упрощения, получаем глобальные уравнения движения для всего ансамбля конечных элементов:

$$P_{\Gamma i}(t) = M_{\Gamma\Delta} \ddot{U}_i^\Delta + G_{\Gamma i}(t) + H_{\Gamma\Delta}(t)\, U_i^\Delta, \tag{13.74}$$

где

$$M_{\Gamma\Delta} = \sum_{e=1}^{E} \overset{(e)}{\Omega}{}_\Gamma^N m_{NM}^{(e)} \overset{(e)}{\Omega}{}_\Delta^M, \tag{13.75}$$

[1]) Может случиться, что поле напряжений претерпевает конечные разрывы на некоторых поверхностях в теле. Тогда $\mathbf{S}_\Delta$ можно использовать в качестве дискретного эквивалента скачка в узлах на таких поверхностях. В этом случае вместо (13.71) имеем $\mathbf{S}_\Delta = [\mathbf{S}_\Delta]$, где

$$[\mathbf{S}_\Delta] = \sum_e \overset{(e)}{\Omega}{}_\Delta^N \mathbf{s}_N^{(e)}$$

— скачок силы $\mathbf{S}$ в узле Δ связанной модели.

$$G_{\Gamma i}(\mathbf{t}) = \sum_{e=1}^{E} \overset{(e)}{\Omega}{}_{\Gamma}^{N} \delta_{ji} \int_{v_{0(e)}} t_{(e)}^{mj} \psi_{N,\,m}^{(e)}\, dv_0, \tag{13.76}$$

$$H_{\Gamma\Delta}(\mathbf{t}) = \sum_{e=1}^{E} \overset{(e)}{\Omega}{}_{\Gamma}^{N} \overset{(e)}{\Omega}{}_{\Delta}^{M} \int_{v_{0(e)}} t_{(e)}^{mj} \psi_{N,\,m}^{(e)} \psi_{M,\,j}^{(e)}\, dv_0. \tag{13.77}$$

Обозначения $G_{\Gamma i}(\mathbf{t})$ и т. д. указывают на зависимость от тензора напряжений $\mathbf{t}$. Массив $M_{\Gamma\Delta}$ является глобальной согласованной матрицей масс всего ансамбля конечных элементов. Величины $G_{\Gamma i}(\mathbf{t})$ и $H_{\Gamma\Delta}(\mathbf{t})$ должны быть представлены в виде функций или функционалов от U_i^{Δ}, $\dot{U}_i^{\Delta}$, . . . и/или их предысторий после введения уравнений состояния, характеризующих материалы элементов. Локальные значения узловых перемещений, скоростей и ускорений для каждого элемента определяются по формулам (13.61) после решения уравнений (13.74). Значения этих полей в произвольных внутренних точках находятся из (13.12) и (13.18), а компоненты тензоров деформаций и скоростей деформаций в случае надобности определяются по формулам (13.22) и (13.23). Узловые силы $p_{Ni}^{(e)}$ для каждого элемента можно вычислить, используя (13.60). В последующих разделах будут рассмотрены различные частные формы уравнений (13.60) и (13.74).

Если оси систем локальных прямоугольных координат $x_{(e)}^i$ не параллельны осям глобальных координат X^i, то надо незначительно видоизменить приведенные выше соотношения. А именно, вместо (13.61) и (13.67) в этом случае надо ввиду (13.4) и (13.6) использовать соотношения

$$u_{i(e)}^{N} = \overset{(e)}{\alpha}{}_{i}^{j} \overset{(e)}{\Omega}{}_{\Delta}^{N} U_j^{\Delta}, \qquad \dot{u}_{i(e)}^{N} = \overset{(e)}{\alpha}{}_{i}^{j} \overset{(e)}{\Omega}{}_{\Delta}^{N} \dot{U}_j^{\Delta}, \tag{13.78а,б}$$

$$\ddot{u}_{i(e)}^{N} = \overset{(e)}{\alpha}{}_{i}^{j} \overset{(e)}{\Omega}{}_{\Delta}^{N} \ddot{U}_j^{\Delta}, \qquad P_{\Delta i} = \sum_{e=1}^{E} \overset{(e)}{\Omega}{}_{\Delta}^{N} \overset{(e)}{\alpha}{}_{i}^{j} p_{Nj}^{(e)}. \tag{13.78в,г}$$

Далее поступают точно так же, как описано выше.

13.6. УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ В КООРДИНАТАХ ОБЩЕГО ВИДА

Все уравнения, полученные в этом параграфе до сих пор, основывались на предположении, что локальные координаты $x_{(e)}^i$ в начальной конфигурации элемента прямоугольные декартовы. Общий вид предыдущих уравнений, справедливый при любом выборе внутренних криволинейных координат в начальной конфигурации, более громоздок, но получить его нетрудно [1]).

---

[1]) См. Оден и Агирре-Рамирес [1969] и Оден [1970а].

Пусть $\xi^i_{(e)}$ — произвольная система криволинейных координат в элементе r_e в конфигурации $C_{0(e)}$ с ковариантными и контравариантными базисными векторами $\mathbf{g}_{i(e)}$ и $\mathbf{g}^i_{(e)}$ (см. (4.48)). Для удобства мы опять опускаем идентификационную метку элемента и пишем просто ξ^i, $\mathbf{g}_i$ и $\mathbf{g}^i$. Поле перемещений типичного элемента записывается так:

$$\mathbf{u}_{(e)} = w_i(\xi, t)\,\mathbf{g}^i = w^i(\xi, t)\,\mathbf{g}_i; \tag{13.79}$$

здесь w_i и w^i — ковариантные и контравариантные компоненты перемещения. Отметим, что векторы $\mathbf{g}_i$ и $\mathbf{g}^i$ тоже являются функциями от ξ^i.

Для конечного элемента используем представления

$$w_i = w^N_i \psi_N(\xi) \qquad \text{или} \qquad w^i = w^{Ni}\psi_N(\xi). \tag{13.80а,б}$$

Компоненты тензора деформаций в этом случае суть

$$\gamma^{(e)}_{ij} = \frac{1}{2}\left(\mathbf{g}_i\cdot\mathbf{u}_{,j} + \mathbf{g}_j\cdot\mathbf{u}_{,i} + \mathbf{u}_{,i}\cdot\mathbf{u}_{,j}\right), \tag{13.81}$$

где $\mathbf{u}_{,j} = \partial\mathbf{u}/\partial\xi^j$. Другие кинематические величины подсчитываются аналогичным образом.

Замечая, что

$$\frac{\partial\dot{\mathbf{u}}_{(e)}}{\partial\xi^i} = \left(\frac{\partial\psi_N(\xi)}{\partial\xi^i}\mathbf{g}_m + \psi_N(\xi)\,\Gamma^r_{mi}\mathbf{g}_r\right)\dot{w}^{Nm} \tag{13.82}$$

и

$$\frac{\partial\dot{\mathbf{u}}_{(e)}}{\partial\xi^i} = \left(\frac{\partial\psi_N(\xi)}{\partial\xi^i}\mathbf{g}^m - \psi_N(\xi)\,\Gamma^m_{ri}\mathbf{g}^r\right)\dot{w}^N_m, \tag{13.83}$$

где Γ^r_{mi} — символы Кристоффеля второго рода для ξ^i в $C_{0(e)}$ (см. (4.54)), поступаем точно так же, как и ранее, и получаем вместо (13.60) следующее уравнение движения для типичного конечного элемента:

$$m_{NM}\ddot{w}^{Mi} + \int\limits_{v_{0(e)}} t^{qj}\left(\delta^i_j\psi_{N,q} - \psi_N\Gamma^i_{jq}\right)dv_0 + \\ + \int\limits_{v_{0(e)}} t^{qj}\left(\psi_{M,j}\psi_{N,q}\delta^i_m + \psi_M\psi_{N,q}\Gamma^i_{mj} - \psi_{M,j}\psi_N\Gamma^i_{mq} - \right. \\ \left. - \psi_M\psi_N\Gamma^r_{mj}\Gamma^i_{rq}\right)dv_0 w^{Mm} = p^i_N, \tag{13.84}$$

где $\psi_{N,q} = \partial\psi_N(\xi)/\partial\xi^q$, а t^{qi} — тензор напряжений на единицу площади в $C_{0(e)}$, отнесенный к конвективным координатам ξ^i

в $C_{(e)}$. Вместо этого можно использовать уравнение

$$m_{NM}\ddot{w}_i^M + \int\limits_{v_{0(e)}} t^{pq}(g_{iq}\psi_{N,p} + g_{qj}\psi_N\Gamma^j_{ip})\,dv_0 + \int\limits_{v_{0(e)}} t^{pq}(\psi_{M,q}\psi_{N,p}\delta^m_i - \psi_M\psi_{N,p}\Gamma^m_{iq} + \psi_{M,q}\psi_N\Gamma^m_{ip} - \psi_M\psi_N\Gamma^m_{ps}\Gamma^s_{iq})\,dv_0 w^M_m = p_{Ni}, \quad (13.85)$$

где $g_{ij} = \mathbf{g}_i \cdot \mathbf{g}_j$ и

$$w^M_i = g_{ij}w^{Mj}, \qquad p_{Ni} = g_{ij}p^j_N. \qquad (13.86а,б)$$

Если координатные линии $\xi^i_{(e)}$ параллельны глобальным координатным линиям Ξ^i в C, то

$$w^{Ni}_{(e)} = \overset{(e)}{\Omega}{}^N_\Delta W^{\Delta i}, \qquad w^N_{i(e)} = \overset{(e)}{\Omega}{}^N_\Delta W^\Delta_i, \qquad (13.87а,б)$$

$$P^i_\Delta = \sum_e \overset{(e)}{\Omega}{}^N_\Delta p^{i(e)}_N, \qquad P_{\Delta i} = \sum_e \overset{(e)}{\Omega}{}^N_\Delta p^{(e)}_{Ni}. \qquad (13.88а,б)$$

Если $\xi^i_{(e)}$ и Ξ^i не параллельны, то для того, чтобы отнести компоненты к общему базису, надо в (13.87) и (13.88) включить $\partial\xi^i_{(e)}/\partial\Xi^j$ и $\partial\Xi^i/\partial\xi^j_{(e)}$.

Глобальные уравнения движения имеют вид

$$M_{\Gamma\Delta}\ddot{W}^{\Delta i} + \overline{G}{}^i_\Gamma(\mathbf{t}) + \overline{H}{}^i_{\Gamma\Delta m}(\mathbf{t})\,W^{\Delta m} = P^i_\Gamma, \qquad (13.89)$$

или

$$M_{\Gamma\Delta}\ddot{W}^\Delta_i + \overline{G}_{\Gamma i}(\mathbf{t}) + \overline{H}{}^m_{\Gamma\Delta i}(\mathbf{t})\,W^\Delta_m = P_{\Gamma i}, \qquad (13.90)$$

где $M_{\Gamma\Delta}$ определяется по формуле (13.75), за тем исключением, что вместо $\psi_N(\mathbf{x})$ используется $\psi_N(\xi)$, и

$$\overline{G}{}^i_\Gamma(\mathbf{t}) = \sum_e \overset{(e)}{\Omega}{}^N_\Gamma \int\limits_{v_{0(e)}} t^{qj}(\delta^i_j\psi_{N,q} - \psi_N\Gamma^i_{jq})\,dv_0, \qquad (13.91)$$

$$\overline{G}_{\Gamma i}(\mathbf{t}) = \sum_e \overset{(e)}{\Omega}{}^N_\Gamma \int\limits_{v_{0(e)}} t^{pq}(g_{iq}\psi_{N,p} + g_{qj}\psi_N\Gamma^j_{ip})\,dv_0, \qquad (13.92)$$

$$\overline{H}{}^i_{\Gamma\Delta m}(\mathbf{t}) = \sum_e \overset{(e)}{\Omega}{}^N_\Gamma \overset{(e)}{\Omega}{}^M_\Delta \int\limits_{v_{0(e)}} t^{qj}(\psi_{M,j}\psi_{N,q}\delta^i_m + \psi_M\psi_{N,q}\Gamma^i_{mj} - \psi_{M,j}\psi_N\Gamma^i_{mq} - \psi_M\psi_N\Gamma^r_{mj}\Gamma^i_{rq})\,dv_0. \qquad (13.93)$$

Заметим, что в случае, когда $\xi^i_{(e)}$ — прямоугольные декартовы координаты ($\xi^i_{(e)} = x^i_{(e)}$), мы имеем $\Gamma^i_{jk} = 0$, $g_{ij} = g^{ij} = \delta^i_j$, $w^N_i = w^{Ni} = u^N_i$, а (13.84) и (13.85) сводятся к (13.60). Точно так же $\overline{G}{}^i_\Gamma = \overline{G}_{\Gamma i} = G_{\Gamma i}$, а $\overline{H}{}^i_{\Gamma\Delta m}W^{\Delta m}$ и $\overline{H}{}^m_{\Gamma\Delta i}W^\Delta_m$ сводятся к $H_{\Gamma\Delta}U^\Delta_i$.

Отметим, что менее точная, но значительно более простая форма уравнений движения в произвольных координатах получается, если вместо аппроксимации компонент w_i и w^i использовать векторное представление $\mathbf{u}_{(e)} = \psi_N \mathbf{u}^N_{(e)}$, где $\mathbf{u}^N_{(e)} = \mathbf{u}_{(e)}(\mathbf{x}^N)$. Как отмечалось в п. 7.5 (см. (7.48) — (7.52)), это эквивалентно отнесению $\mathbf{u}_{(e)}$ к постоянным базисным векторам $\mathbf{g}^{(e)}_{Ni}$ и $\mathbf{g}^i_{N(e)}$, являющимся средними значениями базисных векторов $\mathbf{g}_i$ и $\mathbf{g}^i$ в узлах. Тогда вместо (13.82) и (13.83) мы имеем

$$\frac{\partial \dot{\mathbf{u}}}{\partial \xi^i} = \frac{\partial \psi_N}{\partial \xi^i} \dot{w}^{Nj} \mathbf{g}_{(N)j} = \frac{\partial \psi_N}{\partial \xi^i} \dot{w}^N_j \mathbf{g}^j_{(N)}, \tag{13.94}$$

и уравнения (13.84) и (13.85) сводятся к уравнениям

$$m_{NM} \ddot{w}^{Mi} + \int\limits_{v_{0(e)}} t^{qj} \psi_{N,q} (\delta^i_j + \psi_{M,j} w^{Mi})\, dv_0 = p^i_N, \tag{13.95}$$

$$m_{NM} \ddot{w}^M_i + \int\limits_{v_{0(e)}} t^{qj} \psi_{N,q} (\delta_{ij} + \psi_{M,j} w^M_i)\, dv_0 = p_{Ni}. \tag{13.96}$$

Здесь опять $\psi_{N,q} \equiv \partial \psi_N(\xi)/\partial \xi^q$.

13.7. ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ

Конечноэлементные представления высших порядков строятся по существу тем же способом, с помощью которого была получена формула (13.60). Для полноты изложения посмотрим, как пишутся локальные уравнения движения для представления третьего порядка.

Рассмотрим такую локальную аппроксимацию для поля перемещений:

$$u_i = \psi^0_N u^N_i + \psi^j_N u^N_{i,j} + \psi^{jk}_N u^N_{i,jk}, \tag{13.97}$$

где ψ^0_N, ψ^i_N и ψ^{ik}_N — локальные интерполяционные функции, описанные в § 8, а u^N_i, $u^N_{i,j}$ и $u^N_{i,jk}$ — значения компонент перемещений и их первых и вторых производных в узловой точке N элемента. Здесь $i, j, k = 1, 2, 3$, причем для функций ψ^{jk}_N предполагается, что $j \leqslant k$, так что всего этих функций $6N_e$. Напомним (см. (8.8)), что функции ψ^0_N, ψ^i_N и ψ^{jk}_N обладают свойствами

$$\begin{aligned}
&\psi^0_N(\mathbf{x}^M) = \delta^M_N, && \frac{\partial \psi^0_N(\mathbf{x}^M)}{\partial x^i} = 0, && \frac{\partial^2 \psi^0_N(\mathbf{x}^M)}{\partial x^i\, \partial x^r} = 0,\\
&\psi^j_N(\mathbf{x}^M) = 0, && \frac{\partial \psi^j_N(\mathbf{x}^M)}{\partial x^i} = \delta^j_i \delta^M_N, && \frac{\partial^2 \psi^j_N(\mathbf{x}^M)}{\partial x^i\, \partial x^r} = 0,\\
&\psi^{jk}_N(\mathbf{x}^M) = 0, && \frac{\partial \psi^{jk}_N(\mathbf{x}^M)}{\partial x^i} = 0, && \frac{\partial^2 \psi^{jk}_N(\mathbf{x}^M)}{\partial x^i\, \partial x^r} = \delta^j_i \delta^k_r \delta^M_N.
\end{aligned} \tag{13.98}$$

Отметим, что иногда при построении представлений третьего порядка для u_i удобно исключать некоторые функции ψ_N^0, ψ_N^i, ψ_N^{jk}.

Замечая, что

$$\begin{aligned}\dot{u}_i &= \psi_N^0 \dot{u}_i^N + \psi_N^j \dot{u}_{i,j}^N + \psi_N^{jk} \dot{u}_{i,jk}^N,\\ \ddot{u}_i &= \psi_N^0 \ddot{u}_i^N + \psi_N^j \ddot{u}_{i,j}^N + \psi_N^{jk} \ddot{u}_{i,jk}^N,\end{aligned} \tag{13.99}$$

подставляем (13.99) в (12.7) и, используя (12.2), (12.3), (13.45) и (4.17), после некоторых алгебраических преобразований получаем следующую запись закона сохранения энергии для элемента:

$$P_{Ni}\dot{u}_i^N + P_{Nij}\dot{u}_{i,j}^N + P_{Nijk}\dot{u}_{i,jk}^N = 0. \tag{13.100}$$

Здесь P_{Ni}, P_{Nij} и P_{Nijk} — функции от u_i^N, $u_{i,j}^N$, $u_{i,jk}^N$ и их производных по времени (см. (13.102)). Поскольку (13.100) должно выполняться при произвольных значениях $\dot{u}_i^N$, $\dot{u}_{i,j}^N$ и $\dot{u}_{i,jk}^N$, мы заключаем, что

$$P_{Ni} = P_{Nij} = P_{Nijk} = 0. \tag{13.101}$$

Это приводит к трем системам уравнений движения для конечного элемента:

$$\begin{aligned}
\bar{m}_{NM}\ddot{u}_k^M + \mathrm{I}_{NM}^r \ddot{u}_{k,r}^M + J_{NM}^{rs}\ddot{u}_{k,rs}^M + \int_{v_{0(e)}} t^{ij}\psi_{N,j}^0 z_{i,k}\, dv_0 &= \bar{p}_{Nk},\\
\mathrm{I}_{NM}^r \ddot{u}_k^M + \mathrm{II}_{NM}^{rs}\ddot{u}_{k,s}^M + \mathrm{III}_{NM}^{rsi}\ddot{u}_{k,st}^M + \int_{v_{0(e)}} t^{ij}\psi_{N,j}^r z_{i,k}\, dv_0 &= d_{Nk}^r,\\
J_{NM}^{rs}\ddot{u}_k^M + \mathrm{III}_{NM}^{rst}\ddot{u}_{k,t}^M + K_{NM}^{rsmn}\ddot{u}_{k,mn}^M + \int_{v_{0(e)}} t^{ij}\psi_{N,j}^{rs} z_{i,k}\, dv_0 &= \mu_{Nk}^{rs}.
\end{aligned} \tag{13.102}$$

Здесь

$$t^{ij}z_{i,k} = t^{ij}(\delta_{ik} + \psi_{M,i}^0 u_k^M + \psi_{M,i}^r u_{k,r}^M + \psi_{M,i}^{rs} u_{k,rs}^M) \tag{13.103}$$

и

$$\begin{aligned}
\bar{m}_{NM} &= \int_{v_{0(e)}} \rho_0\psi_N^0\psi_M^0\, dv_0, & \mathrm{I}_{NM}^r &= \int_{0(e)} \rho_0\psi_N^0\psi_M^r\, dv_0,\\
J_{NM}^{rs} &= \int_{v_{0(e)}} \rho_0\psi_N^0\psi_M^{rs}\, dv_0, & \mathrm{II}_{NM}^{rs} &= \int_{v_{0(e)}} \rho_0\psi_N^r\psi_M^s\, dv_0,\\
\mathrm{III}_{NM}^{rst} &= \int_{v_{0(e)}} \rho_0\psi_N^r\psi_M^{st}\, dv_0, & K_{NM}^{rsmn} &= \int_{v_{0(e)}} \rho_0\psi_N^{rs}\psi_M^{mn}\, dv_0,
\end{aligned} \tag{13.104}$$

$$\bar{p}_{Nk} = \int\limits_{v_{0(e)}} \rho_0 \hat{F}_k \psi_N^0 \, dv_0 + \int\limits_{A_{0(e)}} \hat{S}_k \psi_N^0 \, dA_0,$$

$$d_{Nk}^r = \int\limits_{v_{0(e)}} \rho_0 \hat{F}_k \psi_N^r \, dv_0 + \int\limits_{A_{0(e)}} \hat{S}_k \psi_N^r \, dA_0,$$

$$\mu_{Nk}^{rs} = \int\limits_{v_{0(e)}} \rho_0 \hat{F}_k \psi_N^{rs} \, dv_0 + \int\limits_{A_{0(e)}} \hat{S}_k \psi_N^{rs} \, dA_0.$$

Массивы $\bar{m}_{NM}$, I_{NM}^r, . . ., K_{NM}^{rsmn} представляют собой матрицы распределенных по узлам массы, инерции вращения и «инерции высшего порядка», а $\bar{p}_{Nk}$, d_{Nk}^r и μ_{Nk}^{rs} — обобщенные узловые силы, моменты и моменты высших порядков, соответствующие обобщенным узловым перемещениям u_i^N и их первым и вторым производным.

Глобальные уравнения движения получаются с помощью преобразований вида

$$\begin{aligned} u_k^N &= \overset{(e)}{\Omega}{}_\Delta^N U_k^\Delta, & u_{k,\,i}^N &= \overset{(e)}{\Omega}{}_\Delta^N U_{k,\,i}^\Delta, & u_{k,\,ij}^N &= \overset{(e)}{\Omega}{}_\Delta^N U_{k,\,ij}^\Delta, \\ \bar{P}_{\Delta k} &= \sum_e \overset{(e)}{\Omega}{}_\Delta^N \bar{p}_{Nk}^{(e)}, & D_{\Delta k}^r &= \sum_e \overset{(e)}{\Omega}{}_\Delta^N d_{Nk}^{r(e)}, & M_{\Delta k}^{rs} &= \sum_e \overset{(e)}{\Omega}{}_\Delta^N \mu_{Nk}^{rs(e)}. \end{aligned} \tag{13.105}$$

Подобным же образом можно получить представления любого порядка. Поскольку метод их построения ясен, больше на этом останавливаться не будем.

13.8. ЭНТРОПИЯ И ТЕПЛОПЕРЕДАЧА В КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТАХ

Для построения конечноэлементных моделей тепловых явлений нам надо вернуться к понятиям энтропии, скорости нагрева и температуры, рассмотренным в § 12. Естественно возникает вопрос о том, какую из имеющихся в нашем распоряжении термодинамических переменных (абсолютная температура, тепловой поток, градиент температуры, поток энтропии и т. д.) избрать в качестве первичной, независимой переменной. Всюду в дальнейшем этот вопрос решается исходя из следующего соглашения. *При построении конечноэлементных моделей физического явления в качестве первичных независимых переменных мы выбираем те, которые в этом явлении наиболее естественным образом наблюдаются или измеряются.* Например, в таком чисто механическом явлении, как деформация твердого тела, очевидной и простейшей характеристикой является перемещение частиц относительно друг друга. Если известны поле перемещений и законы поведения материала, то можно вычислить все остальные механические величины, например тензор деформаций, скорость, градиенты деформации. Для тепло-

вых явлений очевидной характеристикой является изменение температуры. Температура — наиболее естественная доступная для измерений величина, описывающая тепловое поведение системы, и поэтому она принимается за первичную независимую переменную [1]).

При построении конечноэлементных представлений температуры в типичном конечном элементе мы можем локально абсолютную температуру аппроксимировать так:

$$\theta_{(e)}(\mathbf{x}, t) = \theta^N(t)\,\varphi_N(\mathbf{x}), \tag{13.106}$$

где $\varphi_N(\mathbf{x})$ — локальные интерполяционные функции [обозначение $\varphi_N(\mathbf{x}) = \varphi_N^{(e)}(\mathbf{x})$ используется вместо обычного $\psi_N(\mathbf{x})$ для того, чтобы подчеркнуть, что тип локальной аппроксимации температуры не обязательно должен совпадать с типом локальных аппроксимаций полей перемещений $\psi_N(\mathbf{x})\,\mathbf{u}^N$]. В большинстве случаев удобно представлять абсолютную температуру в виде суммы известной начальной температуры $T_0(\mathbf{x})$ и изменения температуры $T(\mathbf{x}, t)$:

$$\theta(\mathbf{x}, t) = T_0(\mathbf{x}) + T(\mathbf{x}, t). \tag{13.107}$$

В классической термостатике $T_0(\mathbf{x})$ обычно принимается постоянной и предполагается, что $|T(\mathbf{x}, t)| \ll T_0$. При использовании соотношения (13.107) для типичного элемента принимается

$$T_{(e)}(\mathbf{x}, t) = T^N\varphi_N(\mathbf{x}), \tag{13.108}$$

так что абсолютная температура в элементе задается формулой

$$\theta(\mathbf{x}, t) = T_0(\mathbf{x}) + T^N\varphi_N(\mathbf{x}), \tag{13.109}$$

где подразумевается, что T^N зависят от t. Напомним, что $N = 1, 2, \ldots, N_e$ и что идентификационная метка элемента для простоты опущена.

В соответствии с (12.46)

$$\theta\,\dot{\xi} = q_{i,i} + h + \sigma, \tag{13.110}$$

где ξ — энтропия на единицу объема в C_0, h — поступление тепла от внутренних источников на единицу объема в C_0 и σ — удельная внутренняя диссипация. Для построения конечноэлементной моде-

[1]) Выбирая $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ и $\theta(\mathbf{x}, t)$ в качестве первичных переменных, мы по существу используем так называемую «аксиому причинности». По Эрингену [1967, стр. 145], «движение материальных точек тела и их температуру следует рассматривать как самоочевидные наблюдаемые характеристики термомеханического поведения тела. Остальные величины, входящие в уравнения баланса масс, моментов, производства энергии и сохранения энергии (например напряжения, энтропия, тепловой поток и т. д.), являются «причинами» ...» Предполагается, конечно, что внешние воздействия, такие, как объемные силы, источники тепла и некоторые поверхностные усилия или перемещения, заданы заранее; см. § 14.

ли процессов производства энтропии и теплопередачи в типичном конечном элементе умножим (13.110) на $T(\mathbf{x}, t)$:

$$T\theta\dot{\xi} = Tq_{i,i} + Th + T\sigma. \tag{13.111}$$

Замечая, что

$$Tq_{i,i} = (Tq_i)_{,i} - T_{,i}q_i, \tag{13.112}$$

перепишем (13.111) в виде

$$T\theta\dot{\xi} - T_{,i}q_i = (Tq_i)_{,i} + Th + T\sigma. \tag{13.113}$$

Подставляя (13.108) и (13.109) в (13.113), интегрируя по элементу и с помощью теоремы Грина — Гаусса преобразуя интеграл от первого слагаемого в правой части (13.113) в поверхностный интеграл, получаем

$$\left(\int_{v_{0(e)}} \{\varphi_N(\mathbf{x})\,[T_0(\mathbf{x}) + \varphi_M(\mathbf{x})\,T^M]\,\dot{\xi}_{(e)} + \varphi_{N,i}(\mathbf{x})\,q_i\}\,dv_0 - q_N - \sigma_N \right) T^N = 0, \tag{13.114}$$

где

$$q_N = \int_{v_0(e)} \varphi_N(\mathbf{x})\,h\,dv_0 + \int_{A_0(e)} q_i\hat{n}_i\varphi_N(\mathbf{x})\,dA_0, \tag{13.115}$$

$$\sigma_N = \int_{v_0(e)} \sigma(\mathbf{x}, t)\,\varphi_N(\mathbf{x})\,dv_0. \tag{13.116}$$

Здесь q_N — *обобщенная нормальная компонента теплового потока* в узле N элемента e, а σ_N — *обобщенная диссипация* в узле N.

Поскольку (13.114) должно выполняться при произвольных T^N, то

$$\int_{v_0(e)} \{\varphi_N(\mathbf{x})\,[T_0(\mathbf{x}) + \varphi_M(\mathbf{x})\,T^M]\,\dot{\xi}_{(e)} + \varphi_{N,i}(\mathbf{x})\,q_i\}\,dv_0 = q_N + \sigma_N. \tag{13.117}$$

Это — *общее уравнение теплопередачи для конечного элемента* [1]). Глобальная форма уравнения теплопередачи для всего ансамбля

---

[1]) Такого типа конечноэлементные формулировки впервые были даны Оденом и Агирре-Рамиресом [1969]; см. также Оден и Кросс [1969], Оден [1969г, 1970б] и Оден и Поу [1970]. Конечноэлементные постановки классической задачи теплопередачи впервые были представлены Вильсоном и Никеллом [1966] и Беккером и Парром [1967], использовавшими вариационный принцип. Исследование нелинейных задач теплопередачи методом конечных элементов было произведено Агирре-Рамиресом и Оденом [1969]. В гл. V мы подробно рассмотрим такие задачи.

элементов такова:

$$\sum_e \left(\overset{(e)}{\Omega}{}_{\Delta}^{N} \int_{v_0(e)} \{\varphi_N^{(e)}(\mathbf{x}) [T_0(\mathbf{x}) + \varphi_M^{(e)}(\mathbf{x}) \overset{(e)}{\Omega}{}_{\Gamma}^{M} \mathcal{T}^{\Gamma}] \dot{\xi}_{(e)} + \right.$$

$$\left. + \varphi_{N,i}^{(e)}(\mathbf{x}) q_i\} dv_0 \right) = Q_{\Delta} + \Sigma_{\Delta}, \quad (13.118)$$

где $\mathcal{T}^{\Gamma}$ — глобальное значение изменения температуры в узле Г связанной системы, а Q_{Δ} и Σ_{Δ} — глобальные значения q_N и σ_N в узле Δ:

$$Q_{\Delta} = \sum_{e=1}^{E} \overset{(e)}{\Omega}{}_{\Delta}^{N} q_N^{(e)}, \quad (13.119)$$

$$\Sigma_{\Delta} = \sum_{e=1}^{E} \overset{(e)}{\Omega}{}_{\Delta}^{N} \sigma_N^{(e)}. \quad (13.120)$$

Отметим, что нормальные компоненты теплового потока $q_i \hat{n}_i$ в (13.115), подобно контактным силам $\mathbf{S}(\mathbf{x})$, определены для нас только на материальных поверхностях в деформированном теле. Следовательно, q_N в общем случае зависят от деформации элемента. Для различных граничных условий можно ввести ряд частных форм q_N [1]). Отметим также, что тепловой поток q_i в интеграле по объему в формуле (13.117) является в общем случае функцией или функционалом температуры и возможно градиентов перемещений и/или их предысторий и что конкретный вид таких функционалов зависит от материала, из которого состоит элемент. Точно также вид функции производства энтропии $\dot{\xi}_{(e)}$ зависит от свойств материала.

Представленный выше вывод соотношений, описывающих теплопередачу в конечных элементах, носит вводный характер. Более подробно эти соотношения исследуются в гл. V. Там же дается интерпретация различных входящих в соотношения величин. Мало что еще можно сказать о форме уравнений, описывающих теплопередачу в конечноэлементных моделях, пока нет сведений о материале элемента и пока не установлены уравнения состояния для $\xi_{(e)}$ и $q_{i(e)}$ (или $\varphi_{(e)}$, $t_{(e)}^{ij}$ и $q_{i(e)}$).

14. УРАВНЕНИЯ СОСТОЯНИЯ

Уже несколько раз отмечалось, что для того, чтобы общие уравнения движения и теплопередачи конечного элемента (например, (13.60) и (13.117)) можно было приложить к конкретным задачам, необходимо ввести соответствующие уравнения состояния (или определяющие соотношения) для напряжений, теплового

[1]) См. Оден и Кросс [1969].

потока, энтропии и, возможно, внутренней энергии или свободной энергии. В этом параграфе кратко излагаются некоторые аксиомы теории определяющих соотношений, образующие основу для построения уравнений состояния идеальных материалов [1]).

14.1. ВВОДНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Напомним, что в предыдущем параграфе мы установили, что в качестве независимых переменных в уравнениях состояния используются движение $\mathbf{z} = \mathbf{z}(\mathbf{x}, t)$ [или, что то же самое, поле перемещений $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{z}(\mathbf{x}, t) - \mathbf{x}$] и температура $\theta = \theta(\mathbf{x}, t)$ [или, что то же самое, изменение температуры $T = T(\mathbf{x}, t) = \theta(\mathbf{x}, t) - T_0(\mathbf{x})$. В качестве зависимых переменных состояния используются тензор напряжений σ^{ij}, вектор теплового потока $\mathbf{q}$, плотность энтропии η и плотность свободной энергии ψ (плотность внутренней энергии ε при этом можно определить как $\psi + \eta\theta$).

Мы знаем, что два количества материала одного размера, веса, цвета и формы могут вести себя совершенно различно при одинаковых воздействиях внешних сил и потоков тепла. Следовательно, поведение данного образца зависит от физических свойств материала. При этом обычно считается, что приближенное представление об этих свойствах дают лабораторные испытания. Однако вопрос об экспериментальном определении свойств материалов сам по себе чрезвычайно сложен. Даже если бы мы могли установить совокупность экспериментов, которые показывали бы, как некоторые компоненты напряжения меняются при изменениях температуры и некоторых компонент деформации и скоростей деформации, трудно ожидать, что на основе ограниченного числа эмпирических соотношений мы получим описание свойств материала для достаточно широкого диапазона деформаций и температур. Другими словами, эмпирическая формула может описывать поведение материала для довольно специальных процессов деформирования, воспроизводимых в лаборатории, но та же самая формула может давать совершенно неудовлетворительные результаты при других деформациях. Для того чтобы избежать таких трудностей, надо установить некоторые правила, которым должны удовлетворять уравнения состояния материала, чтобы они давали удовлетворительные результаты для всех классов деформаций и температур, которые предполагается исследовать. Во-вторых,

---

[1]) Подробное изложение теории определяющих соотношений см. у Трусделла и Нолла [1965] и Эрингена [1962, 1967] [а также у Трусделла *[1972].— *Ред.*]. Хорошими вводными руководствами могут служить книги Трусделла [1966а] и Эрингена [1967]. Краткое изложение имеется во многих учебниках по механике сплошных сред, например у Джаунземиса [1967], Лея [1968], Мэлверна [1970].

нужно иметь точный вид уравнений состояния, согласующийся с этими правилами, для того чтобы знать, что измерять в лаборатории при исследовании имеющихся в нашем распоряжении образцов материала. Следует, конечно, иметь в виду, что уравнения состояния характеризуют идеальные материалы, действительные материалы лишь приближенно отвечают различным классификациям по форме уравнений состояния. Кроме того, надо иметь в виду, что можно построить уравнения состояния, описывающие заданный материал лишь приближенно — только в определенном диапазоне температур и деформаций.

14.2. ФИЗИЧЕСКАЯ ДОПУСТИМОСТЬ, ДЕТЕРМИНИЗМ, РАВНОПРИСУТСТВИЕ

При выборе правил, которыми надо руководствоваться при построении уравнений состояния, достаточно очевидными представляется следующие три. Во-первых, мы уже уделили много внимания локальным формам пяти основных физических законов сохранения: закона сохранения массы, уравнений баланса количества движения и момента количества движения, закона сохранения энергии и неравенства Клаузиуса — Дюгема [1]):

$$\begin{aligned} &\rho_0 = \sqrt{G}\,\rho, \\ &\sigma^{ij}_{;\,i} + \rho F^j = \rho a^j, \\ &\sigma^{ij} = \sigma^{ji}, \\ &\rho\dot{\varepsilon} = \sigma^{ij}\dot{\gamma}_{ij} + Q^i_{;\,i} + \rho r, \\ &\rho\theta\dot{\eta} - Q^i_{;\,i} - \rho r + \frac{1}{\theta}\mathbf{q}\cdot\nabla\theta \geqslant 0. \end{aligned} \tag{14.1}$$

Было бы довольно неразумно требовать выполнения законов (14.1) и при этом выбирать уравнения состояния, которые по каким-либо причинам приводят к их нарушению. Таким образом, в качестве общего правила мы устанавливаем необходимость согласованности уравнений состояния с законами (14.1). Это правило иногда называют *принципом физической допустимости*.

Правило 1 (физическая допустимость). Все уравнения состояния должны согласовываться с основными физическими законами сохранения: законом сохранения массы, уравнениями баланса количества движения и момента количества движения, законом сохранения энергии и неравенством Клаузиуса — Дюгема.

Второе самоочевидное правило называется *принципом детерминизма*. Опыт показывает, что из всего диапазона значений пара

[1]) См. соотношения (5.3), (5.21), (5.31), (12.14) и (12.31).

метра времени τ от $-\infty$ до настоящего момента t и далее до $+\infty$ заведомо можно исключить значения, большие, чем t; если бы это было не так, это означало бы, что поведение тела каким-либо образом зависит от движения и температуры в будущем. Таким образом, мы исключаем какую бы то ни было зависимость поведения материала от будущих событий. Однако поведение в прошлом может влиять на поведение материала в настоящий момент; другими словами, переменные состояния (σ^{ij}, $\mathbf{q}$, η, ψ) определяются движением и температурой вплоть до настоящего времени включительно.

Правило 2 (детерминизм). Значения переменных состояния (σ^{ij}, $\mathbf{q}$, η, ψ) *в материальной точке* $\mathbf{x}$ *тела в момент времени* t *определяются предысторией движения и температуры всех точек тела.*

Пусть $\mathbf{T}(\mathbf{x}, t) = \sigma^{ij}\mathbf{G}_i \otimes \mathbf{G}_j$ — тензор напряжений в частице $\mathbf{x}$ в момент времени t. Предположим на минуту, что уравнения состояния имеют вид

$$\begin{aligned} \mathbf{T}(\mathbf{x}, t) &= \mathfrak{T}[\mathbf{z}(\mathbf{x}', s),\ \theta(\mathbf{x}', s),\ \mathbf{x},\ t], \\ \mathbf{q}(\mathbf{x}, t) &= \mathbf{Q}[\mathbf{z}(\mathbf{x}', s),\ \theta(\mathbf{x}', s),\ \mathbf{x},\ t], \\ \eta(\mathbf{x}, t) &= \mathscr{N}[\mathbf{z}(\mathbf{x}', s)\,\theta(\mathbf{x}', s),\ \mathbf{x},\ t], \\ \psi(\mathbf{x}', t) &= \Psi[\mathbf{z}(\mathbf{x}', s),\ \theta(\mathbf{x}', s),\ \mathbf{x}',\ t], \end{aligned} \tag{14.2}$$

где $\mathfrak{T}$ и $\mathbf{Q}$ — соответственно тензорный и векторный, а $\mathscr{N}$ и Ψ — скалярные функционалы [1]) от предысторий $\mathbf{z}(\mathbf{x}', s)$, $\theta(\mathbf{x}', s)$, $\mathbf{x}' \in \mathscr{R}$, $s \leqslant t$, и обычные функции от $\mathbf{x}$ и t. В (14.2) в каждом из четырех уравнений состояния используется одна и та же совокупность независимых переменных $[\mathbf{z}(\mathbf{x}', s), \theta(\mathbf{x}', s), \mathbf{x}, t]$, для того чтобы избежать всяких предубеждений, которые мы могли приобрести, имея дело с классическими теориями. Например, закон теплопередачи Фурье утверждает, что [2]) $\mathbf{q} = K\nabla\theta$, а закон Гука устанавливает, что компоненты напряжения являются линейными комбинациями компонент деформации. В более общих теориях, включающих явления диссипации, возможны случаи, когда и напряжения и тепловой поток зависят от деформации, от θ, $\nabla\theta$ и т. д. В принципе, с помощью правила 1 о физической допустимости можно исключить зависимость $\mathbf{T}$, $\mathbf{q}$, η или ψ от некоторых

[1]) Автор понимает здесь под функционалом всякую (не обязательно вещественнозначную) функцию, областью определения которой служит множество функций. — *Прим. ред.*

[2]) Градиенты движения и температуры допускаются в качестве аргументов функционалов состояния в силу принципа локального действия, рассматриваемого в следующем пункте.

из переменных, но в качестве меры предосторожности мы всегда начинаем с предположения, что все *функционалы состояния* (или определяющие функционалы) зависят от одной и той же совокупности независимых переменных. Этот принцип называется *правилом равноприсутствия.*

Правило 3 (равноприсутствие). Любая величина, фигурирующая в качестве независимой переменной в каком-нибудь одном уравнении состояния, должна присутствовать во всех уравнениях состояния.

14.3. ЛОКАЛЬНОЕ ДЕЙСТВИЕ

Четвертое правило, иногда называемое *принципом локального действия* или *принципом окрестности*, накладывает некоторые ограничения на гладкость определяющих функционалов в окрестности материальной точки $\mathbf{x}$.

Правило 4 (локальное действие). На зависимые переменные состояния в точке $\mathbf{x}$ *несущественно влияют значения независимых переменных в материальных точках, удаленных от* $\mathbf{x}$.

Это правило имеет важное значение для конечноэлементных приложений. Предположим, что функции $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{z}(\mathbf{x}, t) - \mathbf{x}$ и $T(\mathbf{x}, t) = \theta(\mathbf{x}, t) - T_0(\mathbf{x})$ аналитичны в окрестности $\mathcal{N}(\mathbf{x}_0, r)$ частицы $\mathbf{x}_0 \in \mathcal{R}$. Тогда $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ и $T(\mathbf{x}, t)$ можно разложить вблизи $\mathbf{x}_0$ в ряды Тэйлора вида

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{u}(\mathbf{x}_0, t) + \mathbf{u}_{,i}(\mathbf{x}_0, t)(x^i - x_0^i) + \\ + \frac{1}{2}\mathbf{u}_{,ij}(\mathbf{x}_0, t)(x^i - x_0^i)(x^j - x_0^j) + \ldots, \quad (14.3)$$

$$T(\mathbf{x}, t) = T(\mathbf{x}_0, t) + T_{,i}(\mathbf{x}_0, t)(x^i - x_0^i) + \\ + \frac{1}{2}T_{,ij}(\mathbf{x}_0, t)(x^i - x_0^i)(x^j - x_0^j) + \ldots, \quad (14.4)$$

где $\mathbf{x} \in \mathcal{N}(\mathbf{x}_0, r)$. Предположим, что мы фиксировали конечное число K точек в $\mathcal{N}(\mathbf{x}_0, r)$ и обозначили их через $\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2, \ldots, \mathbf{x}^K$, причем $K \geqslant 4$. Множество $\{\mathbf{x}^N\}$ этих точек определяет множество радиус-векторов $\mathbf{d}^N = \mathbf{x}^N - \mathbf{x}_0$, исходящих из $\mathbf{x}_0$. Вводя обозначения

$$\mathbf{u}^N(t) = \mathbf{u}(\mathbf{x}^N, t), \quad (14.5)$$

$$T^N(t) = T(\mathbf{x}^N, t), \quad (14.6)$$

видим, что можно вычислить (14.3) и (14.4) в каждой точке $\mathbf{x}^N \in \mathcal{N}(\mathbf{x}_0, r)$ и получить $2K$ соотношений:

$$\mathbf{u}^N(t) = \mathbf{u}(\mathbf{x}_0, t) + \mathbf{u}_{,i}(\mathbf{x}_0, t)\,d^{Ni} + \frac{1}{2}\mathbf{u}_{,ij}(\mathbf{x}_0, t)\,d^{Ni}d^{(N)j} + \ldots, \quad (14.7)$$

$$T^N(t) = T(\mathbf{x}_0, t) + T_{,i}(\mathbf{x}_0, t)\,d^{Ni} + \frac{1}{2}T_{,ij}(\mathbf{x}_0, t)\,d^{Ni}d^{(N)j} + \ldots. \quad (14.8)$$

В свете конечноэлементных аппроксимаций ясно, что значения $\mathbf{u}^N(t)$ и $T^N(t)$ — это просто узловые перемещения и температуры в узловой точке $\mathbf{x}^N$ конечного элемента $\mathcal{N}(\mathbf{x}_0, r)$. Аксиома локального действия позволяет утверждать, что если r достаточно мало, то поля $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ и $T(\mathbf{x}, t)$ в $\mathcal{N}(\mathbf{x}_0, r)$ с достаточной степенью точности могут представляться лишь конечным числом членов рядов (14.3) и (14.4). Это означает, что для $\mathbf{x} \in \mathcal{N}(\mathbf{x}_0, r)$ поля $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ и $T(\mathbf{x}, t)$ единственным образом могут быть определены по их значениям в конечном числе точек окрестности $\mathcal{N}(\mathbf{x}_0, r)$, и именно это и является основой использования конечноэлементных аппроксимаций в механике сплошных сред. Действительно, заметим, что (14.3) можно переписать в виде

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{a}(t) + \mathbf{b}_i(t)\,x^i + \mathbf{c}_{ij}(t)\,x^i x^j + \ldots, \tag{14.9}$$

где

$$\begin{aligned}
\mathbf{a}(t) &= \mathbf{u}(\mathbf{x}_0, t) - \mathbf{u}_{,i}(\mathbf{x}_0, t)\,x_0^i + \frac{1}{2}\mathbf{u}_{,ij}(\mathbf{x}_0, t)\,x_0^i x_0^j + \ldots,\\
\mathbf{b}_i(t) &= \mathbf{u}_{,i}(\mathbf{x}_0, t) - \mathbf{u}_{,ij}(\mathbf{x}_0, t)\,x_0^j + \frac{1}{2}\mathbf{u}_{,ijk}(\mathbf{x}_0, t)\,x_0^j x_0^k + \ldots,\\
\mathbf{c}_{ij}(t) &= \frac{1}{2}\mathbf{u}_{,ij}(\mathbf{x}_0, t) - \frac{1}{6}\mathbf{u}_{,ijk}(\mathbf{x}_0, t)\,x_0^k + \frac{1}{24}\mathbf{u}_{,ijkm}(\mathbf{x}_0, t)\,x_0^k x_0^m + \ldots
\end{aligned} \tag{14.10}$$

Аналогичное соотношение можно записать для $T(\mathbf{x}, t)$ исходя из (14.4). Если в (14.9) используются, например, только два члена, то $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}_i$ можно определить из четырех условий

$$\mathbf{u}^N(t) = \mathbf{u}(\mathbf{x}^N, t) = \mathbf{a}(t) + \mathbf{b}_i(t)\,x^{Ni}, \qquad N = 1, 2, 3, 4, \tag{14.11}$$

в чем мы узнаем обычную симплексную аппроксимацию для тетраэдральной окрестности (конечного элемента).

Возвращаясь к (14.3) и (14.4), мы видим, что вследствие правила локального действия определяющие функционалы могут содержать не только предыстории движения $\mathbf{z}(\mathbf{x}, t)$ и температуры $\theta(\mathbf{x}, t)$, но и различные градиенты (производные) этих функций. Таким образом, если определяющие функционалы достаточно гладки, то их аргументами кроме движения $\mathbf{z}(\mathbf{x}, s)$ и температуры $\theta(\mathbf{x}, s)$ могут быть их градиенты

$$\begin{aligned}
&\mathbf{z}_{,i}(\mathbf{x}, s),\ \mathbf{z}_{,ij}(\mathbf{x}, s),\ \ldots,\ \mathbf{z}_{,i_1 i_2 \ldots i_r}(\mathbf{x}, s),\ \ldots,\\
&\theta_{,i}(\mathbf{x}, s),\ \theta_{,ij}(\mathbf{x}, s),\ \ldots,\ \theta_{,i_1 i_2 \ldots i_r}(\mathbf{x}, s),\ \ldots .
\end{aligned} \tag{14.12}$$

Материалы, которые характеризуются функционалами от предысторий различных градиентов высших порядков, иногда называют *непростыми материалами градиентного типа* [1]).

[1]) Трусделл и Нолл [1965, стр., 111] называют материалы свойства которых зависят от градиентов до порядка N, *материалами дифференциального типа порядка* N.

Особый интерес представляет подкласс материалов, для которых важны лишь градиенты первого порядка. Напомним, что *однородное движение* относительно начальной конфигурации C_0 — это движение вида

$$\mathbf{z}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{z}_{,i}(t)(x^i - x_0^i) + \mathbf{z}_0(t), \tag{14.13a}$$

где $\mathbf{x}_0$ — фиксированная частица в C_0, а $\mathbf{z}_0(t)$ — произвольное, не зависящее от $\mathbf{x}$ жесткое движение. Аналогично *однородная температура* — это температура вида

$$\theta(\mathbf{x}, t) = \theta_{,i}(t)(x^i - x_0^i) + \theta_0(t). \tag{14.13б}$$

В этих выражениях $\mathbf{z}_{,i}$ и $\theta_{,i}$ не зависят от $\mathbf{x}$ (т. е. $\mathbf{z}_{,i}$ и $\theta_{,i}$ зависят только от $\mathbf{x}_0$ и t). Пусть $(\mathbf{x}, t)$ и $\theta(\mathbf{x}, t)$ — движение и температура в $\mathbf{x}$, и пусть $\bar{\mathbf{z}}(\mathbf{x}, t)$ и $\bar{\theta}(\mathbf{x}, t)$ — однородные движения и температура. Для каждого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$, такое, что $\| \mathbf{z} - \bar{\mathbf{z}} \| < \varepsilon$ (и $| \theta - \bar{\theta} | < \varepsilon$) при $\| \mathbf{x} - \mathbf{x}_0 \| < \delta$, за исключением, возможно, некоторых сингулярных точек, линий или поверхностей, т. е. всегда можно выбрать окрестность $\mathbf{x}_0$, достаточно малую для того, чтобы движение и температура точек этой окрестности были как угодно близки к однородным движению и температуре. В действительности это представляет собой обоснование большинства симплексных конечноэлементных аппроксимаций, которые физически означают, что движение и температура однородны в *конечной* окрестности материальной точки. Далее, если функционалы состояния, например $\mathfrak{T}[\ ]$, достаточно гладки, так что $\| \mathfrak{T}[\mathbf{z}(\mathbf{x}', s), \theta(\mathbf{x}', s), \mathbf{x}, t] - \mathfrak{T}[\bar{\mathbf{z}}(\mathbf{x}', s), \bar{\theta}(\mathbf{x}', s), \mathbf{x}, t] \| < \varepsilon'$ для всех $\| \mathbf{z} - \bar{\mathbf{z}} \| < \varepsilon$, где $\| \ \|$ — надлежащим образом определенная норма, а $\mathbf{x}', \mathbf{x} \in \mathcal{N}(\mathbf{x}_0, \delta)$ и т. д., то в соответствии с (14.13) каждый функционал состояния можно записать как функционал от предысторий [1]) $\mathbf{z}(\mathbf{x}, t)$, $\mathbf{z}_{,i}(\mathbf{x}, t)$, $\theta(\mathbf{x}, t)$ и $\theta_{,i}(\mathbf{x}, t)$ и функцию от $\mathbf{x}$ и t. Материалы такого типа называются *простыми материалами*. Используя стандартные обозначения для предысторий [2]) движения и температуры:

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{z}^t(\mathbf{x}, s) &= \mathbf{z}(\mathbf{x}, t - s), \\ \theta^t(\mathbf{x}, s) &= \theta(\mathbf{x}, t - s), \end{aligned}\right\} \quad s \geqslant 0, \tag{14.14}$$

---

[1]) В следующем пункте мы исключим зависимость функционалов состояния от некоторых из этих переменных; см. (14.21).

[2]) См., например, Колеман [1964], Трусделл и Нолл [1965] или Трусделл [1966a] [а также Трусделл *[1972].— *Ред.*].

видим, что для простых материалов (14.2) принимает вид

$$\begin{aligned}
\mathbf{T}(\mathbf{x}, t) &= \mathfrak{T}[\mathbf{z}^t(s), \mathbf{z}^t_{,i}(s), \theta^t(s), \theta^t_{,i}(s), \mathbf{x}, t],\\
\mathbf{q}(\mathbf{x}, t) &= \mathrm{Q}[\mathbf{z}^t(s), \mathbf{z}^t_{,i}(s), \theta^t(s), \theta^t_{,i}(s), \mathbf{x}, t],\\
\eta(\mathbf{x}, t) &= \mathcal{N}[\mathbf{z}^t(s), \mathbf{z}^t_{,i}(s), \theta^t(s), \theta^t_{,i}(s), \mathbf{x}, t],\\
\psi(\mathbf{x}, t) &= \Psi[\mathbf{z}^t(s), \mathbf{z}^t_{,i}(s), \theta^t(s), \theta^t_{,i}(s), \mathbf{x}, t];
\end{aligned} \tag{14.15}$$

здесь подразумевается, что $\mathbf{z}^t(s)$, $\mathbf{z}^t_{,i}(s)$ зависят от $\mathbf{x}$; таким образом, наши предыстории в силу гипотезы локального действия зависят от $\mathbf{x}$, а не от $\mathbf{x}'$. Дальнейшие упрощения форм функционалов состояния для простых материалов рассматриваются ниже.

14.4. НЕЗАВИСИМОСТЬ ОТ СИСТЕМЫ ОТСЧЕТА И СИММЕТРИЯ

Очевидно, что поведение материала не зависит от выбора системы пространственных координат. Например, если удлинение образца материала пропорционально величине «растягивающей силы», то этот же закон пропорциональности должен быть засвидетельствован различными наблюдателями при различных движениях, использующими для исследования поведения образца различные системы отсчета.

Для того чтобы перевести это на язык математики, обозначим через $\hat{\mathbf{z}}(\mathbf{x}, \hat{t})$ и $\mathbf{z}(\mathbf{x}, t)$ две пространственные системы координат, различающиеся между собой на ортогональное преобразование $\alpha(t)$, сдвиг времени $\hat{t} = t - a$ и перенос $\mathbf{c}(t)$:

$$\hat{z}_i(\mathbf{x}, \hat{t}) = \alpha_{ij}(t) z_j(\mathbf{x}, t) + c_i(t). \tag{14.16}$$

Здесь $\alpha_{ij} = \alpha^i_j$, $\alpha_{ij}\alpha_{mj} \approx \delta_{im}$ и $\det(\alpha_{ij}) = \pm 1$. Ортогональные преобразования типа (14.16) называются *преобразованиями наблюдателя*, поскольку они устанавливают связь между движениями одной и той же материальной точки, наблюдаемыми двумя различными наблюдателями. То обстоятельство, что определяющие функционалы должны быть инвариантны относительно таких преобразований, известно как *аксиома независимости материала от системы отсчета* или *аксиома материальной объективности*; эта аксиома представляет собой важное средство, позволяющее устанавливать дополнительные ограничения на форму функционалов состояния.

Правило 5 (материальная независимость от системы отсчета). *Уравнения состояния инвариантны относительно преобразований наблюдателя.*

В соответствии с этим правилом определяющий функционал, скажем $\mathfrak{T}$ [ ] [см. (14.2)], должен быть таким, что

$$\mathfrak{T}[\mathbf{z}(\mathbf{x}', s), \theta(\mathbf{x}', s), \mathbf{x}, t] = \mathfrak{T}[\hat{\mathbf{z}}(\mathbf{x}', \hat{s}), \theta(\mathbf{x}', \hat{s}), \mathbf{x}, \hat{t}], \quad (14.17)$$

где $\hat{\mathbf{z}}(\mathbf{x}', \hat{s})$ определяется формулой (14.16) с $\hat{t}$, замененным на «прошлое время» $\hat{s}$.

Рассмотрев два частных случая преобразования наблюдателя (14.16), мы получим сейчас два важных следствия из принципа независимости материала от системы отсчета. Рассмотрим, во-первых, случай временнóго сдвига, когда $a = t$, $\alpha_{ij} = \delta_{ij}$, $c_i(s) = 0$. Тогда $\hat{\mathbf{z}}(\mathbf{x}', \hat{s}) = \mathbf{z}(\mathbf{x}', \hat{s} + t)$, $\hat{t} = t - a = 0$ и, для примера,

$$\mathbf{T} = \mathfrak{T}[\mathbf{z}(\mathbf{x}', \hat{s} + t), \theta(\mathbf{x}', \hat{s} + t), \mathbf{x}, 0]. \quad (14.18)$$

Однако можно ввести новый параметр времени $\bar{s} = t - s$, $0 \leqslant \bar{s} \leqslant \infty$, так что $\hat{s} + t = t - \bar{s}$. Тогда

$$\mathbf{T} = \mathfrak{T}[\mathbf{z}(\mathbf{x}', t - \bar{s}), \theta(\mathbf{x}', t - \bar{s}), \mathbf{x}, 0]. \quad (14.19)$$

Отсюда следует, что *определяющие функционалы не зависят от времени* и являются функционалами от предысторий $\mathbf{z}(\mathbf{x}', t - \bar{s}) = \mathbf{z}^t(\mathbf{x}', \bar{s})$ и $\theta(\mathbf{x}', t - \bar{s}) = \theta^t(\mathbf{x}', \bar{s})$. Второе следствие получается в результате рассмотрения того частного случая, когда (14.16) является жестким переносом системы координат: $\alpha_{ij} = \delta_{ij}$, $a = 0$, $\mathbf{c}(s) = -\mathbf{z}(\mathbf{x}, s)$. Тогда $\hat{\mathbf{z}}(\mathbf{x}', \hat{s}) = \mathbf{z}(\mathbf{x}', s) - \mathbf{z}(\mathbf{x}, s)$, и, учитывая, что определяющие функционалы явно не зависят от времени, а также принимая $\bar{s} = s$, получаем

$$\mathbf{T} = \mathfrak{T}[\mathbf{z}(\mathbf{x}', t - s) - \mathbf{z}(\mathbf{x}, t - s), \theta(\mathbf{x}', t - s), \mathbf{x}]. \quad (14.20)$$

Однако, согласно принципу локального действия (правило 4),

$$\mathbf{z}(\mathbf{x}', t-s) - \mathbf{z}(\mathbf{x}, t-s) = \mathbf{z}_{,i}(\mathbf{x}, t-s)(x'^i - x^i) + \frac{1}{2}\mathbf{z}_{,ij}(\mathbf{x}, t-s)(x'^i - x^i)(x'^j - x^j) + \ldots, \quad (14.20\text{а})$$

$$\theta(\mathbf{x}', t-s) = \theta(\mathbf{x}, t-s) + \theta_{,i}(\mathbf{x}, t-s)(x'^i - x^i) + \ldots. \quad (14.20\text{б})$$

Таким образом, *определяющие функционалы зависят от предысторий градиентов движения, а не от предысторий самого движения.*

Обращаясь к (14.15), мы видим, что вследствие принципа независимости материала от системы отсчета уравнения состояния для простых материалов имеют вид:

$$\begin{aligned} \mathbf{T}(\mathbf{x}, t) &= \mathfrak{T}[\mathbf{z}^t_{,i}(s), \theta^t(s), \theta^t_{,i}(s), \mathbf{x}], \\ \mathbf{q}(\mathbf{x}, t) &= \mathbf{Q}[\mathbf{z}^t_{,i}(s), \theta^t(s), \theta^t_{,i}(s), \mathbf{x}], \\ \eta(\mathbf{x}, t) &= \mathcal{N}[\mathbf{z}^t_{,i}(s), \theta^t(s), \theta^t_{,i}(s), \mathbf{x}], \\ \psi(\mathbf{x}, t) &= \Psi[\mathbf{z}^t_{,i}(s), \theta^t(s), \theta^t_{,i}(s), \mathbf{x}], \end{aligned} \quad (14.21)$$

где опять подразумевается, что предыстории зависят от $\mathbf{x}$.

Еще одно приложение правила 5 связано с рассмотрением частного случая преобразования (14.16), когда $\mathbf{c}(s) = 0$, $a = 0$, а $\boldsymbol{\alpha}^t(s) = [\alpha_{ij}(t - s)]$ произвольно (т. е. случая произвольной непрерывной предыстории жестких вращений пространственной системы координат); оно часто приводит к значительному упрощению вида определяющих функционалов. В этом случае для простых материалов

$$\mathfrak{T}_t^*[\boldsymbol{\alpha}^t(s)\,\mathbf{L}^t_{,i}(s),\ \theta^t(s),\ \boldsymbol{\alpha}^t(s)\,\theta^t_{,i}(s),\ \mathbf{x}] = \\ = \boldsymbol{\alpha}(t)\,\mathfrak{T}\,[\mathbf{z}^t_{,i}(s),\ \theta^t(s),\ \theta^t_{,i}(s),\ \mathbf{x}]\,\boldsymbol{\alpha}^T(t). \qquad (14.22)$$

Любой определяющий функционал должен иметь форму, инвариантную относительно преобразований вида (14.22).

Преобразования пространственной системы координат типа (14.16) наводят на мысль о возможности инвариантности относительно преобразований *материальных* систем отсчета. Такие преобразования имеют смысл, если мы рассматриваем материалы, обладающие некоторыми свойствами симметрии в начальной конфигурации C_0. Пусть C_0 и C_0^* — две начальные конфигурации тела, описываемые материальными координатами $\mathbf{x}$ и $\mathbf{x}^*$ соответственно. Движением тела будет тогда $\mathbf{z}(\mathbf{x}, t)$ или $\mathbf{z}(\mathbf{x}^*, t)$ в зависимости от того, какая конфигурация используется в качестве отсчетной. Если зафиксировать текущую конфигурацию, то, очевидно,

$$dz_i = \frac{\partial z_i}{\partial x^j}\,dx^j = \frac{\partial z_i}{\partial x^{*j}}\,dx^{*j}. \qquad (14.23)$$

Далее, можно найти невырожденное линейное унимодулярное преобразование $\mathbf{S}$, которое переводит C_0 в C_0^* в том смысле, что $dx^{*i} = S^i_{\cdot j}\,dx^j$ (или $d\mathbf{x}^* = \mathbf{S}\,d\mathbf{x}$). Соотношение (14.23) показывает, что градиенты деформации относительно C_0 и C_0^* связаны между собой так:

$$\frac{\partial z_i(\mathbf{x}^*, t)}{\partial x^{*j}} = \frac{\partial z_i(\mathbf{x}, t)}{\partial x^m}\,(S^m_{\cdot j})^{-1}. \qquad (14.24)$$

Если, например, $\mathbf{T} = \mathfrak{T}[\mathbf{z}^t_{,i}(\mathbf{x}, s), \mathbf{x}]$ (предыстория температуры временно для простоты опущена), то также $\mathbf{T} = \mathfrak{T}^*[\mathbf{z}^t_{,i*}(\mathbf{x}^*, s), \mathbf{x}^*]$, а это означает, что функционалы $\mathfrak{T}[\ ]$ и $\mathfrak{T}^*[\ ]$ должны удовлетворить соотношению

$$\mathfrak{T}[\mathbf{z}^t_{,i}(\mathbf{x}, s),\ \mathbf{x}] = \mathfrak{T}^*[\mathbf{z}^t_{,i}(\mathbf{x}, s)\,\mathbf{S}^{-1},\ \mathbf{S}\mathbf{x} + \mathbf{b}], \qquad (14.25)$$

где $\mathbf{b}$ указывает на возможный перенос системы $\mathbf{x}$ относительно $\mathbf{x}^*$. Теперь предположим, что свойства материала в двух различных конфигурациях C_0 и C_0^* одинаковы (плотности ρ_0 и ρ_0^* предпола-

гаются равными). Тогда, опуская перенос **b**, имеем

$$\mathfrak{T}[\mathbf{z}^t_{,i}(\mathbf{x},\ s),\ \mathbf{x}] = \mathfrak{T}[\mathbf{z}^t_{,i}(\mathbf{x},\ s)\ \mathbf{S}^{-1},\ \mathbf{Sx}], \tag{14.26}$$

где $\det \mathbf{S} = \pm 1$ (поскольку $\rho_0^*, = |\det \mathbf{S}|\,\rho_0$).

Совокупность унимодулярных отображений $\mathbf{S}^{-1}$, которые сохраняют форму функционала инвариантной, образуют *группу изотропии* определяющего функционала. Групповое свойство [1]) следует из того, что совокупность невырожденных унимодулярных преобразований $\mathbf{S}$ образует мультипликативную группу $\mathcal{G}$ относительно операции взятия композиции линейных преобразований (т. е. матричного умножения), а именно если $\mathbf{S}_1, \mathbf{S}_2, \mathbf{S}_3 \in \mathcal{G}$, то $\mathbf{S}_1\mathbf{S}_2 \in \mathcal{G}$ (ибо $\det \mathbf{S}_1\mathbf{S}_2 = \det \mathbf{S}_1 \det \mathbf{S}_2 = \pm 1$), $\mathbf{S}_1^{-1}\mathbf{S}_1 = \mathbf{I}$, $\mathbf{S}_1^{-1}, \mathbf{I} \in \mathcal{G}$ и $\mathbf{S}_1(\mathbf{S}_2\mathbf{S}_3) = (\mathbf{S}_1\mathbf{S}_2)\,\mathbf{S}_3$. Предположим, что две произвольные начальные конфигурации C_0 и C_0^* связаны между собой отображением $\mathbf{S}\colon C_0 \to C_0^*$ и функционалы реакции материала $\mathfrak{T}$ в C_0 и C_0^* суть соответственно $\mathfrak{T}[\ ]$ и $\mathfrak{T}^*[\ ]$. Предположим также, что эти функционалы имеют группы изотропии $\mathcal{G}$ и $\mathcal{G}^*$. Тогда если $\mathbf{H} \in \mathcal{G}$, то $\mathfrak{T}[\mathbf{z}^t_{,i}(\mathbf{x}, s) = \mathfrak{T}^*[\mathbf{z}^t_{,i}(\mathbf{x}, s)\,\mathbf{SHS}^{-1}]$, и это означает, что $\mathbf{SHS}^{-1} \in \mathcal{G}^*$. Две группы $\mathcal{G}$ и $\mathcal{G}^*$, связанные между собой соотношениями типа $\mathbf{SHS}^{-1} = \mathbf{H}^*$, где $\mathbf{H}^* \in \mathcal{G}^*$ и $\mathbf{S} \in \mathcal{G}$, называются *сопряженными* группами. Поскольку наши отображения взаимно однозначны и групповые свойства при таких отображениях сохраняются, группы $\mathcal{G}$ и $\mathcal{G}^*$ изоморфны. Значит, группы изотропии функционала, соответствующего любым двум связанным между собой унимодулярным преобразованием начальным конфигурациям, изоморфны. Это свойство иногда называют *материальным изоморфизмом*.

Группа $\mathcal{G}$ для данного материала является подгруппой полной группы $\mathcal{U}$ всех унимодулярных преобразований и может содержать (а может и не содержать) группу $\mathcal{O}$ ортогональных преобразований. Поведение материала можно охарактеризовать в соответствии со свойствами группы изотропии для функционалов состояния этого материала. Например, если для отсчетной конфигурации C_0 группа изотропии $\mathcal{G}$ совпадает с ортогональной группой $\mathcal{O}$ или содержит ее, то материал называется *изотропным*, а конфигурация C_0 называется *естественным* или *недеформированным состоянием*. Для изотропных материалов мы принимаем $\mathbf{S} = \boldsymbol{\alpha}$ и устанавливаем, что $\boldsymbol{\alpha}\mathfrak{T}[\mathbf{z}^t_{,i}(\mathbf{x}, s), \mathbf{x}]\,\boldsymbol{\alpha}^T = \mathfrak{T}[\boldsymbol{\alpha}\mathbf{z}^t_{,i}(\mathbf{x}, s)\,\boldsymbol{\alpha}^T, \boldsymbol{\alpha}\mathbf{x}]$.

С другой стороны, если $\mathcal{G} \subset \mathcal{O}$, то материал называется *анизотропным* в C_0. Далее, если $\mathcal{O} \supseteq \mathcal{G}$, материал называется *простым твердым телом*, а если $\mathcal{G}$ — полная унимодулярная группа, то — *простой жидкостью*. Наконец, если мы к *локальным* «тестам» типа $d\mathbf{x}^* = \mathbf{S}\,d\mathbf{x}$ присовокупим, как в (14.25), и перенос

---

[1]) См. п. 7.1.

$\mathbf{x}^* = \mathbf{S}\mathbf{x} + \mathbf{d}$, то в случае изменения $\mathfrak{T}$ [ ] вследствие наличия переноса $\mathbf{b}$ материал называется *неоднородным*. Если же $\mathfrak{T}$ [ ] не зависит от $\mathbf{b}$, то материал называется *однородным*.

Определяющие функционалы для всех идеальных материалов обладают группой изотропии некоторого определенного типа, и мы можем в качестве руководящего принципа для упрощения формы функционалов сформулировать шестое правило, называемое *принципом материальной симметрии*:

Правило 6 (материальная симметрия). *Форма уравнений состояния должна быть инвариантна относительно группы $\mathcal{G}$ унимодулярных преобразований материальной системы отсчета.*

Отметим, что если для однородных материалов мы возьмем $\mathbf{S} = \mathbf{I}$, то для любого $\mathbf{b}$ справедливо равенство $\mathfrak{T}\,[\mathbf{z}^t_{,i}(\mathbf{x}, s), \mathbf{x}] = \mathfrak{T}\,[\mathbf{z}^t_{,i}(\mathbf{x}, s), \mathbf{x} + \mathbf{b}]$, что возможно, только когда $\mathfrak{T}$ [ ] *не зависит явно от* $\mathbf{x}$. Значит, для однородных материалов можно не включать $\mathbf{x}$ в число аргументов определяющих функционалов.

Другие правила. Кроме сформулированных шести аксиом возможно установить ряд других правил, которым надлежит следовать при построении уравнений состояния. Поскольку основными являются правила 1—6, мы лишь упомянем здесь еще два других правила. Во-первых, ясно, что определяющие функционалы должны согласовываться с размерностью величин: все члены, входящие в уравнения состояния, должны иметь одинаковую размерность. Во-вторых, часто вводится «аксиома памяти» [1]), в соответствии с которой предполагается, что текущие значения переменных состояния несущественно зависят от их значений в отдаленном прошлом. Это предположение является аналогом принципа локального действия в области времени и по существу накладывает на $\mathbf{z}(\mathbf{x}, t)$ требования гладкости по переменной t. Если, например, функция $\mathbf{z}(\mathbf{x}, t)$ достаточно гладка и допускает разложение вида

$$\mathbf{z}(\mathbf{x}, \hat{t}) = \mathbf{z}(\mathbf{x}, t) + \dot{\mathbf{z}}(\mathbf{x}, t)(\hat{t} - t) + \ldots + \frac{1}{n!}\overset{n}{\mathbf{z}}(\mathbf{x}, t)(\hat{t} - t)^n + \ldots, \tag{14.27}$$

где $t_0 \leqslant \hat{t} \leqslant t$, если t_0 достаточно «далеко», так что поведение при $\hat{t} < t_0$ не влияет существенно на поведение в момент t, то определяющие функционалы можно свести к функциям от текущих скоростей $\mathbf{z}(\mathbf{x}, t)$, $\dot{\mathbf{z}}(\mathbf{x}, t)$, ..., $\mathbf{z}^n(\mathbf{x}, t)$ [и, конечно, $\theta(\mathbf{x}, t)$, $\dot{\theta}(\mathbf{x}, t)$, ...

---

[1]) Современная формулировка дана Колеманом и Ноллом [1961]. См. также Трусделл и Нолл [1965] и Колеман [1964] [и Трусделл *[1972].— *Ред.*]. Как указывает Эринген [1967, стр. 153], формально понятие затухающей наследственности было введено Странео [1925]. Мы рассмотрим это понятие позднее в п. 19.1.

. . ., $\overset{n}{\theta}(\mathbf{x}, t)]$. Такие материалы называются *материалами скоростного типа*. Для материалов скоростного типа может, однако, потребоваться необычно высокая дифференцируемость $\mathbf{z}(\mathbf{x}, t)$ и $\theta(\mathbf{x}, t)$, так что для достижения большей общности аксиому памяти лучше записывать, используя функциональную форму уравнений состояния, которая требует лишь интегрируемости функций $\mathbf{z}^t_{,j}(\mathbf{x}, s)$, $\theta^t(\mathbf{x}, s)$ и т. д.

Мы не придаем такого же значения аксиоме памяти, как сформулированным ранее шести правилам, потому что во многих случаях она очевидным образом неприменима (например, для упруго-пластических материалов). Однако это правило может быть полезным при исследовании некоторых задач термовязкоупругости; мы рассмотрим его подробнее в гл. V.

14.5. ОПРЕДЕЛЯЮЩИЕ ФУНКЦИОНАЛЫ ДЛЯ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Располагая некоторым набором определяющих функционалов, которые удовлетворяют всем основным принципам теории определяющих соотношений, можно получить представления этих функционалов, пригодные для конечноэлементных исследований. Рассмотрим, например, случай однородного простого термомеханического материала, характеризуемого уравнениями состояния вида

$$\begin{aligned} \mathbf{T}(\mathbf{x}, t) &= \mathfrak{T}[\mathbf{z}^t_{,i}(\mathbf{x}, s), \theta^t(\mathbf{x}, s), \theta^t_{,i}(\mathbf{x}, s)], \\ \mathbf{q}(\mathbf{x}, t) &= \mathbf{Q}[\mathbf{z}^t_{,i}(\mathbf{x}, s), \theta^t(\mathbf{x}, s), \theta^t_{,i}(\mathbf{x}, s)], \\ \eta(\mathbf{x}, t) &= \mathcal{N}[\mathbf{z}^t_{,i}(\mathbf{x}, s), \theta^t(\mathbf{x}, s), \theta^t_{,i}(\mathbf{x}, s)], \\ \psi(\mathbf{x}, t) &= \Psi[\mathbf{z}^t_{,i}(\mathbf{x}, s), \theta^t(\mathbf{x}, s), \theta^t_{,i}(\mathbf{x}, s)]. \end{aligned} \tag{14.28}$$

Для типичного конечного элемента e имеем:

$$\begin{aligned} z_i(\mathbf{x}, t) &= x_i + u_i^N(t)\,\psi_N(\mathbf{x}), \\ z_{i,j}(\mathbf{x}, t) &= \delta_{ij} + u_i^N(t)\,\psi_{N,j}(\mathbf{x}), \\ \theta(\mathbf{x}, t) &= T_0 + T^N(t)\,\varphi_N(\mathbf{x}), \\ \theta_{,i}(\mathbf{x}, t) &= T^N(t)\,\varphi_{N,i}(\mathbf{x}), \end{aligned} \tag{14.29}$$

где опять для простоты идентификационная метка элемента опущена и $T_0(\mathbf{x}) = T_0$ — постоянная начальная температура. Обозначая предыстории узловых перемещений и температур через

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^{N(t)}(s) &= \mathbf{u}^N(t-s), \\ T^{N(t)}(s) &= T^N(t-s), \end{aligned} \tag{14.30}$$

видим, что (14.28) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{T}(\mathbf{x},\ t) &= \hat{\mathfrak{T}}\,[\mathbf{u}^{N(t)}(s),\ T^{N(t)}(s)], \\ \mathbf{q}(\mathbf{x},\ t) &= \hat{\mathbf{Q}}\,[\mathbf{u}^{N(t)}(s),\ T^{N(t)}(s)], \\ \eta(\mathbf{x},\ t) &= \hat{\mathscr{N}}\,[\mathbf{u}^{N(t)}(s),\ T^{N(t)}(s)], \\ \psi(\mathbf{x},\ t) &= \hat{\Psi}\,[\mathbf{u}^{N(t)}(s),\ T^{N(t)}(s)], \end{aligned} \tag{14.31}$$

где

$$\hat{\mathfrak{T}}\,[\mathbf{u}^{N(t)}(s),\ T^{N(t)}(s)] = \\ = \mathfrak{T}\,[\delta_{ij} + \psi_{N,\,j}(\mathbf{x})\,u_i^{N(t)}(s),\ T_0 + \varphi_N(\mathbf{x})\,T^{N(t)}(s),\ \varphi_{N,\,i}(\mathbf{x})\,T^{N(t)}(s)],\ \ldots . \tag{14.32}$$

Таким образом, для конечных элементов зависимые переменные $\mathbf{T}$, $\mathbf{q}$, η и ψ в точке $\mathbf{x}$ внутри элемента являются функционалами от полных предысторий узловых перемещений и изменений температуры. Аналогичные заключения получаются и для более общих материалов градиентного типа. Отдельные примеры будут рассмотрены в гл. IV и V.

Глава IV

Теория упругости при конечных деформациях

15. ОСНОВЫ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

В этой главе исследуется приложение метода конечных элементов к задачам теории упругости при конечных деформациях [1]), т. е. к задачам об очень больших деформациях упругих тел, когда не накладывается никаких ограничений на порядок величин перемещений, градиентов перемещений и компонент тензора деформаций. При этом в качестве частных случаев получаются различные дискретные модели задач классической теории упругости при бесконечно малых деформациях. Однако прежде чем рассматривать свойства дискретной модели, надо охарактеризовать механические свойства материалов, которые считаются упругими.

15.1. ВВОДНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Теории, относящиеся к упругим материалам, являются старейшими теориями о поведении деформируемых тел. В 1678 г., например, Гук [1678] [2]) дал следующее описание одного класса упругих тел: «Совершенно очевидно, что Правило, или Закон, Природы для каждого упругого тела состоит в том, что возникающая в нем сила, или напряжение, стремящаяся возвратить тело в его естественное состояние, всегда пропорциональна расстоянию, или смещению, от этого естественного состояния...» Хотя мы теперь знаем, что закон пропорциональности Гука не обязателен для упругих тел (и фактически редко выполняется при конечных упругих деформациях), такие материалы тем не менее действительно обладают «естественными состояниями»; в эти состояния тела

---

[1]) С изложением теории упругости при конечных деформациях и решениями некоторых задач можно ознакомиться по книгам Грина и Зерны [1968] и Грина и Адкинса [1960].

[2]) Гук пришел к своему закону пропорциональности в 1660 г. и опубликовал его в виде анаграммы в 1676 г. Исторический обзор развития теории упругости можно найти в статье Труcделла [1952]. Эта статья была переиздана в 1966 г. (см. список литературы). Отметим также старую книгу Тодхантера и Пирсона [1893].

возвращаются после снятия внешних нагрузок по произвольной программе.

Таким образом, если мы намереваемся дать более точное описание упругих тел, то у нас имеются два напрашивающихся отличительных их признака. Во-первых, термодинамические процессы в упругих телах должны быть обратимы в том смысле, что ни в одной точке тела нет диссипации. Во-вторых, поведение упругого тела не должно зависеть от предыстории деформирования; например, напряжение в любой частице упругого тела определяется только текущей деформацией — в противном случае возвращение тела в начальное состояние различными процессами деформирования могло бы привести к различным напряжениям. В дальнейшем мы увидим, что второй отличительный признак приводит к более слабым ограничениям на определение упругих тел, чем первый.

15.2. УПРУГИЕ МАТЕРИАЛЫ

Определение упругих материалов основывается непосредственно на наблюдении, что напряжения в таких материалах зависят только от величин деформаций в текущий момент времени. *Материал называется упругим, если напряжения в нем в произвольный момент времени t зависят только от локальной деформации в этот момент времени и не зависят от предыстории деформирования.* Это означает, что уравнения состояния для упругих материалов имеют вид

$$\sigma^{ij} = \Sigma^{ij}(G_{rs}), \tag{15.1}$$

где $\Sigma^{ij}(G_{rs})$ — функция текущей деформации, характеризуемой текущим значением тензора деформации относительно некоторой фиксированной конфигурации ($G_{ij} = \delta_{ij} + 2\gamma_{ij}$). Ясно, что вместо G_{rs} в (15.1) можно использовать любую другую эквивалентную меру деформации, например γ_{ij} или $\mathbf{z}_{,i}$. Кроме того, понятно, что среди аргументов функции поведения (реакции) материала $\Sigma^{ij}(\ )$ должно присутствовать $\mathbf{x}$, чтобы можно было описывать поведение неоднородных тел. Однако для удобства мы не будем указывать явно эту зависимость.

Поскольку в определении упругих материалов термические переменные (например, θ, η, q^i) не фигурируют, теория упругости описывает только механическое поведение материалов. Следовательно, (15.1) можно назвать уравнением механического состояния. Сравнивая (15.1) с (14.21), мы замечаем, что упругие материалы образуют специальный подкласс простых материалов: (1) свойства этих материалов не зависят от температуры и ее предыстории, и (2) напряжения в них зависят лишь от «постоянных» предысторий деформирования, т. е. предысторий, при которых деформация

во все моменты в прошлом равна текущей деформации [1]). Таким образом, можно сказать, что упругие материалы образуют простой подкласс простых материалов.

Если рассмотреть (15.1) с точки зрения изложенных в § 14 аксиом состояния, то очевидно, что принципы детерминизма и локального действия соблюдены и что в данном случае принцип равноприсутствия несуществен, поскольку имеется только одно уравнение состояния. Физически допустимые процессы для некоторых упругих тел будут указаны в следующем параграфе. Имея в виду требования независимости от выбора системы координат и материальной симметрии, можно сказать, что функция реакции Σ^{ij} должна быть инвариантной относительно всех преобразований наблюдателя вида (14.16) и относительно преобразований материальной системы отсчета, принадлежащих группе изотропии материала. В частности, если все ортогональные преобразования $\alpha = [\alpha^i_{\cdot j}(t)]$ принадлежат группе изотропии упругого материала и если

$$\Sigma^{ij}(\alpha G \alpha^T) = \alpha^i_m \Sigma^{mn}(G)\, \alpha^i_n, \tag{15.2}$$

то материал изотропен. С другой стороны, при преобразовании материальных координат $\bar{x} = Sx$ должно выполняться равенство $\bar{\sigma}^{ij} = \bar{\Sigma}^{ij}(\bar{G})$, где $\bar{G} = SGS^{-1}$ и $\bar{\Sigma}^{ij}(\bar{G}) = S\Sigma^{ij}(G)\,S^{-1}$. Отметим также, что, поскольку G_{ij} безразмерно, функция $\Sigma^{ij}(G_{rs})$ должна иметь размерность напряжений.

Особый интерес представляют изотропные материалы (15.2). В этом случае σ^{ij} является изотропной функцией симметричного тензора G_{ij} и $\Sigma(G)$ можно записать в относительно простом виде. Предполагая, что функция $\Sigma(G)$ аналитична относительно G, мы можем представить ее в виде ряда по степеням G:

$$\Sigma(G) = a_0 I + a_1 G + a_2 G^2 + \ldots + a_n G^n + \ldots. \tag{15.3}$$

Здесь $a_0, a_1, \ldots, a_n$ — скалярные функции компонент G_{ij} тензора G. По теореме Кэли — Гамильтона, примененной к квадратным матрицам третьего порядка, матрица G удовлетворяет своему характеристическому уравнению:

$$G^3 = I_1 G^2 - I_2 G + I_3 1, \tag{15.4}$$

где I_1, I_2, I_3 — главные инварианты [2]) тензора G. Значит, G^3 и все более высокие степени G можно выразить через G^2, G, 1 и главные инварианты G. Таким образом, $\Sigma(G)$ является аналитической

---

[1]) Трусделл и Нолл [1965, стр. 123] показали, что теория упругости применима ко *всем* простым материалам в статике, т. е. к простым материалам в состоянии равновесия, находившимся в состоянии равновесия во все времена в прошлом.

[2]) См. (4.25).

изотропной функцией от G в том и только в том случае, когда ее можно представить в виде

$$\Sigma(\mathbf{G}) = \varkappa_0 \mathbf{1} + \varkappa_1 \mathbf{G} + \varkappa_2 \mathbf{G}^2, \tag{15.5}$$

где $\varkappa_0$, $\varkappa_1$ и $\varkappa_2$ — скалярнозначные полиномы от инвариантов I_1, I_2, I_3. Поскольку единичный тензор **1** в конвективных координатах x^i имеет компоненты G^{ij}, G_{ij} или δ^i_j, из (15.5) следует, что уравнение состояния для изотропного упругого тела может быть записано в виде

$$\begin{aligned} \sigma^{ij} &= \varkappa_0 G^{ij} + \varkappa_1 \delta^{ir}\delta^{js} G_{rs} + \varkappa_2 \delta^{ij}, \\ \sigma^i_j &= \varkappa_0 \delta^i_j + \varkappa_1 \delta^{im}\delta^{rs} G_{jr} G_{ms} + \varkappa_2 \delta^{ir} G_{rj} \end{aligned} \tag{15.6}$$

и т. д. С другой стороны, если в качестве материальных координат выбрать криволинейные координаты ξ^i в начальной конфигурации C_0, то

$$\begin{aligned} \sigma^{ij} &= \varkappa_0 G^{ij} + \varkappa_1 g^{ir} g^{js} G_{rs} + \varkappa_2 g^{ij}, \\ \sigma^i_j &= \varkappa_0 \delta^i_j + \varkappa_1 g^{im} g^{rs} G_{jr} G_{ms} + \varkappa_2 g^{ir} G_{rj}, \end{aligned} \tag{15.7}$$

где g^{ij} — контравариантный метрический тензор в C_0.

15.3. ГИПЕРУПРУГОСТЬ, ТЕРМОДИНАМИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ

Другое определение упругих материалов можно получить исходя из понятия обратимости. Рассмотрим классический пример силы $\mathbf{F}(\mathbf{x})$, действующей на частицу при движении ее из одной точки в другую. Напомним, что независимость работы W от пути, пройденного частицей, означает существование некоторой дифференцируемой функции текущего положения $W(\mathbf{x})$, называемой потенциалом, градиент которой равен силе $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \nabla W(\mathbf{x})$. Работа, совершаемая такими *консервативными* силами на замкнутом пути, равна нулю. При этом говорят, что $\mathbf{F}$ «порождается» потенциальной функцией W. В том же духе мы можем считать, что процесс деформации, описываемый, например, тензором меры деформации G_{ij} или тензором деформации γ_{ij}, представляет собой «путь», пройденный сплошным телом. При этом «силой», совершающей работу, будет, конечно, тензор напряжений σ^{ij}. Обратимость упругих деформаций и независимость от пути (от предыстории деформации) для упругих тел приводят нас к предположению о существовании некоторой дифференцируемой функции деформаций, скажем $E(\gamma_{ij})$, которая порождает напряжения. Таким образом, мы предполагаем, что существует потенциальная функция $E(\gamma_{ij})$, называемая *плотностью энергии деформации*, такая, что

$$\rho \dot{E} = \sigma^{ij} \dot{\gamma}_{ij}. \tag{15.8}$$

Тогда

$$\rho \dot{E}(\gamma_{ij}) = \rho \frac{\partial E}{\partial \gamma_{ij}} \dot{\gamma}_{ij} = \sigma^{ij} \dot{\gamma}_{ij} \tag{15.9}$$

и [1, 2]

$$\sigma^{ij} = \rho \frac{\partial E}{\partial \gamma_{ij}}. \tag{15.10}$$

Чтобы отличать упругие материалы, как они были определены в предыдущем пункте, от материалов, удовлетворяющих соотношению (15.10), последние будем называть *гиперупругими*. Таким образом, *материал называется гиперупругим, если напряжения в теле выводятся из функции энергии деформации с помощью соотношения* (15.10).

Чтобы обосновать существование потенциальной функции $E(\gamma_{ij})$ исходя из изложенных в § 12 термодинамических законов, напомним, что, согласно (12.14), (12.35) и (12.36), локальный закон сохранения энергии можно записать в одном из следующих видов:

$$\rho \dot{\varepsilon} = \sigma^{ij} \dot{\gamma}_{ij} + Q^i_{;\,i} + \rho r, \tag{15.11}$$

$$\rho \dot{\psi} = \sigma^{ij} \dot{\gamma}_{ij} - \rho \eta \dot{\theta} - \delta, \tag{15.12}$$

$$\rho \theta \dot{\eta} = Q^i_{;\,i} + \rho r + \delta. \tag{15.13}$$

Законы сохранения массы и баланса количества движения при этом локально удовлетворяются. Поскольку обратимость деформаций упругих тел предполагает равенство нулю внутренней диссипации δ, (15.11) и (15.12) можно переписать в виде

$$\rho \dot{\varepsilon} = \sigma^{ij} \dot{\gamma}_{ij} + \rho \theta \dot{\eta}, \tag{15.14}$$

$$\rho \dot{\psi} = \sigma^{ij} \dot{\gamma}_{ij} - \rho \eta \dot{\theta}. \tag{15.15}$$

Из предыдущих рассуждений ясно, что в определяющие законы упругих тел должны входить только текущие значения независимых переменных состояния, а не их предыстории. В соответствии с этим рассмотрим класс материалов, удовлетворяющих (15.14)

---

[1]) Ясно, что, взяв плотность энергии деформации в виде функции от γ_{ij}, а не G_{ij}, мы не нарушили общности, поскольку $\gamma_{ij} = (G_{ij} - \delta_{ij})/2$. Пусть, например, $E(\gamma_{ij}) = (1/2)\,\bar{E}(G_{ij})$; тогда $\rho \dot{E} = (1/2)\,\rho \dot{\bar{E}} = (1/2)\,\rho\,(\partial \bar{E}/\partial G_{rs}) \times (\partial G_{rs}/\partial \gamma_{ij})\,\dot{\gamma}_{ij}$, и вместо (15.10) мы будем иметь $\sigma^{ij} = \rho\,(\partial \bar{E}/\partial G_{ij})$.

[2]) Во избежание недоразумений необходимо иметь в виду, что при дифференцировании E по γ_{ij} все остальные компоненты, включая γ_{ji}, считаются постоянными ($i \neq j$). Следовательно, соотношение (15.10) в действительности надо было бы записать в виде $\sigma^{ij} = (1/2)\,\rho\,[(\partial E/\partial \gamma_{ij}) + (\partial E/\partial \gamma_{ji})]$. Чтобы избежать этой громоздкой записи, условимся, что во всех последующих формулах для любого тензора A_{ij} под $\partial/\partial A_{ij}$ понимается $(1/2)\,[(\partial/\partial A_{ij}) + (\partial/\partial A_{ji})]$.

и (15.15), для которых свободная энергия является дифференцируемой функцией текущих значений деформации (характеризуемой тензором деформации), температуры и градиентов температуры [1]), т. е.

$$\psi = \Psi(\gamma_{ij}, \theta, \theta_{,k}). \qquad (15.16а)$$

Согласно принципу равноприсутствия [2]), все другие определяющие функции (σ^{ij}, η, Q^i) должны быть функциями тех же самых переменных:

$$\sigma^{ij} = \hat{\Sigma}^{ij}(\gamma_{ij}, \theta, \theta_{,k}), \qquad (15.16б)$$

$$\eta = \mathscr{N}(\gamma_{ij}, \theta, \theta_{,k}), \qquad (15.16в)$$

$$Q^i = \mathscr{Q}^i(\gamma_{ij}, \theta, \theta_{,k}). \qquad (15.16г)$$

Поскольку $\psi = \varepsilon - \eta\theta$, вместо (15.16а) можно использовать внутреннюю энергию

$$\varepsilon = \Xi(\gamma_{ij}, \eta, \theta_{,k}); \qquad (15.17а)$$

тогда

$$\sigma^{ij} = \tilde{\Sigma}^{ij}(\gamma_{ij}, \eta, \theta_{,k}), \qquad (15.17б)$$

$$\theta = \Theta(\gamma_{ij}, \eta, \theta_{,k}), \qquad (15.17в)$$

$$Q^i = \tilde{\mathscr{Q}}^i(\gamma_{ij}, \eta, \theta_{,k}). \qquad (15.17г)$$

Ясно, что

$$\dot{\psi} = \frac{\partial\Psi}{\partial\gamma_{ij}}\dot{\gamma}_{ij} + \frac{\partial\Psi}{\partial\theta}\dot{\theta} + \frac{\partial\Psi}{\partial\theta_{,k}}\dot{\theta}_{,k} \qquad (15.18)$$

и

$$\dot{\varepsilon} = \frac{\partial\Xi}{\partial\gamma_{ij}}\dot{\gamma}_{ij} + \frac{\partial\Xi}{\partial\eta}\dot{\eta} + \frac{\partial\Xi}{\partial\theta_{,k}}\dot{\theta}_{,k}. \qquad (15.19)$$

Подставляя (15.18) и (15.19) в неравенство Клаузиуса — Дюгема (12.31), применяя (12.33) и (12.36) и производя перегруппировку членов, получаем

$$\left(\sigma^{ij} - \rho\frac{\partial\Psi}{\partial\gamma_{ij}}\right)\dot{\gamma}_{ij} - \rho\left(\eta + \frac{\partial\Psi}{\partial\theta}\right)\dot{\theta} - \rho\frac{\partial\Psi}{\partial\theta_{,k}}\dot{\theta}_{,k} + \frac{1}{\theta}\mathbf{q}\cdot\nabla\theta \geqslant 0, \qquad (15.20а)$$

$$\left(\sigma^{ij} - \rho\frac{\partial\Xi}{\partial\gamma_{ij}}\right)\dot{\gamma}_{ij} + \rho\left(\theta - \frac{\partial\Xi}{\partial\eta}\right)\dot{\eta} - \rho\frac{\partial\Xi}{\partial\theta_{,k}}\dot{\theta}_{,k} + \frac{1}{\theta}\mathbf{q}\cdot\nabla\theta \geqslant 0. \qquad (15.20б)$$

---

[1]) Для неоднородных и анизотропных материалов опять следует в число аргументов функции Ψ ввести $\mathbf{x}$ и, возможно, некоторые преимущественные направления $\mathbf{d}_k$. Однако для простоты записи из всех аргументов указываются лишь γ_{ij}, θ и $\theta_{,k}$, а зависимость от $\mathbf{x}$ и $\mathbf{d}_k$ подразумевается.

[2]) См. правило 3, п. 14.2.

Так как эти соотношения должны выполняться для любых $\dot{\gamma}_{ij}$, $\dot{\eta}$, $\dot{\theta}$ и $\dot{\theta}_{,k}$, мы заключаем, что

$$\sigma^{ij} = \rho \frac{\partial \Psi}{\partial \gamma_{ij}} = \rho \frac{\partial \Xi}{\partial \gamma_{ij}}, \tag{15.21а}$$

$$\eta = -\frac{\partial \Psi}{\partial \theta}, \qquad \theta = \frac{\partial \Xi}{\partial \eta}, \tag{15.21б, в}$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial \theta_{,k}} = \frac{\partial \Xi}{\partial \theta_{,k}} = 0. \tag{15.21г}$$

Равенства (15.21г) показывают, что если $\delta = 0$, то свободная энергия материалов типа (15.16) и внутренняя энергия материалов типа (15.17) не зависят от градиентов температуры $\theta_{,k}$. Ввиду (15.21а) и (15.21б) это означает, что σ^{ij}, Ξ и η тоже не зависят от $\theta_{,k}$. Значит, вместо (15.16) можно написать

$$\begin{aligned} \sigma^{ij} &= \hat{\Sigma}^{ij}(\gamma_{ij}, \theta), \\ \eta &= \mathcal{N}(\gamma_{ij}, \theta), \\ Q^i &= \mathcal{Q}^i(\gamma_{ij}, \theta, \theta_{,k}), \\ \psi &= \Psi(\gamma_{ij}, \theta), \end{aligned} \tag{15.22}$$

где

$$\hat{\Sigma}^{ij}(\gamma_{ij}, \theta) = \rho \frac{\partial \Psi}{\partial \gamma_{ij}} \quad \text{и} \quad \mathcal{N}(\gamma_{ij}, \theta) = -\frac{\partial \Psi}{\partial \theta}, \tag{15.23}$$

а вместо (15.17)

$$\begin{aligned} \sigma^{ij} &= \tilde{\Sigma}^{ij}(\gamma_{ij}, \eta), \\ \theta &= \Theta(\gamma_{ij}, \eta), \\ Q^i &= \tilde{\mathcal{Q}}^i(\gamma_{ij}, \eta, \theta_{,k}), \\ \varepsilon &= \Xi(\gamma_{ij}, \eta), \end{aligned} \tag{15.24}$$

где

$$\tilde{\Sigma}^{ij}(\gamma_{ij}, \eta) = \rho \frac{\partial \Xi}{\partial \gamma_{ij}} \quad \text{и} \quad \Theta(\gamma_{ij}, \eta) = \frac{\partial \Xi}{\partial \eta}. \tag{15.25}$$

Сравнивая (15.22) с (14.15), видим, что уравнения (15.22) описывают частный класс простых материалов, поведение которых зависит только от текущих значений γ_{ij} и θ, а не от их предысторий [1]. Материалы, описываемые уравнениями (15.24), называются *совершенными* [2] материалами.

Попытаемся определить термодинамические процессы и уравнения состояния, допускающие существование потенциальной

[1] С другой стороны, (15.22) можно считать уравнениями состояния любого простого материала в состоянии «теплового равновесия» (Трусделл и Нолл [1965, стр. 300]). См. подстрочное примечание на стр. 189.

[2] Эта терминология используется Трусделлом и Ноллом [1965, стр. 296].

функции типа использованной в (15.10). С этой целью рассмотрим сначала изотермические процессы в материалах, описываемых уравнениями (15.22). Для таких процессов температура θ постоянна, так что $\dot{\theta} = 0$ и можно написать $\psi = \Psi(\gamma_{ij})$. Тогда (15.15) и (15.21) дают

$$\rho\dot{\psi} = \sigma^{ij}\dot{\gamma}_{ij}, \qquad \sigma^{ij} = \rho\frac{\partial\Psi}{\partial\gamma_{ij}}. \tag{15.26}$$

Далее, рассмотрим иззнтропические процессы в материалах, описываемых уравнениями (15.24). Для таких процессов $\dot{\eta} = 0$ и можно записать $\varepsilon = \Xi(\gamma_{ij})$. Тогда (15.14) и (15.21) дают

$$\rho\dot{\varepsilon} = \sigma^{ij}\dot{\gamma}_{ij}, \qquad \sigma^{ij} = \rho\frac{\partial\Xi}{\partial\gamma_{ij}}. \tag{15.27}$$

Сравнивая (15.26) и (15.27) с (15.8) и (15.10), видим, что теория гиперупругости применима к изотермическим процессам в классе простых материалов, характеризуемом соотношением (15.22), и к изэнтропическим процессам в совершенных материалах. В первом случае энергия деформации ассоциируется со свободной энергией, а в последнем — с внутренней. Более общим образом предположим, что второе из уравнений (15.24) разрешимо, так что η представимо в виде функции от γ_{ij} и θ. Тогда можно исключить η из остальных уравнений состояния (15.24), так что в них будут фигурировать лишь функции от γ_{ij} и θ. Отсюда можно сделать вывод, что теория гиперупругости применима и к изотермическим, и к изэнтропическим процессам [1]) в совершенных материалах и в простых материалах класса (15.22) (или, что то же самое, к изотермическим и изэнтропическим процессам во всех простых материалах в состоянии теплового равновесия).

С точки зрения (15.21а) ничто, конечно, не мешало нам получить σ^{ij} из потенциала $\Psi(\gamma_{ij}, \theta)$ для *любых* термодинамических процессов в материалах, характеризуемых уравнениями (15.22). Однако в этом случае мы получили бы теорию *термо*упругости, поскольку напряжения зависели бы и от γ_{ij}, и от θ. Термоупругостью мы займемся в следующей главе, а здесь ограничимся рассмотрением чисто механического поведения материалов. Таким образом, в остальной части этой главы мы всеми тепловыми эффектами пренебрегаем и сосредоточиваем свое внимание на материалах, характеризуемых только одной определяющей функцией — энергией деформации $E(\gamma_{ij})$ или функцией $\Sigma^{ij}(G_{rs})$ из (15.1).

---

[1]) Рассматривая члены, входящие в уравнение энергии, можно было бы также исследовать изоэнергетические процессы ($\dot{\varepsilon} = 0$) в материалах, описываемых соотношением (15.14), для которых $\eta = \mathcal{N}(\gamma_{ij}, \varepsilon)$. В этом случае энергия деформации ассоциируется с удельной энтропией.

15.4. ПОЛНЫЕ ПОТЕНЦИАЛЫ

Заметим, что если внешние силы **F** и **S** тоже порождаются потенциальной фунцией V, например

$$V = -\int_v \rho \mathbf{F}\cdot\mathbf{u}\,dv - \int_A \mathbf{S}\cdot\mathbf{u}\,dA, \tag{15.28}$$

то можно определить полную потенциальную энергию П тела как сумму

$$\Pi = U + V, \tag{15.29}$$

где U — полная энергия деформации

$$U = \int_v \rho E(\gamma_{ij})\,dv. \tag{15.30}$$

Используя обычный прием вычисления вариаций П, соответствующих допустимым вариациям δu_i поля перемещений (т. е. вариациям, удовлетворяющим всем наложенным на деформацию кинематическим ограничениям), интегрируя по частям и учитывая (15.10), получаем следующее выражение для первой вариации полной потенциальной энергии:

$$\delta\Pi = \int_v (\sigma^{ij}_{;i} + \rho F^j)\,\delta u_j\,dv. \tag{15.31}$$

Мы знаем, что если тело находится в равновесии, то выражение, стоящее в скобках в соотношении (15.31), равно нулю. Таким образом, приходим к известному *принципу стационарности потенциальной энергии*: *из всех допустимых полей перемещений упругого тела поля, отвечающие состояниям статического равновесия, выделяются тем, что им соответствуют стационарные значения полной потенциальной энергии* ($\delta\Pi = 0$). Более того, можно показать, что если мы имеем состояние устойчивого равновесия, то П при этом принимает минимальное значение.

В более общем случае динамики консервативных систем можно расширить понятие полной энергии, включив в нее кинетическую энергию. Лагранжев потенциал L определяется формулой

$$L = \varkappa - \Pi, \tag{15.32}$$

где $\varkappa$ — кинетическая энергия, выражение которой дается формулой (12.3). *Принцип Лагранжа* (*или принцип Гамильтона для консервативных систем*) гласит, что *из всех движений, переводящих*

консервативную систему из одной конфигурации в другую за интервал времени (t_0, t_1), *происходящие в действительности выделяются тем, что они придают стационарное значение* $(\delta A = 0)$ *интегралу действия* A, *где*

$$A = \int_{t_0}^{t_1} L\,dt. \tag{15.33}$$

15.5. ФУНКЦИЯ ЭНЕРГИИ ДЕФОРМАЦИИ

Обычно предполагается, что размеры и форма упругого тела известны нам в начальной конфигурации C_0, в идеальном случае отвечающей недеформированному состоянию материала. По этой причине удобнее использовать вместо $E(\gamma_{ij})$ упругий потенциал $W(\gamma_{ij})$, отнесенный к единице объема v_0 недеформированного тела. В силу закона сохранения массы

$$W = \rho_0 E, \tag{15.34}$$

где ρ_0 — массовая плотность в C_0 $(\rho_0 = \sqrt{G}\rho)$. Следовательно, вместо (15.10) мы имеем

$$\sigma^{ij}| = \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial W}{\partial \gamma_{ij}}. \tag{15.35}$$

С другой стороны, тензор напряжений t^{ij}, определяемый формулой (5.14), можно вычислить так:

$$t^{ij} = \frac{\partial W}{\partial \gamma_{ij}}. \tag{15.36}$$

Ниже приводятся некоторые свойства и различные формы функции энергии деформации W.

Анизотропные материалы. Группы изотропии анизотропных материалов обычно подразделяются на 12 различных типов, каждый из которых определяет особый класс анизотропии. Первые 11 соответствуют 32 кристаллическим классам в соответствии с классификацией кристаллов в минералогии [1]) и принадлежат шести основным типам кристаллических систем: триклинной, моноклинной, ромбической, тетрагональной, кубической и гексагональной. Опишем вкратце эти 11 кристаллических типов [2]). Чтобы сделать это, надо перечислить правосторонние вращения $\mathbf{S}$, порождающие группы изотропии $\mathscr{G}$ для каждого типа материала, т. е. те вращения, которые, вместе с обратными к ним, дают после

---

[1]) См. Дана и Хёрлбат [1969].

[2]) Подробности можно найти у Смита и Ривлина [1958], Грина и Адкинса [1960], Трусделла и Нолла [1965] [см. также Труcделл *[1972, стр. 194]. — *Ред.*].

взятия всевозможных конечных произведений все элементы группы. Пусть $S^{n,\beta}$ обозначает правостороннее вращение на угол β $(0 < \beta < 2\pi)$ относительно оси, направленной вдоль единичного вектора $\mathbf{n}$. Тогда наши 11 кристаллических типов инвариантны относительно следующих преобразований [1]):

триклинная система:

1) $\mathbf{I}, \ -\mathbf{I}$,

моноклинная система:

2) $S^{i_3, \pi}$,

ромбическая система:

3) $S^{i_1 \pi}, \ S^{i_2, \pi}$,

тетрагональная система:

4) $S^{i_3, \pi/2}$,

5) $S^{i_3, \pi/2}, \ S^{i_1, \pi}$,

кубическая система:

6) $S^{i_1, \pi}, \ S^{i_2, \pi}, \ S^{n, 2\pi/3}$,

7) $S^{i_1, \pi/2}, \ S^{i_2, \pi/2}, \ S^{i_3, \pi/2}$,

гексагональная система:

8) $S^{i_3, 2\pi/3}$,

9) $S^{i_1, \pi}, \ S^{i_3, 2\pi/3}$,

10) $S^{i_3, \pi/3}$,

11) $S^{i_1, \pi}, \ S^{i_3, \pi/3}$.

Здесь $\mathbf{i}_i$ — ортонормальные базисные векторы, а $\mathbf{n} = (\mathbf{i}_1 + \mathbf{i}_2 + \mathbf{i}_3)/\sqrt{3}$. К этим одиннадцати можно добавить двенадцатый тип анизотропии, называемый *трансверсальной изотропией*, группа изотропии которого порождается тождественным преобразованием $\mathbf{I}$ и преобразованием $S^{i_3, \beta}$, где β — произвольный угол, заключенный между 0 и 2π. Так называемые *ортотропные* материалы относятся к типам 3, 5, 6 и 7; их группы содержат отражения относительно трех взаимно перпендикулярных плоскостей.

Чтобы продемонстрировать, как можно использовать группы изотропии для упрощения вида W, рассмотрим один пример анизотропного материала с моноклинной симметрией, для которого функция энергии деформации является полиномом относительно компонент деформации $\gamma_{11}, \gamma_{22}, \gamma_{33}, \gamma_{12}, \gamma_{13}$ и γ_{23}. Поскольку $W(\boldsymbol{\gamma}) = W(\mathbf{S}\boldsymbol{\gamma}\mathbf{S}^{-1})$ для всех $\mathbf{S}$, принадлежащих группе изотропии материала, для группы, порождаемой $S^{i_3, \pi}$, имеем

$$W(\gamma_{11}, \gamma_{22}, \gamma_{33}, \gamma_{12}, \gamma_{13}, \gamma_{23}) = W(\gamma_{11}, \gamma_{22}, \gamma_{33}, \gamma_{12}, -\gamma_{13}, -\gamma_{23}) \tag{15.37}$$

Воспользуемся известной теоремой теории групп [2]) о том, что величины $(a_i + b_i)/2$ и $(a_i b_j + a_j b_i)/2$ $(i, j = 1, 2, \ldots, n)$ образуют полиномиальный базис для полиномов, симметричных относительно переменных $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ и $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$. Положим $(a_1, a_2) = -(b_1, b_2) = (\gamma_{13}, \gamma_{23})$ и по указанной теореме получим, что в рассматриваемом примере функция W может быть пред-

[1]) См. Трусделл и Нолл [1965, стр. 83]

[2]) См. Г. Вейль [1946].

ставлена в виде полинома относительно семи величин γ_{11}, γ_{22}, γ_{33}, γ_{12}, γ_{13}^2, γ_{23}^2 и $\gamma_{13}\gamma_{23}$. Аналогичные приемы можно использовать и для других классов анизотропных материалов [1]).

Полиномиальное представление. Если предположить, что функция $W(\gamma_{ij})$ аналитична относительно своих аргументов γ_{ij}, то функцию энергии деформации можно представить в виде ряда

$$W(\gamma_{ij}) = \sum_{i=1}^{\infty} W_i(\gamma_{ij}), \tag{15.38}$$

где $W_i(\gamma_{ij})$ — однородный полином степени i относительно γ_{ij}. Соотношение (15.38) можно переписать в виде

$$W = W_0 + E^{ij}\gamma_{ij} + \frac{1}{2} E^{ijmn}\gamma_{ij}\gamma_{mn} + \frac{1}{3} E^{ijmnrs}\gamma_{ij}\gamma_{mn}\gamma_{rs} + \ldots, \tag{15.39}$$

где W_0 — произвольная постоянная, а E^{ij}, E^{ijmn}, E^{ijmnrs}, ... называются *коэффициентами упругости* порядка 0, 1, 2, ... соответственно. Для однородных тел коэффициенты упругости представляют собой характеризующие материал постоянные. Поскольку оба тензора σ^{ij} (или t^{ij}) и γ_{ij} симметричны, коэффициенты упругости всех порядков тоже симметричны по индексам из каждой последовательной пары индексов:

$$\begin{gathered} E^{ij} = E^{ji}, \\ E^{ijmn} = E^{jimn} = E^{ijnm} = E^{mnij}, \\ E^{ijmnrs} = E^{jimnrs} = E^{ijnmrs} = E^{ijmnsr} = E^{ijsrmn} = E^{mnrsij} = E^{rsijmn}, \ \ldots . \end{gathered} \tag{15.40}$$

Из (15.36) следует, что для этого класса гиперупругих материалов

$$t^{ij} = E^{ij} + E^{ijmn}\gamma_{mn} + E^{ijmnrs}\gamma_{mn}\gamma_{rs} + \ldots . \tag{15.41}$$

Ясно, что при $\gamma_{mn} = 0$ будет $t^{ij} = E^{ij}$. Следовательно, E^{ij} суть «начальные напряжения» в начальной конфигурации C_0. Если конфигурация C_0 выбрана так, что она соответствует естественному ненапряженному состоянию, то можно положить $E^{ij} = 0$. Тогда, опуская несущественную постоянную W_0, (15.39) можно записать в виде

$$W = \frac{1}{2} E^{ijmn}\gamma_{ij}\gamma_{mn} + \frac{1}{3} E^{ijmnrs}\gamma_{ij}\gamma_{mn}\gamma_{rs} + \ldots . \tag{15.42}$$

Сохраняя только конечное число членов в представлении (15.42), можно получить различные приближенные теории гиперупругости. Например, кладя в основу предположение, что деформации γ_{ij} «малы», можно получить функцию энергии деформации для классической теории упругости при малых деформациях, если сохранить

---

[1]) Полный перечень инвариантов полиномиальных разложений W для различных групп изотропии приведен Смитом и Ривлином [1958].

в (15.42) один первый член[1]):

$$W = \frac{1}{2} E^{ijmn} \gamma_{ij} \gamma_{mn}. \tag{15.43а}$$

В этом случае

$$t^{ij} = E^{ijmn} \gamma_{mn}. \tag{15.43б}$$

Хотя компоненты деформации γ_{ij} в (15.43) и предполагаются бесконечно малыми, эти соотношения могут и не привести к линейной теории, поскольку γ_{ij} могут нелинейно зависеть от градиентов перемещений $u_{i,j}$. Функция энергии деформации для классической линейной теории упругости получается из (15.43) при предположении, что, кроме γ_{ij}, и вращения ω_{ij} (а значит, и $u_{i,j}$) бесконечно малы. При этом $\gamma_{ij} = e_{ij}$, где e_{ij} — тензор бесконечно малых деформаций, определенный формулой (4.18а), и

$$W = \frac{1}{2} E^{ijmn} e_{ij} e_{mn}, \qquad t^{ij} = E^{ijmn} e_{mn}. \tag{15.44а,б}$$

Материалы, подчиняющиеся закону (15.43б) или (15.44б), называются *гуковыми*.

Теория гиперупругости *второго порядка* получается из (15.42) при сохранении членов, содержащих коэффициенты упругости до второго порядка включительно:

$$W = \frac{1}{2} E^{ijmn} \gamma_{ij} \gamma_{mn} + \frac{1}{3} E^{ijmnrs} \gamma_{ij} \gamma_{mn} \gamma_{rs}, \tag{15.45а}$$

$$t^{ij} = E^{ijmn} \gamma_{mn} + E^{ijmnrs} \gamma_{mn} \gamma_{rs}. \tag{15.45б}$$

Аналогичным образом, сохраняя дополнительные члены в выражении (15.42), можно получить различные теории более высоких порядков.

Из рассмотрения (15.41), (15.43б) и (15.45б) видно, что приближенные теории упругости можно получать, просто разлагая функцию реакции материала $\Sigma^{ij}(G_{rs}) = \Sigma^{ij}(\delta_{rs} + 2\gamma_{rs})$ по степеням G_{rs} или γ_{rs}. Такие разложения по форме совпадают с приведенными выше выражениями для t^{ij}. Однако соответствующие коэффициенты упругости иногда могут и не совпадать. Более подробно это обстоятельство будет рассмотрено в конце параграфа.

Изотропные материалы. Поскольку группой изотропии для изотропных гиперупругих материалов является полная ортогональная группа, имеем $W(\gamma_{ij}) = W(\alpha_i^m \gamma_{mn} \alpha_j^n)$. Можно показать, что W в этом случае является функцией главных инвариантов γ_{ij}, или, что более удобно, главных инвариантов G_{ij}:

$$W = W(I_1, I_2, I_3), \tag{15.46}$$

[1]) Понятно, что функция, определяемая формулой (15.43а), отличается от функции (15.42). Однако в обоих случаях удобно обозначать ее одинаково. Обозначение W используется для различных форм энергии деформации и в последующем, если это не может вызвать недоразумений.

где I_1, I_2 и I_3 определены соотношениями (4.25). Для материалов с функцией энергии деформации такого типа

$$t^{ij}=\frac{\partial W}{\partial I_1}\frac{\partial I_1}{\partial\gamma_{ij}}+\frac{\partial W}{\partial I_2}\frac{\partial I_2}{\partial\gamma_{ij}}+\frac{\partial W}{\partial I_3}\frac{\partial I_3}{\partial\gamma_{ij}}, \tag{15.47}$$

или, с учетом (4.28),

$$t^{ij}=2\frac{\partial W}{\partial I_1}\delta^{ij}+4\frac{\partial W}{\partial I_2}[\delta^{ij}(1+\gamma_{rr})-\delta^{ir}\delta^{js}\gamma_{sr}]+$$
$$+2\frac{\partial W}{\partial I_3}[\delta^{ij}(1+2\gamma_{rr})-2\delta^{ir}\delta^{js}\gamma_{sr}+2\varepsilon^{imn}\varepsilon^{jrs}\gamma_{mr}\gamma_{ns}]. \tag{15.48}$$

Для получения приближенных форм W опять естественно рассмотреть разложение по степеням инвариантов

$$W=\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}\sum_{t=0}^{\infty}C_{rst}(I_1-3)^r(I_2-3)^s(I_3-1)^t,\qquad C_{000}=0. \tag{15.49}$$

Оставляя, например, только линейные относительно инвариантов члены, получим аппроксимацию

$$W=C_{100}(I_1-3)+C_{010}(I_2-3)+C_{001}(I_3-1). \tag{15.50}$$

Другая полиномиальная аппроксимация была предложена Каваной [1969] [1]), предположившим, что

$$W=A_1K_1^2+A_2K_2+A_3K_1^3+A_4K_1K_2+A_5K_3+$$
$$+A_6K_1^4+A_7K_1^2K_2+A_8K_1K_3+A_9K_2^2, \tag{15.51}$$

где $A_1, \ldots, A_9$ — постоянные материала, а K_1, K_2 и K_3 — инварианты тензора деформации:

$$K_1=\gamma_{rr},\qquad K_2=\gamma_{rs}\gamma_{rs},\qquad K_3=\gamma_{ij}\gamma_{ir}\gamma_{jr}. \tag{15.52}$$

Таким образом, (15.51) содержит члены до четвертого порядка включительно относительно компонент деформации. С другой стороны, I_1, I_2 и I_3 с помощью (4.26) можно выразить через компоненты деформации и найти выражения коэффициентов C_{rst} через коэффициенты упругости, входящие в (15.42). Для изотропных материалов число независимых коэффициентов упругости E^{ijmn}, E^{ijmnrs}, ... минимально. Например, коэффициенты упругости первого порядка выражаются только через два коэффициента Ламе λ и μ по формуле

$$E^{ijmn}=\lambda\delta^{ij}\delta^{mn}+\mu(\delta^{im}\delta^{jn}+\delta^{in}\delta^{jm}), \tag{15.53}$$

а коэффициенты упругости второго порядка изотропных упругих материалов определяются формулой

$$E^{ijmnrs}=E_1\delta^{ij}\delta^{mn}\delta^{rs}+E_2(\delta^{ij}\delta^{mn}\delta^{rs}-\delta^{ij}\delta^{ms}\delta^{nr})+$$
$$+E_3\delta^{im}\delta^{jn}\delta^{rs}+E_4\delta^{im}\delta^{sn}\delta^{rj}. \tag{15.54}$$

---

[1]) В этой работе приводятся значения постоянных $A_1, \ldots, A_9$, полученные из экспериментов на пористом полиуретане.

Здесь E_1, E_2, E_3 и E_4 — *модули упругости второго порядка* [1]) изотропных упругих материалов. Можно показать, что для изотропных гиперупругих тел $E_2 + E_3 = 2(\lambda - \mu)$, т. е. существует только три независимых модуля упругости второго порядка.

Несжимаемые тела. Известно, что многие упругие при конечных деформациях материалы деформируются без заметного изменения объема. Такие материалы относятся к несжимаемым упругим материалам. Практически все решения задач теории упругости при конечных деформациях получены именно для таких материалов. Кроме того что все движения несжимаемых материалов происходят без изменения объема, их характерной особенностью является то, что *тензор напряжений не полностью определяется деформацией*. Действительно, ясно, что к напряжениям в деформированном несжимаемом материале можно добавить с любым множителем напряжения, которые обычно связаны с изменением объема, т. е. произвольное гидростатическое давление. При этом деформация тела не изменяется. Другими словами, дополнительное приложение гидростатического давления к несжимаемому упругому телу изменяет напряжения в нем, но не влияет на деформации или, для гиперупругих материалов, энергию деформации. Поскольку изохорическим движениям соответствует равенство единице третьего главного инварианта I_3, уравнение состояния для несжимаемых материалов имеет вид

$$\sigma^{ij} = \overline{\Sigma}^{ij}(G_{rs}) + hG^{ij}, \tag{15.55}$$

где h — гидростатическое давление, а G_{rs} должны быть такими, чтобы удовлетворялось *условие несжимаемости*

$$I_3 = 1. \tag{15.56}$$

Для гиперупругих материалов (15.56) можно считать ограничительным условием. Вводя в этом случае

$$\overline{W} = W(\gamma_{ij}) + \lambda(I_3 - 1), \tag{15.57}$$

где λ — множитель Лагранжа, имеем вместо (15.36)

$$t^{ij} = \frac{\partial W}{\partial \gamma_{ij}} + \lambda \frac{\partial I_3}{\partial \gamma_{ij}} = \frac{\partial W}{\partial \gamma_{ij}} + hG^{ij}. \tag{15.58}$$

Здесь 2λ приравнено гидростатическому давлению h, а γ_{ij} удовлетворяет условию (15.56).

---

[1]) Для таких материалов, как железо и медь, коэффициенты второго порядка экспериментально определены Сигером и Баком [1960]. См. также Сигер [1964]. Теории третьего порядка исследовались Джоном [1958] и другими. Краткий обзор вопроса дан Трусделлом и Ноллом [1965, стр. 230]. См. также Сакади [1949] и Шенг [1955].

Вследствие (15.56) функция энергии деформации для изотропных несжимаемых гиперупругих тел является функцией только первых двух главных инвариантов:

$$W = W(I_1, I_2). \tag{15.59}$$

Поэтому соотношения (15.47) — (15.48) принимают вид

$$\begin{aligned} t^{ij} &= \frac{\partial W}{\partial I_1}\frac{\partial I_1}{\partial \gamma_{ij}} + \frac{\partial W}{\partial I_2}\frac{\partial I_2}{\partial \gamma_{ij}} + h\,\frac{\partial I_3}{\partial \gamma_{ij}} = \\ &= 2\,\frac{\partial W}{\partial I_1}\delta^{ij} + 4\,\frac{\partial W}{\partial I_2}\left[\delta^{ij}(1+\gamma_{rr}) - \delta^{ir}\delta^{js}\gamma_{sr}\right] + \\ &\qquad + 2h\left[\delta^{ij}(1+2\gamma_{rr}) - 2\delta^{ir}\delta^{js}\gamma_{sr} + 2\varepsilon^{imn}\varepsilon^{jrs}\gamma_{mr}\gamma_{ns}\right]. \end{aligned} \tag{15.60}$$

Для различных материалов предложен ряд аппроксимаций функции $W(I_1, I_2)$. Полиномиальные аппроксимации в общем случае можно записать в виде

$$W = \sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty} C_{rs}(I_1-3)^r(I_2-3)^s, \qquad C_{00}=0. \tag{15.61}$$

Известный и наиболее часто используемый случай полиномиальной аппроксимации (15.61), характеризующий *материал Муни* [1]) (Муни [1940]), получается при сохранении лишь линейных относительно I_1 и I_2 членов:

$$W = C_1(I_1 - 3) + C_2(I_2 - 3). \tag{15.62}$$

Здесь $C_1 = C_{10}$, $C_2 = C_{01}$. Обнаружено, что этот закон Муни позволяет удовлетворительно описывать деформации некоторых натуральных и вулканизированных резин в довольно широком диапазоне. Однако эксперименты на натуральных резинах при деформациях, превышающих $450 \div 500$ процентов, указывают на отклонения от закона Муни.

Используя гауссовскую кинетическую теорию для резиноподобных материалов, Трилор [1958] пришел к так называемой неогуковой форме

$$W = C(I_1 - 3). \tag{15.63}$$

Однако, за исключением некоторых вулканизированных резин с органическими наполнителями, (15.63) приводит к результатам, лишь весьма грубо согласующимся с экспериментальными.

Основываясь на результатах многочисленных экспериментов на резинах, Ривлин и Саундерс [1951] предложили в качестве более общей формы функции энергии деформации

$$W = C_1(I_1 - 3) + F(I_2 - 3), \tag{15.64}$$

[1]) Используя закон Муни, Ривлин [1949а, 1949б] решил целый ряд задач. По этой причине функцию (15.62) иногда называют функцией энергии деформации *материала Муни — Ривлина*. См. также Ривлин [1948а, 1948б].

где вид функции $F(I_2 - 3)$ может быть различным для разных типов материалов. Для $F(I_2 - 3)$ подыскивались различные полиномиальные аппроксимации. Клоснер и Сегал [1969], например, предположили, что $F(I_2 - 3)$ есть кубический полином относительно $(I_2 - 3)$ [1]):

$$W = C_1(I_1 - 3) + C_2(I_2 - 3) + C_3(I_2 - 3)^2 + C_4(I_2 - 3)^3. \quad (15.65)$$

Однако не все предлагавшиеся полиномиальные аппроксимации для W имеют вид (15.64). Можно, например, рассмотреть квадратичную относительно $(I_1 - 3)$ функцию [2]):

$$W = C_1(I_1 - 3) + B_1(I_1 - 3)^2 + C_2(I_2 - 3). \quad (15.66)$$

А вот форма функции энергии деформации для резин, наполненных серой, предложенная Бидерманом [1958] [3]):

$$W = C_1(I_1 - 3) + B_1(I_1 - 3)^2 + B_2(I_1 - 3)^3 + C_2(I_2 - 3). \quad (15.67)$$

Не во всех предлагавшихся для W формах функция $F(I_2 - 3)$ в (15.64) берется в виде полинома по $I_2 - 3$. Используя негауссовскую молекулярную теорию [4]), Джент и Томас [1958] пришли к предположению, что $\partial F(I_2 - 3)/\partial I_2 = C/I_2$, где C — постоянная материала. Харт-Смит [1966] [5]) подробно рассмотрел эту теорию и предложил экспоненциально-гиперболический закон:

$$W = C\left(\int e^{k_1(I_1-3)^2}\,dI_1 + k_2 \ln \frac{I_2}{3}\right). \quad (15.68)$$

Александером [1968] предложены такие формы:

$$W = C_1(I_1 - 3) + C_2(I_2 - 3) + C_3 \ln \frac{I_2 - 3 + k}{k} \quad (15.69)$$

и

$$W = C_1 \int e^{k(I_1-3)^2}\,dI_1 + C_2(I_2 - 3) + C_3 \ln \frac{I_2 - 3 + k_1}{k_1}, \quad (15.70)$$

---

[1]) Такая аппроксимация хорошо согласуется с результатами экспериментов для натуральных резин при I_1, $I_2 < 8$.

[2]) Такая форма для W была предложена Исихарой, Хасицумэ и Татибаной [1951], которые получили ее, используя негауссовскую молекулярную теорию для резин. Александер [1968] показал, что она дает не очень хорошие результаты при некоторых испытаниях на одноосное растяжение. Другая «трехконстантная» теория была предложена Синьорини [1955].

[3]) Хотя по некоторым сообщениям форма (15.67) прекрасно согласуется с одноосными экспериментами, она, как заметил Александер [1968], плохо согласуется с двухосными экспериментами Трилора [1944].

[4]) Томас [1955].

[5]) См. также Харт-Смит и Крисп [1967]

где C_1, C_2, C_3, k и k_1 — постоянные материала. Соотношение (15.69) соответствует форме Ривлина — Саундерса (15.64), а (15.70) объединяет в себе характерные черты форм (15.64) и (15.68) и хорошо согласуется с экспериментами на хлоропреновом каучуке.

В качестве последнего примера упомянем функцию энергии деформации для силиконового каучука, предложенную Хатчинсоном, Беккером и Лэнделом [1965] [1]):

$$W = C_1(I_1 - 3) + B_1(I_1 - 3)^2 + B_2(1 - e^{k_1(I_2-3)}) + B_3(1 - e^{k_2(I_2-3)}). \tag{15.71}$$

Эта форма W приводит к результатам, хорошо согласующимся с данными как одноосных, так и двухосных испытаний.

Условия интегрируемости. Не каждый упругий материал является гиперупругим. Действительно, все что нужно для того, чтобы материал можно было назвать упругим,— это чтобы его определяющее уравнение согласовывалось с изложенными в § 14 принципами и определяло тензор напряжения в виде функции текущих значений G_{ij} (или γ_{ij}). Для того же, чтобы упругий материал был гиперупругим, необходимо выполнение равенства

$$\sqrt{G}\,\Sigma^{ij}(G_{rs}) = \frac{\partial W}{\partial \gamma_{ij}}, \tag{15.72}$$

где $\Sigma^{ij}(G_{rs})$ — функция реакции, определенная формулой (15.1) Таким образом, (15.72) можно рассматривать как систему дифференциальных уравнений в частных производных для функции энергии деформации W. Если эти уравнения интегрируемы, то упругий материал, характеризуемый функцией $\Sigma^{ij}(G_{rs})$, будет и гиперупругим.

Рассмотрим, например, изотропный упругий материал, определяющее уравнение которого имеет вид (15.6). В этом случае мы требуем, чтобы

$$\hat{\varkappa}_0 G^{ij} + \hat{\varkappa}_1 \delta^{in}\delta^{jm} G_{nm} + \hat{\varkappa}_2 \delta^{ij} = \frac{\partial W}{\partial I_1}\frac{\partial I_1}{\partial \gamma_{ij}} + \frac{\partial W}{\partial I_2}\frac{\partial I_2}{\partial \gamma_{ij}} + \frac{\partial W}{\partial I_3}\frac{\partial I_3}{\partial \gamma_{ij}}, \tag{15.73}$$

где $\hat{\varkappa}_\alpha = \sqrt{G}\,\varkappa_\alpha$, $\alpha = 0, 1, 2$, так что $\hat{\varkappa}_\alpha$ — функции главных инвариантов I_1, I_2, I_3. С учетом (4.16) и (4.28)

$$\hat{\varkappa}_0 = 2I_3\frac{\partial W}{\partial I_3}, \qquad \hat{\varkappa}_1 = -2\frac{\partial W}{\partial I_2}, \qquad \hat{\varkappa}_2 = 2\frac{\partial W}{\partial I_1} + 2I_1\frac{\partial W}{\partial I_2}. \tag{15.74}$$

Эти равенства можно рассматривать как систему дифференциальных уравнений в частных производных для функции энергии

[1]) См. также Сан Мигель [1965].

деформации W. Условия ее интегрируемости таковы:

$$\begin{gathered}\frac{\partial \hat{\varkappa}_0}{\partial I_2}+I_3\frac{\partial \hat{\varkappa}_1}{\partial I_3}=0,\\ I_3\frac{\partial \hat{\varkappa}_2}{\partial I_3}-\frac{\partial \hat{\varkappa}_0}{\partial I_1}-I_1\frac{\partial \hat{\varkappa}_0}{\partial I_2}=0,\\ \frac{\partial \hat{\varkappa}_2}{\partial I_2}+\frac{\partial \hat{\varkappa}_1}{\partial I_1}+I_1\frac{\partial \hat{\varkappa}_1}{\partial I_2}=0.\end{gathered} \tag{15.75}$$

Соотношения (15.75) являются необходимыми и достаточными условиями того, чтобы изотропный упругий материал был и гиперупругим. Аналогично, хотя и несколько сложнее, можно получить условия интегрируемости для анизотропных упругих материалов [1]). Поскольку невыполнение их означает возможность диссипации энергии в упругих телах, в большинстве последующих рассмотрений будет предполагаться, что условия интегрируемости удовлетворены.

16. КОНЕЧНЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ УПРУГИХ ТЕЛ

Вследствие существенно нелинейного характера уравнений теории упругости при конечных деформациях количественные решения почти всех задач, имеющих практическое значение, получаются лишь численно. Метод конечных элементов благодаря его простоте и общности является наиболее удобным способом формулировки нелинейных задач теории упругости для их численного решения [2]). В этом параграфе будут получены общие уравнения движения и равновесия для типичных конечных элементов упругих тел.

16.1. НЕЛИНЕЙНЫЕ ЖЕСТКОСТНЫЕ СООТНОШЕНИЯ

Напомним (см. (13.60)), что общее уравнение движения типичного конечного элемента сплошной среды имеет вид

$$m_{NM}\ddot{u}_i^M+\int\limits_{v_{0(e)}} t^{kj}\psi_{N,\,j}\,(\delta_{ki}+\psi_{M,\,k}u_i^M)\,dv_0=p_{Ni} \tag{16.1}$$

---

[1]) См. Трусделл и Нолл [1965, стр. 302].

[2]) Конечноэлементные постановки задач нелинейной теории упругости при конечных деформациях были даны Оденом [1967б]. Приложения к задачам о плоском напряженном состоянии рассматривали Оден [1966а], Беккер [1966], Питерсон, Кэмпбелл и Геррманн [1966], Оден и Сато [1967а, 1967б], а также Оден и Кубица [1967]. Задачи о конечной плоской деформации решал методом конечных элементов Оден [1968б], а приложениями к случаю трехмерных тел и в частности тел вращения занимались Оден и Ки [1970, 1971а]. См. также Немат-Нассер и Шатов [1970] и Хофмайстер, Гринбаум и Ивенсен [1970]. Кавана [1969] использовал этот метод в связи с экспериментальными работами по теории упругости при конечных деформациях. Имеется обзор Одена [1969в], содержащий ссылки на работы по родственным вопросам. Хотя часть представленного далее материала основана на упомянутых работах, этот материал излагается здесь в несколько большей общности.

(идентификационная метка элемента e для удобства опущена). Здесь m_{NM} — согласованная матрица масс, определяемая формулой (13.37), p_{Ni} — обобщенные узловые силы, задаваемые формулой (13.54), а $\psi_{N,j} = \partial\psi_N(\mathbf{x})/\partial x^j$ — градиенты локальных интерполяционных функций $\psi_N(\mathbf{x})$. Поскольку для упругих материалов t^{kj} определяется соотношением (15.1) (напомним, что $t^{kj} = \sqrt{G}\sigma^{kj}$), уравнения движения упругого конечного элемента таковы:

$$m_{NM}\ddot{u}_i^M + \int_{v_{0(e)}} \sqrt{G}\,\bar{\bar{\Sigma}}^{kj}(u_s^R)\,\psi_{N,j}(\delta_{ki} + \psi_{M,k}u_i^M)\,dv_0 = p_{Ni}, \tag{16.2}$$

где в соответствии с (15.1) $\Sigma^{kj}[G_{mn}^{(e)}(u_s^R)] = \bar{\bar{\Sigma}}^{kj}(u_s^R)$. Для гиперупругих конечных элементов, используя (15.36), можно записать

$$m_{NM}\ddot{u}_i^M + \int_{v_{0(e)}} \frac{\partial W}{\partial \gamma_{kj}}\,\psi_{N,j}(\delta_{ki} + \psi_{M,k}u_i^M)\,dv_0 = p_{Ni}. \tag{16.3}$$

В этих уравнениях N, M, $R = 1, 2, \ldots, N_e$, где N_e — общее число узловых точек элемента e, а $i, j, k, m, n, s = 1, 2, 3$.

При статическом (или квазистатическом) поведении упругих тел можно опустить инерционные члены $m_{NM}\ddot{u}_i^M$ в (16.2) и (16.3), что дает нам уравнения равновесия типичного конечного элемента в виде

$$\int_{v_{0(e)}} \frac{\partial W}{\partial \gamma_{kj}}\,\psi_{N,j}(\delta_{ki} + \psi_{M,k}u_i^M)\,dv_0 = p_{Ni}. \tag{16.4}$$

Коэффициенты при узловых перемещениях в (16.4) называются *жесткостями*, а соотношение (16.4) — *нелинейным жесткостным соотношением*. Если элемент упругий, но не гиперупругий, то в (16.4) просто следует заменить $\partial W/\partial\gamma_{ij}$ на $\sqrt{G}\,\bar{\bar{\Sigma}}^{kj}(u_s^R)$. Подставляя в соотношение (16.4) соответствующие выражения для W, например рассмотренные в п. 15.5, можно найти специальный вид, который принимает это соотношение для различных типов гиперупругих конечных элементов.

Приведем несколько примеров.

1. *Аналитическая функция* $W(\gamma_{ij})$. Аналитическая функция энергии деформации задается формулой (15.38). Уравнение (16.4) принимает вид

$$\sum_{r=1}^{\infty} \int_{v_{0(e)}} \frac{\partial W_r}{\partial \gamma_{kj}}\,\psi_{N,j}(\delta_{ki} + \psi_{M,k}u_i^M)\,dv_0 = p_{Ni}. \tag{16.5}$$

2. *Сжимаемые анизотропные тела.* Функция W имеет вид (15.42). В этом случае

$$\int\limits_{v_{0(e)}} (E^{kjmn}\gamma_{mn} + E^{kjmnrs}\gamma_{mn}\gamma_{rs} + \ldots)\,\psi_{N,\,j} \times$$

$$\times (\delta_{ki} + \psi_{M,\,k}u_i^M)\,dv_0 = p_{Ni}. \qquad (16.6)$$

Здесь E^{kjmn}, E^{kjmnrs}, ... обладают свойствами симметрии (15.40), и в соответствии с (13.22) для конечного элемента

$$2\gamma_{mn} = \psi_{N,\,m}u_n^N + \psi_{N,\,n}u_m^N + \psi_{N,\,m}\psi_{M,\,n}u_k^N u_k^M. \qquad (16.7)$$

3. *Теория упругости второго порядка.* Функция $W(\gamma_{ij})$ определяется формулой (15.45а). В уравнении (16.6) сохраняются только коэффициенты упругости второго порядка.

4. *Большие повороты, бесконечно малые деформации.* В этом случае $W(\gamma_{ij})$ задается формулой (15.43а), а γ_{ij} — формулой (16.7), причем считается, что величины γ_{ij} «малы». В результате мы приходим к таким нелинейным жесткостным соотношениям для гуковых материалов:

$$\int\limits_{v_{0(e)}} E^{kjmn}\psi_{R,\,m}u_s^R\left(\delta_{sn} + \frac{1}{2}\,\psi_{S,\,n}u_s^S\right)\psi_{N,\,j}(\delta_{ki} + \psi_{M,\,k}u_i^M)\,dv_0 = p_{Ni}, \qquad (16.8)$$

где $M, N, R, S = 1, 2, \ldots, N_e$, а $i, j, k, m, n, s = 1, 2, 3$. Если ввести обозначения

$$a_{sn} = \left(\delta_{sn} + \frac{1}{2}\,\psi_{S,\,n}u_s^S\right), \quad \bar{b}_{ki} = z_{i,\,k} = (\delta_{ki} + \psi_{M,\,k}u_i^M), \qquad (16.9)$$

то соотношение (16.8) можно записать более компактно:

$$\int\limits_{v_{0(e)}} E^{kjmn}\psi_{R,\,m}\psi_{N,\,j}\bar{a}_{sn}\bar{b}_{ki}\,dv_0 u_s^R = p_{Ni}. \qquad (16.10)$$

5. *Классическая теория упругости при малых деформациях.* В этом случае W определяется выражением (15.44а), и для конечного элемента имеем

$$2e_{ij} = \psi_{N,\,i}u_j^N + \psi_{N,\,j}u_i^N. \qquad (16.11)$$

Градиенты перемещений $\psi_{N,\,i}u_j^N$ считаются бесконечно малыми. Тогда $\bar{a}_{ij} = \bar{b}_{ij} = \delta_{ij}$, и (16.10) сводится к линейному жесткостному соотношению:

$$\int\limits_{v_{0(e)}} E^{ijmn}\psi_{M,\,m}\psi_{N,\,j}\,dv_0 u_n^M = p_{Ni}. \qquad (16.12)$$

Вводя обозначение

$$k_{NM}^{in} = \int\limits_{v_{0(e)}} E^{ijmn} \psi_{M,\,m} \psi_{N,\,j}\, dv_0, \tag{16.13}$$

соотношение (16.12) можно записать в виде

$$k_{NM}^{in} u_n^M = p_{Ni}, \tag{16.14}$$

где компоненты p_{Ni} векторов $\mathbf{p}_N^{(e)}$ теперь не зависят от u_i^N. Массив k_{NM}^{in} представляет собой хорошо известную матрицу жесткости для линейно-упругих материалов. Сравнивая (16.13) с (16.8), получаем интересную интерпретацию введенных выше функций $\bar{a}_{sn}$ и $\bar{b}_{ki}$ (см. (16.9)). На основании (16.12) член E^{kjmn} можно рассматривать как «матрицу жесткости» единичного куба упругого материала. Остальные члены осуществляют линейное преобразование этой матрицы в матрицу, связанную со всем конечным элементом. В линейной теории эти преобразования осуществляются членами $\psi_{M,\,m}$ и $\psi_{N,\,j}$ из (16.12), а в случае больших вращений дополнительно появляются функции $\bar{a}_{sn}$ и $\bar{b}_{ki}$. В соответствии с (16.8) локальные жесткости преобразуются не конгруэнтно, как это имеет место в линейном случае, и члены, осуществляющие это преобразование, являются функциями от градиентов перемещений. Этот момент особенно ярко проявляется при использовании различных специальных форм $\psi_N(\mathbf{x})$.

6. *Изотропные упругие тела.* Функция энергии деформации определяется формулой (15.46), так что (16.4) принимает вид

$$\int\limits_{v_{0(e)}} \left(\frac{\partial W}{\partial I_1} \frac{\partial I_1}{\partial \gamma_{kj}} + \frac{\partial W}{\partial I_2} \frac{\partial I_2}{\partial \gamma_{kj}} + \frac{\partial W}{\partial I_3} \frac{\partial I_3}{\partial \gamma_{kj}} \right) \psi_{N,\,j} (\delta_{ki} + \psi_{M,\,k} u_i^M)\, dv_0 = p_{Ni}, \tag{16.15}$$

или, ввиду (15.48),

$$\int\limits_{v_{0(e)}} \left\{ 2 \frac{\partial W}{\partial I_1} \delta^{kj} + 4 \frac{\partial W}{\partial I_2} [\delta^{kj}(1+\gamma_{rr}) - \delta^{kr}\delta^{js}\gamma_{sr}] + 2 \frac{\partial W}{\partial I_3} [\delta^{kj}(1+2\gamma_{rr}) - 2\delta^{kr}\delta^{js}\gamma_{sr} + 2\varepsilon^{kmn}\varepsilon^{jrs}\gamma_{mr}\gamma_{ns}] \right\} \times \psi_{N,\,j} (\delta_{ki} + \psi_{M,\,k} u_i^M)\, dv_0 = p_{Ni}. \tag{16.16}$$

Здесь γ_{rs} задаются формулой (16.7), а

$$\gamma_{rr} = \psi_{N,\,r} \left(\delta_{mr} + \frac{1}{2} \psi_{M,\,r} u_m^M \right) u_m^N. \tag{16.17}$$

Из приведенных примеров ясно виден общий способ получения уравнений равновесия для любого типа сжимаемого упругого

элемента: чтобы получить соответствующие уравнения движения, надо просто добавить член $m_{NM}\ddot{u}_i^M$ и считать u_i^N, p_{Ni} и т. д. функциями времени. Уравнения, описывающие поведение несжимаемых упругих элементов, требуют особого внимания. Они будут рассмотрены в следующем пункте.

Симплексные модели[1]. Жесткостные соотношения принимают особенно простую форму, если используются линейные интерполяционные функции в симплексной аппроксимации:

$$\psi_N(\mathrm{x}) = a_N + b_{Ni}x^i, \tag{16.18}$$

где a_N и b_{Ni} определены выражениями (10.105), (10.106) и (10.108). Здесь $N_e = k + 1$, где k — размерность пространства, а $i = 1, 2, \ldots, k$. Функции (16.18) являются локальными базисными функциями для линейного элемента с двумя узлами в одномерных задачах, треугольного элемента с тремя узлами в двумерных задачах и тетраэдрального элемента с четырьмя узлами в трехмерных задачах. Рассмотрим трехмерный случай ($N_e = 4$; $k = 3$). Замечая, что

$$\psi_{N,\,i} = b_{Ni}, \tag{16.19}$$

мы видим, что в нашем случае в соответствии с (13.29) и (13.39)

$$m_{NM} = \rho_0 v_0 a_N a_M + (a_N b_{Mj} + a_M b_{Nj})\, s^j + b_{Ni} b_{Mj} I^{ij}, \tag{16.20}$$

$$2\gamma_{ij} = b_{Ni}u_j^N + b_{Nj}u_i^N + b_{Ni}b_{Mj}u_k^N u_k^M, \tag{16.21}$$

$$\gamma_{rr} = b_{Nr}\left(\delta_{rk} + \frac{1}{2} b_{Mr}u_k^M\right) u_k^N, \tag{16.22}$$

где ρ_0 и v_0 — массовая плотность и объем элемента в начальной конфигурации, s^j — моменты массы относительно системы локальных координат $x_{(e)}^i$, а I^{ij} — тензор массовых моментов инерции в системе $x_{(e)}^i$.

В соотношении (16.20) предполагается, что элемент однороден, т. е. что $\rho_0(\mathrm{x}) = \rho_0 = \mathrm{const}$. Хотя это, вообще говоря, не имеет места, тем не менее это хорошее и удобное приближение, если размеры элемента взяты достаточно малыми. При использовании симплексных моделей неоднородных тел каждый конечный элемент обычно (и мы будем следовать этому обычаю) считается однородным, а неоднородность материала учитывается приписыванием различных свойств различным конечным элементам. Таким образом, для симплексных элементов функцию энергии деформации и ее производные по γ_{ij} можно считать не зависящими от x^i, так что их можно вынести за знак интеграла по объему в (16.3). Отсюда

[1]) См. Оден [1967б].

следует, что нелинейные жесткостные соотношения для симплексных элементов имеют вид

$$v_0 \frac{\partial W(\gamma_{ij})}{\partial \gamma_{kj}} b_{Nj}(\delta_{ki} + b_{Mk}u_i^M) = p_{Ni}. \tag{16.23}$$

В рассмотренных выше частных случаях уравнение (16.23) принимает следующие формы:

1. В случае когда W — аналитическая функция от γ_{ij},

$$v_0 b_{Nj}(\delta_{ki} + b_{Mk}u_i^M) \sum_{r=1}^{\infty} \frac{\partial W_r}{\partial \gamma_{kj}} = p_{Ni}. \tag{16.24}$$

2. Для сжимаемых анизотропных тел

$$v_0 b_{Nj} E^{kjmn} b_{Rm} \left(\delta_{sn} + \frac{1}{2} b_{Sn} u_s^S\right)(\delta_{ki} + b_{Mk}u_i^M) u_s^R + \\ + v_0 b_{Nj} E^{kjmnrs} b_{Rm} b_{Kr} \left(\delta_{pn} + \frac{1}{2} b_{Sn} u_p^S\right)\left(\delta_{qs} + \frac{1}{2} b_{Ts} u_q^T\right) \times \\ \times (\delta_{ki} + b_{Mk}u_i^M) u_p^R u_q^K + \ldots = p_{Ni}, \tag{16.25}$$

где $M, N, K, R, S, T = 1, 2, 3, 4$ и $i, j, k, m, n, p, q, r, s = 1, 2, 3$.

3. Уравнения для теории упругости второго порядка получаются, если в (16.25) отбросить все коэффициенты упругости выше второго порядка.

4. Симплексные жесткостные соотношения при бесконечно малых деформациях, но больших поворотах получаются из (16.25), если сохранить один первый член в левой части этого соотношения [1]):

$$v_0 b_{Nj}\left(\delta_{sn} + \frac{1}{2} b_{Sn} u_s^S\right) E^{kjmn} b_{Rm} (\delta_{ki} + b_{Mk}u_i^M) u_s^R = p_{Ni}. \tag{16.26}$$

5. Симплексные представления для классической теории упругости при малых деформациях получаются в результате подстановки (16.19) в (16.12) [2]):

$$v_0 b_{Mm} E^{ijmn} b_{Nj} u_n^M = p_{Ni}. \tag{16.27}$$

В этом случае матрица жесткости (16.13) принимает вид

$$k_{NM}^{in} = v_0 b_{Mm} E^{ijmn} b_{Nj}. \tag{16.28}$$

---

[1]) Приводимое ниже соотношение впервые получено Висманном [1963]. См. также Висманн [1966].

[2]) Различные формы приводимого ниже соотношения найдены Галлагером, Пэдлогом и Бейлардом [1962]. Оно является одним из первых линейных жесткостных соотношений, полученных для трехмерных конечных элементов упругих тел.

Сделанное ранее замечание относительно преобразований E^{ijmn} теперь легче понять: в линейной теории E^{ijmn} преобразуется в жесткостное соотношение элемента с помощью матриц $\sqrt{v_0} b_{Mm}$ и $\sqrt{v_0} b_{Nj}$, в то время как для кинематически нелинейного случая (16.26) преобразования осуществляются различными матрицами: $\sqrt{v_0} b_{Nj} (\delta_{sn} + 1/2 b_{Sn} u_s^S)$ и $\sqrt{v_0} b_{Rm} (\delta_{ki} + b_{Mk} u_i^M)$, элементы которых зависят от узловых перемещений.

6. Наконец, для симплексных моделей изотропных упругих тел вследствие (16.15) имеем

$$v_0 b_{Nj} \left(\frac{\partial W}{\partial I_1} \frac{\partial I_1}{\partial \gamma_{kj}} + \frac{\partial W}{\partial I_2} \frac{\partial I_2}{\partial \gamma_{kj}} + \frac{\partial W}{\partial I_3} \frac{\partial I_3}{\partial \gamma_{kj}} \right) (\delta_{ki} + b_{Mk} u_i^M) = p_{Ni}, \tag{16.29}$$

или, ввиду (16.16),

$$\begin{aligned} v_0 b_{Nj} \Bigg(2 \frac{\partial W}{\partial I_1} \delta^{kj} + 2 \frac{\partial W}{\partial I_2} \Big\{ 2\delta^{kj} \Big[1 + b_{Rr} \Big(\delta_{rp} + \frac{1}{2} b_{Sr} u_p^S \Big) u_p^R \Big] - \\ - \delta^{kr} \delta^{js} (b_{Rs} u_r^R + b_{Rr} u_s^R + b_{Rs} b_{Sr} u_p^R u_p^S) \Big\} + \\ + 2 \frac{\partial W}{\partial I_3} \Big\{ \delta^{kj} \Big[1 + 2 b_{Rr} \Big(\delta_{rp} + \frac{1}{2} b_{Sr} u_p^S \Big) u_p^R \Big] - \\ - \delta^{kr} \delta^{js} (b_{Rs} u_r^R + b_{Rr} u_s^R + b_{Rs} b_{Sr} u_p^R u_p^S) + \\ + \frac{1}{2} \varepsilon^{kmn} \varepsilon^{jrs} (b_{Rm} u_r^R + b_{Rr} u_m^R + b_{Rm} b_{Sr} u_p^R u_p^S) \times \\ \times (b_{Kn} u_s^K + b_{Ks} u_n^K + b_{Kn} b_{Ts} u_p^K u_p^T) \Big\} \Bigg) (\delta_{ki} + b_{Mk} u_i^M) = p_{Ni}, \end{aligned} \tag{16.30}$$

где, как обычно, $M, N, K, R, S, T = 1, 2, 3, 4$ и $i, j, k, m, n, p, r, s = 1, 2, 3$.

Отметим, что соотношения (16.23) — (16.30) могут быть применены и к одномерным и двумерным элементам, если просто изменить область допустимых значений индексов: для одномерных элементов $M, N, \ldots, S, T = 1, 2$ и $i, j, \ldots, r, s = 1$; для двумерных элементов $M, N, \ldots, S, T = 1, 2, 3$ и $i, j, \ldots, r, s = 1, 2$. Кроме того, эти соотношения можно использовать для описания движения одномерных и двумерных элементов в пространстве более высокой размерности. Например, для трехмерного набора одномерных элементов (ферма или рама) $M, N, \ldots, S, T = 1, 2$ и $i, j, \ldots, r, s = 1, 2, 3$. Для плоских конструкций из одномерных элементов $M, N, \ldots, S, T = 1, 2$ и $i, j, \ldots, r, s = 1, 2$. Для трехмерного набора двумерных элементов (например, мембраны) $M, N, \ldots, S, T = 1, 2, 3$ и $i, j, \ldots, r, s = 1, 2, 3$.

Глобальные формы. Возвращаясь к общей форме жесткостных соотношений (16.4), напомним, что для применения их к типичному конечному элементу e достаточно все величины снабдить

идентификационной меткой элемента:

$$\int\limits_{v_{0(e)}} \frac{\partial W_{(e)}}{\partial \gamma_{kj}} \psi^{(e)}_{N,j} \left(\delta_{ki} + \psi^{(e)}_{M,k} u^{M}_{i(e)}\right) dv_0 = p^{(e)}_{Ni}. \tag{16.31}$$

В соответствии с (13.11) и (13.67) имеем

$$P_{\Delta i} = \sum_{e=1}^{E} \overset{(e)}{\Omega}{}^{N}_{\Delta} p^{(e)}_{Ni} \quad \text{и} \quad u^{N}_{i(e)} = \overset{(e)}{\Omega}{}^{N}_{\Delta} U^{\Delta}_{i}, \tag{16.32}$$

где $\overset{(e)}{\Omega}{}^{N}_{\Delta}$ — булево преобразование, характеризуемое, например, формулой (6.9), E — общее число конечных элементов, а $P_{\Delta i}$ и U^{Δ}_{i} — компоненты обобщенной силы и перемещения в узле Δ связанной модели. Отсюда следует, что глобальная форма нелинейных жесткостных соотношений для совокупности упругих конечных элементов имеет вид

$$\sum_{e=1}^{E} \overset{(e)}{\Omega}{}^{N}_{\Delta} \int\limits_{v_{0(e)}} \frac{\partial W_{(e)}}{\partial \gamma_{kj}} \psi^{(e)}_{N,j} \left(\delta_{ki} + \psi^{(e)}_{M,k} \overset{(e)}{\Omega}{}^{M}_{\Gamma} U^{\Gamma}_{i}\right) dv_0 = P_{\Delta i}, \tag{16.33}$$

где $\Delta, \Gamma = 1, 2, \ldots, G$; $M, N = 1, 2, \ldots, N_e$; $i, j, k = 1, 2, 3$. Динамические уравнения, описывающие поведение совокупности упругих элементов, получаются просто добавлением в (16.33) слагаемого $M_{\Delta\Gamma}\ddot{U}^{\Gamma}_{i}$, где $M_{\Delta\Gamma}$ — глобальная матрица массы (13.75). Сравнивая (16.33) с (13.76) и (13.77), видим, что в нашем случае

$$G_{\Delta i} = \sum_{e=1}^{E} \overset{(e)}{\Omega}{}^{N}_{\Delta} \int\limits_{v_{0(e)}} \frac{\partial W_{(e)}}{\partial \gamma_{kj}} \psi^{(e)}_{N,j} \delta_{ki}\, dv_0, \tag{16.34}$$

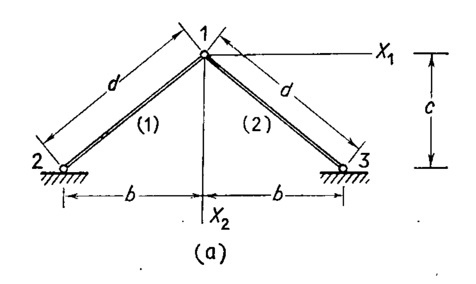
$$H_{\Delta\Gamma} = \sum_{e=1}^{E} \overset{(e)}{\Omega}{}^{N}_{\Delta} \overset{(e)}{\Omega}{}^{M}_{\Gamma} \int\limits_{v_{0(e)}} \frac{\partial W_{(e)}}{\partial \gamma_{kj}} \psi^{(e)}_{N,k} \psi^{(e)}_{M,j}\, dv_0. \tag{16.35}$$

В качестве простого примера глобальной формы жесткостных соотношений для конкретного типа материала рассмотрим показанную на рис. 16.1 двухстержневую форму, изготовленную из изотропного гукова материала. В этом случае при использовании указанных в части (*b*) рисунка локальных координат можно положить

$$E^{1111} = E, \qquad E^{ijmn} = 0, \qquad i, j, m, n \neq 1, \tag{16.36}$$

где E — модуль Юнга. Используя симплексное представление (16.18), находим, что

$$\psi_{N,1} = b_{N1}, \qquad b_{11} = -b_{21} = -\frac{1}{d}, \tag{16.37}$$



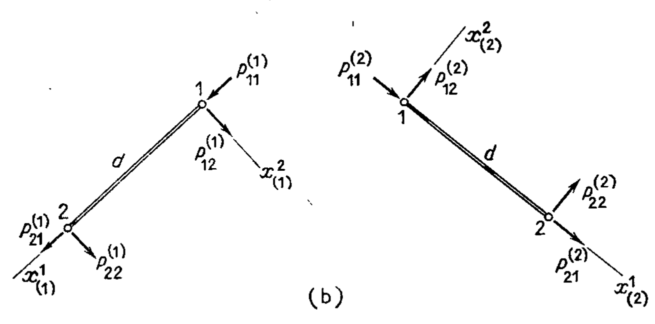


Рис. 16.1. Двухстержневая форма.

где d — длина каждого стержня. Так как $v_0 = a_0 d$, где a_0 — начальная площадь поперечного сечения стержня, из (16.26) получаем следующие выражения для обобщенных сил:

$$\begin{aligned} p^{(e)}_{11} &= -a_0 E\gamma^{(e)}_{11}\left(1+\frac{u^2_{1(e)}-u^1_{1(e)}}{d}\right),\\ p^{(e)}_{12} &= -a_0 E\gamma^{(e)}_{11}\,\frac{u^2_{2(e)}-u^1_{2(e)}}{d},\\ p^{(e)}_{21} &= a_0 E\gamma^{(e)}_{11}\left(1+\frac{u^2_{1(e)}-u^1_{1(e)}}{d}\right),\\ p^{(e)}_{22} &= a_0 E\gamma^{(e)}_{11}\,\frac{u^2_{2(e)}-u^1_{2(e)}}{d}, \end{aligned} \tag{16.38}$$

где

$$\gamma^{(e)}_{11} = \frac{u^2_{1(e)}-u^1_{1(e)}}{d} + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{u^2_{1(e)}-u^1_{1(e)}}{d}\right)^2 + \left(\frac{u^2_{2(e)}-u^1_{2(e)}}{d}\right)^2\right]. \tag{16.39}$$

Отметим, что локальные силы (16.38) образуют самоуравновешенную систему сил. Поскольку локальные координаты $x^i_{(e)}$ не совпадают с глобальными координатами X^i, преобразуем все локальные

величины к общей системе отсчета в соответствии с (13.11):

$$\hat{u}^N_{i(e)} = \overset{(e)}{\alpha}{}^i_{.j} u^N_{j(e)}, \qquad (16.40а)$$

$$\hat{p}^{(e)}_{Ni} = \overset{(e)}{\alpha}{}^i_{.j} p^{(e)}_{Nj}, \qquad (16.40б)$$

где

$$\left[\overset{(1)}{\alpha}{}^i_{.j}\right] = \frac{1}{d}\begin{bmatrix} -b & c \\ c & b \end{bmatrix} \quad \text{и} \quad \left[\overset{(2)}{\alpha}{}^i_{.j}\right] = \frac{1}{d}\begin{bmatrix} b & c \\ c & -b \end{bmatrix}. \qquad (16.41)$$

Замечая, что $\overset{(1)}{\Omega}{}^1_1 = \overset{(2)}{\Omega}{}^1_1 = \overset{(1)}{\Omega}{}^2_2 = \overset{(2)}{\Omega}{}^2_3 = 1$, а все другие $\Omega^N_\Delta = 0$ и что в силу концевых условий $U^2_i = U^3_i = 0$, локальные обобщенные силы можно выразить через глобальные узловые перемещения U^1_i следующим образом:

$$\begin{aligned} p^{(1)}_{11} &= -a_0 E \gamma^{(1)}_{11}\left[1 + \frac{1}{d^2}(bU - cV)\right], \\ p^{(1)}_{12} &= a_0 E \gamma^{(1)}_{11} \frac{1}{d^2}(cU + bV), \\ p^{(2)}_{11} &= -a_0 E \gamma^{(2)}_{11}\left[1 - \frac{1}{d^2}(bU + cV)\right], \\ p^{(2)}_{12} &= a_0 E \gamma^{(2)}_{11} \frac{1}{d^2}(cU - bV) \end{aligned} \qquad (16.42)$$

и т. д., где $U^1_1 = U$, $U^1_2 = V$ и

$$\begin{aligned} \gamma^{(1)}_{11} &= \frac{1}{d^2}\left[bU - cV + {}^1/_2(U^2 + V^2)\right], \\ \gamma^{(2)}_{11} &= \frac{1}{d^2}\left[-bU - cV + {}^1/_2(U^2 + V^2)\right]. \end{aligned} \qquad (16.43)$$

Преобразуя (16.42) в соответствии с (16.40б), получаем

$$\begin{aligned} \hat{p}^{(1)}_{11} &= \frac{a_0 E \gamma^{(1)}_{11}}{d}(U + b), & \hat{p}^{(2)}_{11} &= \frac{a_0 E \gamma^{(2)}_{11}}{d}(U - b), \\ \hat{p}^{(1)}_{12} &= \frac{a_0 E \gamma^{(1)}_{11}}{d}(V - c), & \hat{p}^{(2)}_{12} &= \frac{a_0 E \gamma^{(2)}_{11}}{d}(V - c). \end{aligned} \qquad (16.44)$$

Ввиду (13.67) глобальные силы в узле 1 связанной модели окончательно записываются в виде

$$\begin{aligned} P_{11} &= \frac{a_0 E U}{d^3}\left[2(b^2 - cV) + U^2 + V^2\right], \\ P_{12} &= \frac{a_0 E}{d^3}(V - c)\left[V(V - 2c) + U^2\right]. \end{aligned} \qquad (16.45)$$

Эти уравнения [1]) представляют собой уравнения равновесия в узле 1.

[1]) Некоторые их решения см. у Одена [1971в].

В частном случае, когда деформации симметричны относительно оси x^2, имеем $U = 0$, $P_{11} = \hat{p}_{11}^{(1)} + \hat{p}_{11}^{(2)} = 0$ и остается только одно уравнение:

$$P_{12} = \frac{a_0 E}{d^3} V (V - c)(V - 2c). \tag{16.46}$$

Из уравнений (16.45) и (16.46) видно, что в рассматриваемой симплексной модели получается кубичная зависимость обобщенных сил от узловых перемещений. Согласно (16.46) P_{12} является кубичным полиномом третьей степени относительно V с тремя корнями $V = 0$, c, $2c$. Значит, при заданной нагрузке P_{12} могут существовать три равновесные конфигурации, т. е. теперь уже нельзя ожидать единственности поля перемещений при заданной нагрузке, как это было в линейной теории.

Если V очень мало, то уравнение 16.46 можно линеаризовать:

$$P_{12} = \frac{2a_0 c^2 E}{d^3} V. \tag{16.47}$$

Выражение в правой части зависит от высоты конструкции c. В принципе ничто не мешает нам рассматривать случай $c = 0$, когда оба стержня расположены на одной прямой. В этом случае линеаризованное решение не существует и поведение конструкции можно предсказать только на основе нелинейной теории.

При неконсервативном нагружении узловые силы P_{11} и P_{12} в уравнениях (16.45) должны, вообще говоря, представляться в виде функций от узловых перемещений. Рассмотрим, например, ситуацию, когда в узле 1 приложена сила Q, которая всегда нормальна к элементу 1. Тогда

$$P_{11} = \frac{Q}{d^*}(c - V), \tag{16.48а}$$

$$P_{12} = \frac{Q}{d^*}(b + U), \tag{16.48б}$$

где

$$d^{*2} = d^2 + 2(bU - cV) + U^2 + V^2. \tag{16.49}$$

16.2. НЕСЖИМАЕМЫЕ МАТЕРИАЛЫ [1]

Хотя в некоторых точных решениях задач теории упругости при конечных деформациях предположение о несжимаемости приводит к ряду упрощений, при использовании метода конечных элементов этого не происходит. Напомним, что напряжения,

[1]) Линейные задачи для несжимаемых тел рассматривались многими авторами. Бесконечно малые осесимметричные деформации несжимаемых упругих тел вращения были изучены Беккером и Брисбейном [1965]. Их исследования основаны на одной вариационной теореме Геррманна [1965], которую можно получить исходя из более общей теории, развитой Труделлом

возникающие в несжимаемом материале, не полностью определяются деформацией или энергией деформации. Действительно, W определяет напряжения в несжимаемых гиперупругих телах лишь с точностью до аддитивной скалярнозначной функции h, называемой гидростатическим давлением, которое не совершает работы в процессе деформирования тела. В конечноэлементных приложениях гидростатическое давление является дополнительной неизвестной величиной в жесткостных соотношениях. Условие несжимаемости (15.56) должно выполняться, по крайней мере приближенно, во всей дискретной модели. Поскольку практически во всех известных уравнениях состояния сильно деформируемых упругих материалов (например, натуральных и синтетических резин, полимеров, твердых топлив) эти материалы предполагаются несжимаемыми, исследование конечных деформаций несжимаемых тел — важная часть теории упругости при конечных деформациях.

С учетом (15.55), (15.58) и (16.1) жесткостные соотношения для несжимаемых конечных элементов можно записать в виде

$$\int_{v_{0(e)}} [\bar{\bar{\Sigma}}^{kj}(G_{rs})+hG^{kj}]\,\psi_{N,j}(\delta_{ki}+\psi_{M,k}u_i^M)\,dv_0=p_{Ni} \qquad (16.50)$$

или, для гиперупругих элементов,

$$\int_{v_{0(e)}} \left(\frac{\partial W}{\partial \gamma_{kj}}+hG^{kj}\right)\psi_{N,j}(\delta_{ki}+\psi_{M,k}u_i^M)\,dv_0=p_{Ni}, \qquad (16.51)$$

где $h=h_{(e)}(\mathrm{x},\ t)$ — локальное гидростатическое давление, соответствующее элементу e. Узловые перемещения u_i^M должны быть такими, чтобы удовлетворялось условие несжимаемости. Для конечных элементов его простейшей очевидной аппроксимацией является осредненное условие несжимаемости:

$$\int_{v_{0(e)}} (I_3-1)\,dv_0=0. \qquad (16.52)$$

При выборе декартовых материальных координат в начальной конфигурации $C_{0(e)}$ возможны некоторые упрощения в записи

и Тупином [1960]. Другие приложения, относящиеся к линейным несжимаемым материалам, даны Тэйлором, Пистером и Геррманном [1968], Тонгом [1969], Ки [1969], Хьюджесом и Элликом [1969]. Приложениями к случаю конечных деформаций несжимаемых упругих тел занимались Оден [1967б, 1968б] и Оден и Ки [1970, 1971а]. Решения ряда задач о плоском напряженном состоянии, включая задачи о конечных деформациях, получены, например, у Одена и Сато [1967а] и Беккера [1966]; в этих задачах часто удается избежать обычных трудностей, связанных с соблюдением условия несжимаемости и расчетом гидростатического давления.

(16.52). Вспоминая, что

$$I_3 = \det G_{ij} = \det z_{m,\,i} z_{m,\,j} = (\det z_{m,\,i})(\det z_{m,\,j}) = \\ = (\det z_{i,\,j})^2, \qquad (16.53)$$

где $z_{m,\,i} = \delta_{mi} + \psi_{N,\,i} u_m^N$ — градиенты деформации, условие (16.52) можно записать в таком более удобном виде:

$$\int_{v_{0(e)}} [\det(\delta_{mi} + \psi_{N,\,i} u_m^N)]^2\, dv_0 - v_0 = 0. \qquad (16.54)$$

Другие формулировки условия несжимаемости будут рассмотрены ниже.

Ни в (16.50), ни в (16.51) ничего не предполагалось относительно характера изменений h (x) в конечном элементе. Возможно сделать несколько предположений. Простейшей локальной аппроксимацией для h (x, t), и зачастую приводящей к наименьшему числу дополнительных неизвестных, является аппроксимация нулевого порядка, т. е. предположение, что h постоянно в элементе:

$$h_{(e)}(\mathrm{x}) = h_0^{(e)}, \qquad (16.55)$$

где $h_0^{(e)}$ — постоянная. В динамических задачах, конечно, $h_0^{(e)}$ считается функцией времени. Для трехмерного конечного элемента (16.51) совместно с (16.54) представляет собой систему $3N_e$ уравнений относительно $3N_e + 1$ неизвестных u_i^M ($M = 1, 2, \ldots$ $\ldots, N_e$; $i = 1, 2, 3$) и $h_0^{(e)}$. Еще одно уравнение, необходимое для получения полной системы, следует из локального условия несжимаемости (16.52) или из других его формулировок, например (16.54). Таким образом, для состоящей из E элементов дискретной модели, у которой не заданы компоненты перемещений в $\overline{G}$ глобальных узлах, аппроксимация (16.55) приводит к системе $3\overline{G} + E$ уравнений (уравнения равновесия и условия несжимаемости) относительно $3\overline{G}$ компонент перемещений и E гидростатических давлений в элементах. Отметим, что для сжимаемых материалов такая модель приводит к системе только $3\overline{G}$ уравнений.

Вместо (16.55) можно использовать какую-нибудь более общую аппроксимацию гидростатического давления, как, например,

$$h_{(e)}(\mathrm{x}) = h^N \psi_N(\mathrm{x}), \qquad (16.56)$$

где ψ_N (x) — та же самая совокупность локальных интерполяционных функций, что использовалась для аппроксимации полей перемещений. Тогда (16.51) принимает вид

$$\int_{v_{0(e)}} \left(\frac{\partial W}{\partial \gamma_{kj}} + \psi_R h^R G^{kj}\right) \psi_{N,\,j}(\delta_{ki} + \psi_{M,\,k} u_i^M)\, dv_0 = p_{Ni}. \qquad (16.57)$$

Однако в этом случае (16.57) является системой $3N_e$ уравнений относительно $4N_e$ неизвестных (h^R и u_i^M; $M, R = 1, 2, \ldots, N_e$; $i = 1, 2, 3$), в то время как при аппроксимации (16.56) мы имеем систему $3N_e + 1$ уравнений. Поскольку локальное условие несжимаемости в форме (16.52) дает только одно дополнительное уравнение для каждого элемента, очевидно, что если мы будем поступать так же, как и в случае постоянного гидростатического давления, то не получим достаточного для решения задачи числа уравнений.

С этой трудностью мы справимся следующим образом. Пусть H^Δ ($\Delta = 1, 2, \ldots, G$) — значение гидростатического давления в узле Δ связанной модели. Тогда

$$h^N_{(e)} = \overset{(e)}{\Omega}{}^N_\Delta H^\Delta, \qquad (16.58)$$

и глобальная форма соотношения (16.57) принимает вид

$$\sum_{e=1}^{E} \overset{(e)}{\Omega}{}^N_\Delta \int\limits_{v_{0(e)}} \left(\frac{\partial W_{(e)}}{\partial \gamma_{kj}} + \overset{(e)}{\psi}_R \overset{(e)}{\Omega}{}^R_\Gamma H^\Gamma \right) \overset{(e)}{\psi}_{N,j} \left(\delta_{ki} + \overset{(e)}{\psi}_{M,k} \overset{(e)}{\Omega}{}^M_\Phi U_i^\Phi\right) dv_0 = P_{\Delta i}, \qquad (16.59)$$

где $\Delta, \Gamma, \Phi = 1, 2, \ldots, G$; $M, N, R = 1, 2, \ldots, N_e$; $i, j, k = 1, 2, 3$. Если в связанной модели заданы m компонент n узловых перемещений, то (16.59) представляет собой систему $3G - m$ уравнений относительно $4G - m$ неизвестных. Это означает, что в *рассматриваемом случае следует потребовать выполнения условия несжимаемости в каждой узловой точке, а не в каждом элементе.* Для получения нужных условий преобразуем «непрерывное» условие несжимаемости $I_3 = 1$ в эквивалентное локальное условие для узловой точки, введя величину [1])

$$(\mathrm{iii})^{(e)}_M = \int\limits_{v_{0(e)}} \overset{(e)}{\psi}_M \left(\overset{(e)}{I_3} - 1\right) dv_0. \qquad (16.60)$$

Если III_Δ — глобальное значение величины $(\mathrm{iii})^{(e)}_M$ в узле Δ связанной модели, то, как следует из (7.16) и (9.189),

$$(\mathrm{iii})^{(e)}_M = \overset{(e)}{\Lambda}{}^\Delta_M \mathrm{III}_\Delta \quad \text{и} \quad \mathrm{III}_\Delta = \sum_{e=1}^{E} \overset{(e)}{\Omega}{}^N_\Delta (\mathrm{iii})^{(e)}_N. \qquad (16.61а, б)$$

Тот факт, что в этих равенствах фигурирует III_Δ, а не III^Δ, говорит о том, что величины III_Δ являются компонентами некоторой функции на конечномерном подпространстве Φ^*, сопряженном с пространством Φ, порождаемым глобальными базисными функциями

$$\Phi_\Delta(\mathbf{x}) = \sum_e \overset{(e)}{\Omega}{}^N_\Delta \overset{(e)}{\psi}_N(\mathbf{x})$$

[1]) Интерпретацию величины $(\mathrm{iii})^{(e)}_M$ в свете вариационных принципов мы дадим в п. 16.4.

Равенство (16.61б) показывает, что III_Δ является суммой локальных вкладов $(\mathrm{iii})_N^{(e)}$ от всех элементов, соединяющихся в узле Δ связанной модели. Вспоминая (см. (9.82) и т. д.), что эти ковариантные величины являются средними значениями III (X) в окрестности узла X^Δ, можно убедиться, что обращение III_Δ в нуль в каждой из G глобальных узловых точек означает выполнение условия несжимаемости в среднем во всей связанной конечноэлементной модели. Таким образом, мы полагаем

$$\mathrm{III}_\Delta = \sum_{e=1}^{E} \overset{(e)}{\Omega}{}_\Delta^N \int_{v_{0(e)}} \psi_N^{(e)} (I_3^{(e)} - 1)\, dv_0 = 0, \tag{16.62}$$

$\Delta = 1, 2, \ldots, G$. Условия (16.62) вместе с $3G - m$ жесткостными соотношениями (16.59) образуют полную систему $4G - m$ независимых уравнений относительно $4G - m$ неизвестных U_i^Δ, H^Δ.

Отметим, что использование постоянного в элементах гидростатического давления (16.55) не обязательно приводит к меньшему числу неизвестных, чем более сложная аппроксимация (16.56). Действительно, (16.55) приводит к $3G - m + E$ уравнениям, в то время как (16.56) — к $4G - m$; нетрудно привести примеры, когда $E > G$. С другой стороны, часто при использовании (16.55) и (16.54) условие несжимаемости в связанной модели выполняется точнее. В некоторых случаях оказывается даже возможным удовлетворить условиям несжимаемости в каждом конечном элементе точно.

При вычислениях применение осредненных условий несжимаемости (16.62) удобнее, чем (16.54), поскольку связывание дискретной модели для h (x) осуществляется с помощью (16.58) точно так же, как и связывание модели поля перемещений. К тому же (16.56) позволяет, как правило, точнее определить гидростатическую часть тензора напряжений, а использование рассмотренных в § 9 сопряженных аппроксимационных функций позволяет преодолеть многие трудности, связанные с расчетом напряжений в конечных элементах.

Следует отметить, что использование для гидростатического давления аппроксимаций более высокого порядка, чем для поля перемещений, может привести к увеличению числа неизвестных без заметного повышения точности [1]). На самом деле, если напряжения в элементе определяются обычным образом (т. е. из локальных уравнений состояния после определения перемещений и гидростатического давления), то порядок локальных аппроксимаций гидростатического давления должен быть *меньше* порядка аппроксимации перемещения. Возьмем, например, однородную симплексную модель в декартовых координатах. В этом случае гради-

[1]) См. Хьюджес и Эллик [1969].

енты перемещений и часть тензора напряжений, определяемая энергией деформации, постоянны в каждом конечном элементе. Поэтому вполне естественно предположить, что и гидростатическое давление в каждом конечном элементе постоянно. Тем не менее локальные напряжения, вычисленные при аппроксимациях давления и перемещения одинакового порядка, можно использовать для определения распределения напряжений с помощью рассмотренных в § 9 сопряженных аппроксимаций. Мы обсудим этот вопрос в следующем параграфе. Отметим также, что возможно построить не постоянную в элементе аппроксимацию h (x), порядок которой ниже порядка аппроксимации перемещений. Можно, например, для перемещения использовать билинейную аппроксимацию в плоском четырехугольном элементе, а аппроксимацию для гидростатического давления получить, разбивая элемент на два (или более) треугольника, внутри которых h предполагается постоянным. Основываясь на приведенных рассуждениях, примем в качестве общего правила в наших последующих рассмотрениях несжимаемых элементов, что порядок аппроксимации гидростатического давления меньше или равен порядку аппроксимации поля перемещений.

Возвращаясь теперь к общим нелинейным жесткостным соотношениям для несжимаемых элементов (16.51), мы можем выписать их для различных типов несжимаемых гиперупругих материалов. Для изотропных материалов W является функцией первых двух главных инвариантов I_1 и I_2. Соотношение (16.15) принимает вид

$$\int\limits_{v_{0(e)}} \left(\frac{\partial W}{\partial I_1}\frac{\partial I_1}{\partial \gamma_{kj}}+\frac{\partial W}{\partial I_2}\frac{\partial I_2}{\partial \gamma_{kj}}+h\frac{\partial I_3}{\partial \gamma_{kj}}\right)\psi_{N,j}(\delta_{ki}+\psi_{M,k}u_i^M)\,dv_0=p_{Ni}, \tag{16.63}$$

или, в соответствии с (16.16),

$$\int\limits_{v_{0(e)}} \Big\{2\frac{\partial W}{\partial I_1}\delta^{kj}+4\frac{\partial W}{\partial I_2}[\delta^{kj}(1+\gamma_{rr})-\delta^{kr}\delta^{js}\gamma_{sr}]+2h[\delta^{kj}(1+2\gamma_{rr})-$$
$$-2\delta^{kr}\delta^{js}\gamma_{sr}+2\varepsilon^{kmn}\varepsilon^{jrs}\gamma_{mr}\gamma_{ns}]\Big\}\psi_{N,j}(\delta_{ki}+\psi_{M,k}u_i^M)\,dv_0=p_{Ni}, \tag{16.64}$$

где $h=\psi_N h^N$ или $h=h_0$.

Если W выражается в виде полинома относительно инвариантов, как, скажем, в (15.61), то в (16.64) надо подставить

$$\frac{\partial W}{\partial I_1}=\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty} rC_{rs}(I_1-3)^{r-1}(I_2-3)^s,$$
$$\frac{\partial W}{\partial I_2}=\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty} sC_{rs}(I_1-3)^{r}(I_2-3)^{s-1}. \tag{16.65}$$

Важный частный случай материала Муни получается, когда

$$\frac{\partial W}{\partial I_1}=C_1 \quad \text{и} \quad \frac{\partial W}{\partial I_2}=C_2, \tag{16.66}$$

где C_1 и C_2 — постоянные; если $C_2 = 0$, то получаются уравнения для неогуковых элементов. Различные другие формы уравнения можно получить, подставляя выражения для W, определенные формулами (15.65) — (15.71).

Симплексные модели. Для симплексных моделей можно записать уравнения в более явном виде. Поскольку

$$\frac{\partial I_\alpha}{\partial \gamma_{kj}}\psi_{N,j}(\delta_{ki}+\psi_{M,k}u_i^M)=\frac{\partial I_\alpha}{\partial \gamma_{kj}}\frac{\partial \gamma_{kj}}{\partial u_i^N}=\frac{\partial I_\alpha}{\partial u_i^N}, \qquad \alpha=1,2, \tag{16.67}$$

то при $\gamma_{ij}^{(e)}$, задаваемом формулой (16.21),

$$\frac{\partial I_1}{\partial u_i^N}=2b_{Nk}(\delta_{ki}+b_{Mk}u_i^M), \tag{16.68а}$$

$$\frac{\partial I_2}{\partial u_i^N}=2b_{Nm}(\delta_{ik}+b_{Mk}u_i^M)\left\{2\delta^{mk}\left[1+b_{Ps}\left(\delta_{rs}+\frac{1}{2}b_{Rs}u_r^R\right)u_r^P\right]-\right.$$
$$\left.-b_{Im}u_k^I-b_{Ik}u_m^I-b_{Im}b_{Jk}u_j^Iu_j^J\right\}, \tag{16.68б}$$

$$\frac{\partial I_3}{\partial u_i^N}=2b_{Nm}(\delta_{ik}+b_{Mk}u_i^M)\left\{\delta^{mk}\left[1+2b_{Ps}\left(\delta_{rs}+\frac{1}{2}b_{Rs}u_r^R\right)u_r^P\right]-\right.$$
$$-(b_{Im}u_k^I+b_{Ik}u_m^I+b_{Im}b_{Jk}u_j^Iu_j^J)+$$
$$\left.+2b_{Pj}b_{Kr}\varepsilon^{mjr}\varepsilon^{kst}\left(\delta_{sp}+\frac{1}{2}b_{Is}u_p^I\right)\left(\delta_{tq}+\frac{1}{2}b_{Jt}u_q^J\right)u_p^Pu_q^K\right\}, \tag{16.68в}$$

где $I, J, K, M, N, P, R = 1, 2, 3, 4$ и $i, j, k, m, n, p, q, r, s, t = 1, 2, 3$. Поэтому жесткостные соотношения для однородных несжимаемых изотропных конечных элементов принимают вид

$$2v_0(\delta_{ki}+b_{Mk}u_i^M)\left(b_{Nk}\frac{\partial W}{\partial I_1}+\right.$$
$$+b_{Nm}\left\{2\delta^{mk}\left[1+b_{Pj}\left(\delta_{rj}+\frac{1}{2}b_{Rj}u_r^R\right)u_r^P\right]-\right.$$
$$\left.-(b_{Im}u_k^I+b_{Ik}u_m^I+b_{Im}b_{Jk}u_j^Iu_j^J)\right\}\frac{\partial W}{\partial I_2}+$$
$$+h_0b_{Nm}\left\{\delta^{mk}\left[1+2b_{Pj}\left(\delta_{rj}+\frac{1}{2}b_{Rj}u_r^R\right)u_r^P\right]-\right.$$
$$-(b_{Im}u_k^I+b_{Ik}u_m^I+b_{Im}b_{Jk}u_j^Iu_j^J)+$$
$$+2b_{Pj}b_{Kr}\varepsilon^{mjr}\varepsilon^{kst}\left(\delta_{sp}+\frac{1}{2}b_{Is}u_p^I\right)\left(\delta_{tq}+\frac{1}{2}b_{Jt}u_q^J\right)\times$$
$$\left.\left.\times u_p^Pu_q^K\right\}\right)=p_{Ni}; \tag{16.69}$$

Здесь предполагается, что гидростатическое давление постоянно, т. е. $h^{(e)}(\mathbf{x}) = h_0^{(e)}$. Если же лучше считать, что $h(\mathbf{x})$ меняется по линейному закону внутри элемента [т. е. $h(\mathbf{x}) = (a_N + b_{Ni}x^i)h^N$], то h_0 в (16.69) следует заменить на $m_Q h^Q$, где m_Q — локальные моменты, определяемые формулой (9.159). Для симплексных представлений

$$m_Q = \int\limits_{v_{0(e)}} \psi_Q\, dv_0 = \int\limits_{v_{0(e)}} (a_Q + b_{Qi}x^i)\, dv_0 = v_0 a_Q + b_{Qi}s^i_{(v)}, \quad (16.70)$$

где $s^i_{(v)} = \int\limits_{v_0} x^i\, dv_0$ — первые моменты объема относительно материальных координат $x^i_{(e)}$.

При $h^{(e)}(\mathbf{x}) = h_0^{(e)}$ (16.69) представляет собой систему 12 уравнений относительно 13 неизвестных u_i^N, h_0. К этим уравнениям надо добавить условие несжимаемости (16.52) или (16.54). Заметив, что для симплексных моделей

$$z_{m,\,i} = \delta_{mi} + b_{Ni}u_m^N, \quad (16.71)$$

условие несжимаемости получим в виде

$$\det(\delta_{mi} + b_{Ni}u_m^N) = 1. \quad (16.72)$$

К этому же результату можно прийти другим путем. Три ребра конечного тетраэдрального элемента в недеформированном теле образует тройка векторов

$$\mathbf{a} = (x_i^2 - x_i^1)\,\mathbf{i}_i, \qquad \mathbf{b} = (x_i^3 - x_i^1)\,\mathbf{i}_i, \qquad \mathbf{c} = (x_i^4 - x_i^1)\,\mathbf{i}_i, \quad (16.73)$$

где $\mathbf{i}_i$ — ортонормальные базисные векторы в $C_{0(e)}$. Начальный объем элемента равен одной шестой смешанного произведения этих векторов:

$$v_0 = \frac{1}{6}\,\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) = \frac{1}{6}\,\varepsilon^{ijk}(x_i^2 - x_i^1)(x_j^3 - x_j^1)(x_k^4 - x_k^1). \quad (16.74)$$

Векторы, образующие ребра тетраэдра после деформации, таковы:

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{a}} &= (x_i^2 + u_i^2 - x_i^1 - u_i^1)\,\mathbf{i}_i, \\ \bar{\mathbf{b}} &= (x_i^3 + u_i^3 - x_i^1 - u_i^1)\,\mathbf{i}_i, \\ \bar{\mathbf{c}} &= (x_i^4 + u_i^4 - x_i^1 - u_i^1)\,\mathbf{i}_i, \end{aligned} \quad (16.75)$$

и объем деформированного элемента равен

$$v = \frac{1}{6}\,\bar{\mathbf{a}}\cdot(\bar{\mathbf{b}}\times\bar{\mathbf{c}}) = \frac{1}{6}\,\varepsilon^{ijk}(z_i^2 - z_i^1)(z_j^3 - z_j^1)(z_k^4 - z_k^1), \quad (16.76)$$

где $z_i^N = x_i^N + u_i^N$ — пространственные координаты смещенных узлов. Поскольку мы требуем, чтобы $v = v_0$, то после некоторых

выкладок получаем

$$\frac{1}{6v_0}\varepsilon^{ijk}(x_i^2+u_i^2-x_i^1-u_i^1)(x_j^3+u_j^3-x_j^1-u_j^1)(x_k^4+u_k^4-x_k^1-u_k^1)=1. \tag{16.77}$$

Раскрыв скобки в левой части и сравнивая результат с (10.96), можно найти коэффициенты b_{Ni} и убедиться, что (16.77) и (16.72) совпадают между собой. Таким образом, для симплексных аппроксимаций условие несжимаемости для дискретной модели выполняется точно.

Если предположить, что гидростатическое давление в элементе изменяется по линейному закону, то надо записать условия несжимаемости в каждой узловой точке в соответствии с (16.60) и (16.62). Для симплексных моделей локальное условие имеет вид

$$(\text{iii})_M^{(e)} = m_M\{[\det(\delta_{im}+b_{Ni}u_m^N)]^2-1\}, \tag{16.78}$$

где m_M определено формулой (16.70), а глобальное —

$$\sum_{e=1}^{E}\overset{(e)}{\Omega}{}_\Delta^M m_M^{(e)}\{[\det(\delta_{im}+b_{Ni}^{(e)}\overset{(e)}{\Omega}{}_\Gamma^N U_m^\Gamma)]^2-1\}=0. \tag{16.79}$$

16.3. ОБОБЩЕННЫЕ СИЛЫ И НАПРЯЖЕНИЯ

Мы уже несколько раз отмечали, что обобщенные силы в узлах $p_{Ni}^{(e)}$ представляют собой результирующие напряжений на поверхностях в деформированном теле, отнесенных к конвективным материальным координатам $x_{(e)}^i$ и, конечно, объемных сил. Таким образом, узловые силы могут меняться и по величине и по направлению в процессе деформирования тела и в общем случае должны выражаться через перемещения и их градиенты. В этом пункте мы ставим себе цель найти выражения для обобщенных сил, учитывающие их зависимость от деформации.

Напомним (см. § 13), что выражения для обобщенных сил получаются из условия сохранения локальной механической мощности в следующем смысле:

$$\Omega_{(e)} = \int_{v_{(e)}}\rho\mathbf{F}\cdot\dot{\mathbf{u}}\,dv + \int_{A_{(e)}}\mathbf{S}\cdot\dot{\mathbf{u}}\,dA = \mathbf{p}_N\cdot\dot{\mathbf{u}}^N, \tag{16.80}$$

где $\mathbf{F}$ — объемная сила на единицу массы в $C_{(e)}$, $\mathbf{S}$ — поверхностное усилие на единицу деформированной площади, $\dot{\mathbf{u}}$ — вектор скорости, $\mathbf{p}_N$ — обобщенная сила в узле N и $\dot{\mathbf{u}}^N$ — скорость узла N. Поскольку $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{u}^N(t)\,\psi_N(\mathbf{x})$ и $\dot{\mathbf{u}} = \dot{\mathbf{u}}^N(t)\,\psi_N(\mathbf{x})$, векторы $\mathbf{p}_N$ обобщенных узловых сил представляются в виде [1])

$$\mathbf{p}_N = \mathbf{f}_N + \mathbf{s}_N, \tag{16.81}$$

[1]) См. (13.52) и (13.54).

где $\mathbf{f}_N$ и $\mathbf{s}_N$ — обобщенные силы, обусловленные соответственно объемными и поверхностными силами:

$$\mathbf{f}_N = \int_{v_{(e)}} \rho(\mathbf{x})\,\psi_N(\mathbf{x})\,\mathbf{F}(\mathbf{x},\ t)\,dv \quad \text{и} \quad \mathbf{s}_N = \int_{A_{(e)}} \psi_N(\mathbf{x})\,\mathbf{S}(\mathbf{x},\ t)\,dA. \tag{16.82}$$

Векторы $\mathbf{p}_N$ можно выразить в виде линейных комбинаций ортонормальных базисных векторов $\mathbf{i}_i$ в начальной конфигурации или ковариантных базисных векторов $\mathbf{G}_i$, касательных к конвективным координатным линиям $x^i_{(e)}$ в деформированном элементе, т. е.

$$\mathbf{p}_N = p_{Ni}\mathbf{i}_i = t^i_N\mathbf{G}_i, \tag{16.83}$$

где $N = 1,\ 2,\ \ldots,\ N_e$ и $i = 1,\ 2,\ 3$. Поскольку

$$\mathbf{G}_i = z_{m,\,i}\mathbf{i}_m = (\delta_{mi} + u_{m,\,i})\,\mathbf{i}_m = (\delta_{mi} + \psi_{M,\,i}u^M_m)\,\mathbf{i}_m, \tag{16.84}$$

то

$$p_{Ni} = t^m_N(\delta_{mi} + \psi_{M,\,m}u^M_i). \tag{16.85}$$

Аналогично можно записать

$$\mathbf{F} = \hat{F}_i\mathbf{i}_i = F^j\mathbf{G}_j, \tag{16.86}$$

$$\hat{F}_i = F^j(\delta_{ij} + u_{j,\,i}), \tag{16.87}$$

так что

$$\mathbf{f}_N = \int_{v_{0(e)}} \rho_0\hat{F}_i\psi_N\,dv_0\mathbf{i}_i = \int_{v_{(e)}} \rho F^j\psi_N\mathbf{G}_j\,dv, \tag{16.88}$$

где подразумевается, что функции ρ_0, ρ, $\hat{F}_i$, F^j, ψ_N и $\mathbf{G}_j$ зависят от $\mathbf{x}$.

Обращаясь к вкладу в $\mathbf{p}_N$ поверхностных сил, заметим, что последние могут измеряться на единицу площади недеформированной поверхности dA_0 или на единицу площади деформированной поверхности dA, так что поверхностная сила, действующая на элемент, равна

$$\int_{A_{0(e)}} \hat{\mathbf{S}}\,dA_0 = \int_{A_{(e)}} \mathbf{S}\,dA. \tag{16.89}$$

Здесь

$$\hat{\mathbf{S}} = t^{ij}\hat{n}_i\mathbf{G}_j \quad \text{и} \quad \mathbf{S} = \sigma^{ij}n_i\mathbf{G}_j, \tag{16.90}$$

где t^{ij} и σ^{ij} — тензоры напряжений в конвективных координатах, измеренных на единицу недеформированной и деформированной площадей соответственно ($t^{ij} = \sqrt{G}\sigma^{ij}$), $\hat{n}_i$ — компоненты единич-

ной нормали к dA_0 и n_i — ковариантные компоненты единичной нормали к dA. Таким образом,

$$\mathbf{s}_N = \int_{A_{0(e)}} t^{ij}\hat{n}_i \mathbf{G}_j \psi_N \, dA_0 = \int_{A_{(e)}} \sigma^{ij} n_i \mathbf{G}_j \psi_N \, dA, \tag{16.91}$$

или, с учетом (16.84),

$$\begin{aligned} \mathbf{s}_N &= \int_{A_{0(e)}} t^{ij}\hat{n}_i (\delta_{jm} + \psi_{M,j} u_m^M) \psi_N \, dA_0 \mathbf{i}_m = \\ &= \int_{A_{(e)}} \sigma^{ij} n_i (\delta_{jm} + \psi_{M,j} u_m^M) \psi_N \, dA \mathbf{i}_m. \end{aligned} \tag{16.92}$$

Важной особенностью теории деформирования твердых тел является то, что обычно предполагается известной форма тела в некоторой начальной конфигурации. Поэтому и естественно и удобно, как мы это уже и делали раньше, рассматривать движение тела и изучать его поведение относительно начальной отсчетной конфигурации. При этом декартовы компоненты обобщенной силы в узле N имеют вид

$$p_{Ni} = \int_{v_{0(e)}} \rho_0 \hat{F}_i \psi_N \, dv_0 + \int_{A_{0(e)}} \hat{S}^j (\delta_{ji} + \psi_{M,j} u_i^M) \psi_N \, dA_0, \tag{16.93}$$

где $\hat{S}^i = t^{ij}\hat{n}_i$.

Определение вклада объемных сил в p_{Ni} [см. (16.93)] не вызывает особых затруднений, поскольку компоненты $\hat{F}_i(\mathbf{x}, t)$ предполагаются заданными для всех значений $\mathbf{x}$ и t. Однако вычисление поверхностного интеграла в (16.93) требует некоторого внимания. Рассмотрим, например, случай, когда на поверхность конечного элемента действует нормальное усилие $q = q(\mathbf{x}, t)$, т. е. когда q — переменное давление. Результирующая сила на элементарной площадке dA деформированного элемента выражается так:

$$q \, dA \mathbf{n} = \hat{S}^j \mathbf{G}_j \, dA_0, \tag{16.94}$$

где $\mathbf{n} = n_i \mathbf{G}^i$ — единичный вектор нормали к dA.

Напомним, что

$$\sqrt{G^{(ii)}} n_i \, dA = dA_i, \qquad dA_0 \hat{n}_i = dA_{0i}, \tag{16.95а, б}$$

$$dA_i = \sqrt{GG^{(ii)}} \, dA_{0i}, \tag{16.95в}$$

где dA_i и dA_{0i} — проекции dA и dA_0 на координатные поверхности в деформированном и недеформированном теле соответственно. Подставляя (16.95) в (16.94), после некоторых выкладок находим,

что

$$\hat{S}^j = q\sqrt{G}\, G^{jk}\hat{n}_k, \tag{16.96}$$

где для данного конечного элемента

$$\begin{gathered} G_{kj}^{(e)} = (\delta_{ik} + \psi_{N,k} u_i^N)(\delta_{ij} + \psi_{M,j} u_i^M), \\ G^{(e)} = \det G_{kj}^{(e)}, \qquad G_{(e)}^{kj} = (G_{kj}^{(e)})^{-1}. \end{gathered} \tag{16.97}$$

Таким образом, если не учитывать объемных сил, мы получаем в этом случае из (16.93)

$$p_{Ni} = \int\limits_{A_{0(e)}} q\sqrt{G}\, G^{jk}\hat{n}_k (\delta_{ji} + \psi_{M,j} u_i^M)\,\psi_N\, dA_0. \tag{16.98}$$

Для симплексных моделей удобно предположить, что $\rho_0\hat{F}_i$ и $\hat{S}^j$ постоянны в каждом элементе. Тогда (16.93) сводится к

$$p_{Ni} = \rho_0 \hat{F}_i m_N + \hat{S}^j (\delta_{ji} + b_{Mj} u_i^M)\, m_N^{(A_0)}, \tag{16.99}$$

где m_N — момент первого порядка, задаваемый формулой (16.70), и

$$m_N^{(A_0)} = \int\limits_{A_{0(e)}} \psi_N\, dA_0. \tag{16.100}$$

Если величина q в (16.98) тоже постоянна, то для такого типа нагружения

$$p_{Ni} = q\sqrt{G}\, G^{jk}\hat{n}_k (\delta_{ji} + \psi_{M,j} u_i^M)\, m_N^{(A_0)}. \tag{16.101}$$

Аппроксимации[1]). Выражения (16.93) и (16.99) показывают, что даже в случае относительно простых нагружения и геометрии конечного элемента обобщенные узловые силы являются достаточно сложными функциями узловых перемещений. Поэтому естественно попытаться найти упрощенные приближенные выражения для этих сил. Опишем один довольно общий метод аппроксимации, заключающийся в представлении деформированной поверхности произвольного элемента в виде совокупности плоских треугольных или четырехугольных элементов, нагрузка на которые предполагается равномерно распределенной.

Рассмотрим поверхность конечного элемента произвольного вида (типа показанной на рис. 16.2), испытывающую большие перемещения и искажения формы, вызванные произвольной системой поверхностных усилий.

Объемные силы мы не рассматриваем, поскольку они легко учитываются с помощью (16.88). Безотносительно к действительному виду локального поля перемещений $u_i = \psi_N u_i^N$ деформирован-

---

1) Мы следуем здесь работе Одена [1970г].

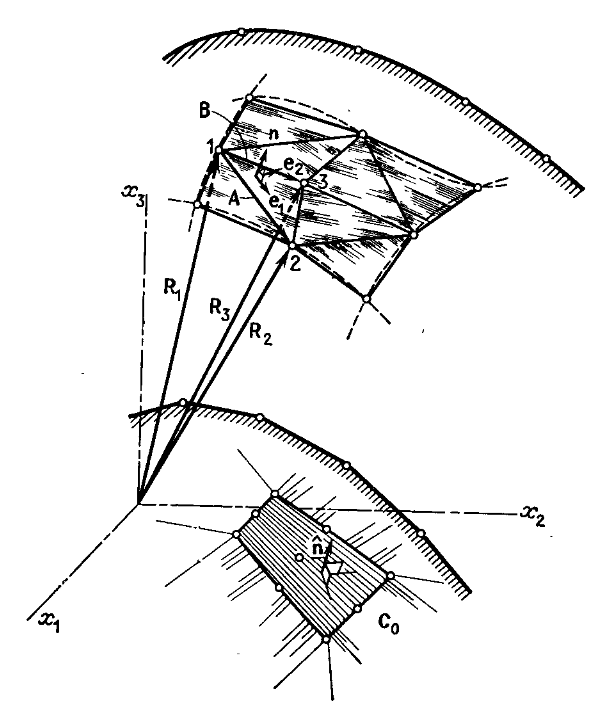


Рис. 16.2. Аппроксимация деформированной поверхности элемента.

ную поверхность представим совокупностью плоских элементов, как правило треугольной формы, узловые точки которых совпадают с узловыми точками недеформированной поверхности элемента. Приложенные поверхностные усилия будем предполагать равномерно распределенными на каждом плоском элементе. Если элемент достаточно мал, то, используя множество его подэлементов, можно обеспечить хорошую аппроксимацию для достаточно произвольных нагрузок. Сосредоточим наше внимание на типичном плоском треугольном подэлементе площади a. Пусть $\mathbf{n}$, $\mathbf{e}_1$ и $\mathbf{e}_2$ — ортонормальная тройка векторов, причем $\mathbf{n}$ есть нормаль к a в деформированном элементе. Результирующую силу, действующую на a, можно записать в виде

$$\mathbf{S} = a\,(q_0\mathbf{n} + S_1\mathbf{e}_1 + S_2\mathbf{e}_2), \qquad (16.102)$$

где q_0, S_1 и S_2 — заданные постоянные нормальные и касательные компоненты поверхностной силы на единицу деформированной площади a. Предположим, что треугольная поверхность, на которой действует сила S, проходит через узлы 1, 2 и 3 деформированной поверхности элемента. С помощью приема, аналогичного

использованному при выводе различных форм условия несжимаемости в предыдущем пункте, найдем, что радиус-векторы смещенных положений узлов 1, 2 и 3 относительно начальной конфигурации равны суть

$$\mathbf{R}^N = \mathbf{r}^N + \mathbf{u}^N = (x_i^N + u_i^N)\,\mathbf{i}_i, \qquad i,\ N = 1,\ 2,\ 3. \qquad (16.103)$$

Две стороны нашего треугольника образованы векторами

$$\mathbf{A} = \mathbf{R}^2 - \mathbf{R}^1 \quad \text{и} \quad \mathbf{B} = \mathbf{R}^3 - \mathbf{R}^1, \qquad (16.104)$$

так что площадь его поверхности задается формулой

$$a = \frac{1}{2}\,|\mathbf{A}\times\mathbf{B}| = \frac{1}{2}\sqrt{A_iA_iB_jB_j - A_iB_iA_jB_j}, \qquad (16.105)$$

а единичная нормаль $\mathbf{n}$ — формулой

$$\mathbf{n} = \frac{1}{2a}\,\mathbf{A}\times\mathbf{B} = \frac{1}{2a}\,\varepsilon^{ijk}A_iB_j\mathbf{i}_k. \qquad (16.106)$$

Если, например, взять

$$\mathbf{e}_1 = \frac{\mathbf{A}}{|\mathbf{A}|} = \frac{\mathbf{A}}{\sqrt{A_iA_i}}, \qquad (16.107)$$

то

$$\mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_1\times\mathbf{n} = \frac{1}{2}\,a\,[(\mathbf{e}_1\cdot\mathbf{B})\,\mathbf{A} - |\mathbf{A}|\,\mathbf{B}] \qquad (16.108)$$

и (16.102) сведется к

$$\mathbf{S} = \frac{1}{2}\left[q_0\mathbf{A}\times\mathbf{B} + \frac{1}{|\mathbf{A}|}(2aS_1 + \mathbf{A}\cdot\mathbf{B}S_2)\,\mathbf{A} - S_2\,|\mathbf{A}|\,\mathbf{B}\right]. \qquad (16.109)$$

Соответствующие обобщенные силы $\hat{\mathbf{p}}_N$ можно теперь получить, просто равномерно распределив $\mathbf{S}$ по всем узлам, так что $\hat{\mathbf{p}}_N = \frac{1}{3}\,\mathbf{S}$ ($N = 1, 2, 3$). Можно поступить по-другому и положить $\hat{\mathbf{p}}_N = \mathbf{S}m_N^{(a)}$, где

$$m_N^{(a)} = \int_a (a_N + b_{Ni}x^i)\,da.$$

Поскольку первый способ проще, воспользуемся им и запишем

$$\hat{p}_{Nk} = \frac{1}{6}\Big\{q_0\varepsilon_{ijk}\,(x_i^2 + u_i^2 - x_i^1 - u_i^1)\,(x_j^3 + u_j^3 - x_j^1 - u_j^1) +$$
$$+ \frac{2aS_1 + S_2\,(x_i^2 + u_i^2 - x_i^1 - u_i^1)\,(x_i^3 + u_i^3 - x_i^1 - u_i^1)}{[(x_r^2 + u_r^2 - x_r^1 - u_r^1)\,(x_r^2 + u_r^2 - x_r^1 - u_r^1)]^{1/2}}\times$$
$$\times(x_k^2 + u_k^2 - x_k^1 - u_k^1) - S_2\,[(x_r^2 + u_r^2 - x_r^1 - u_r^1)\times$$
$$\times(x_r^2 + u_r^2 - x_r^1 - u_r^1)]^{1/2}\,(x_k^3 + u_k^3 - x_k^1 - u_k^1)\Big\} \qquad (16.110)$$

для всех N ($N = 1, 2, 3$).

Подчеркнем, что силы $\hat{\mathbf{p}}_N$ не следует путать с обобщенными силами $\mathbf{p}_N$, фигурирующими в жесткостных соотношениях для элемента. Если на внешней нагруженной поверхности находятся R узлов элемента, то результирующая локальная обобщенная сила в узле N элемента определяется формулой

$$\mathbf{p}_N = \sum_{e=1}^{E'} \overset{(e)}{\Omega}{}_N^{N'} \hat{\mathbf{p}}_{N'}, \qquad (16.111)$$

где E' — число плоских подобластей, использованных в представлении поверхности элемента, $N = 1, 2, \ldots, R$ и $N' = 1, 2, 3$. Отметим также, что не всегда возможно или удобно определять $\mathbf{e}_1$ соотношением (16.107). В зависимости от характера приложенной нагрузки для $\mathbf{e}_1$ можно использовать и другие определения. Фактически базисные векторы $\mathbf{e}_1$ и $\mathbf{e}_2$ в плоскости a не обязательно должны быть ортогональны и можно просто принять $\mathbf{e}_1 = \mathbf{A}/|\mathbf{A}|$ и $\mathbf{e}_2 = \mathbf{B}/|\mathbf{B}|$. В этом случае (16.110) сводится к

$$\hat{p}_{Nk} = \frac{1}{6}\Big[q_0\varepsilon_{ijk}(x_i^2+u_i^2-x_i^1-u_i^1)(x_j^3+u_j^3-x_j^1-u_j^1) + \frac{aS_1^*(x_k^2+u_k^2-x_k^1-u_k^1)}{|\mathbf{A}|} + \frac{aS_2^*(x_k^3+u_k^3-x_k^1-u_k^1)}{|\mathbf{B}|}\Big], \qquad (16.112а)$$

где S_1^* и S_2^* — компоненты вектора $\mathbf{S}/a$ по направлениям $\mathbf{e}_1$ и $\mathbf{e}_2$, а

$$|\mathbf{A}| = [(x_r^2+u_r^2-x_r^2-u_r^1)(x_r^2+u_r^2-x_r^1-u_r^1)]^{1/2}, \qquad (16.112б)$$

$$|\mathbf{B}| = [(x_r^3+u_r^3-x_r^1-u_r^1)(x_r^3+u_r^3-x_r^1-u_r^1)]^{1/2}. \qquad (16.112в)$$

В важном частном случае, когда $\mathbf{S} = q_0 a\mathbf{n}$ — равномерно распределенная нормальная сила, получаются особенно простые выражения для обобщенных сил $\mathbf{p}_n$:

$$\hat{p}_{Nk} = \frac{1}{6} q_0\varepsilon_{ijk}(x_i^2+u_i^2-x_i^1-u_i^1)(x_j^3+u_j^3-x_j^1-u_j^1). \qquad (16.113)$$

Описанный выше способ можно использовать и в двумерных задачах. При этом криволинейная граница деформированного тела заменяется совокупностью прямолинейных отрезков, как показано на рис. 16.3. Если $\mathbf{S}$ — приложенное к поверхности равномерно распределенное усилие на единицу длины, а $\mathbf{n}$ и $\mathbf{e}$ — единичные векторы, нормальный и касательный к деформированной поверхности, то

$$\mathbf{S} = L^*(q_0\mathbf{n} + S\mathbf{e}). \qquad (16.114)$$

Здесь q_0 и S — нормальное и касательное усилия на единицу длины, а

$$L^* = |\mathbf{R}^2 - \mathbf{R}^1| = [(x_\alpha^2+u_\alpha^2-x_\alpha^1-u_\alpha^1)(x_\alpha^2+u_\alpha^2-x_\alpha^1-u_\alpha^1)]^{1/2}, \qquad (16.115)$$

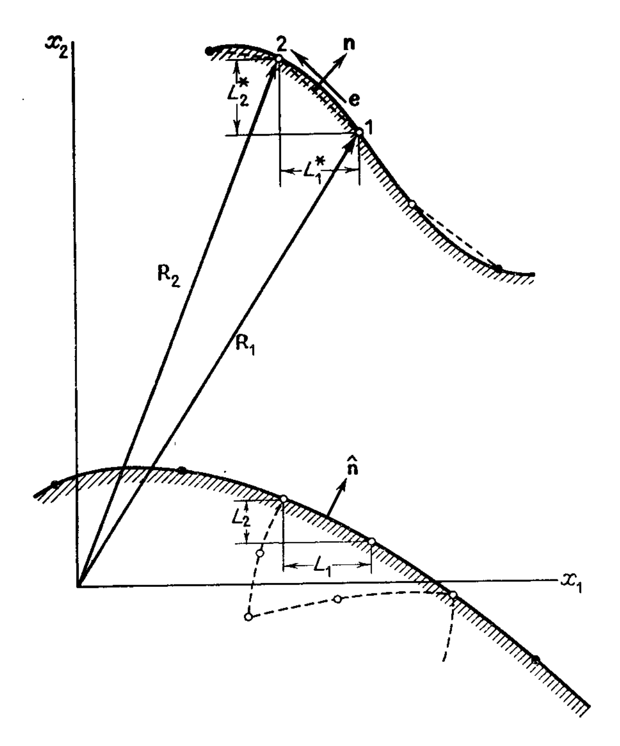


Рис. 16.3. Аппроксимация деформированной границы двумерного тела.

где $\alpha = 1,\ 2$. Нетрудно убедиться, что

$$\mathbf{n} = \frac{1}{L^*}(L_2^* \mathbf{i}_1 + L_1^* \mathbf{i}_2), \tag{16.116а}$$

$$\mathbf{e} = \frac{-1}{L^*}(L_1^* \mathbf{i}_1 - L_2^* \mathbf{i}_2), \tag{16.116б}$$

где

$$L_1^* = L_1 + u_1^2 - u_1^1, \qquad L_2^* = L_2 + u_2^2 - u_2^1. \tag{16.116в}$$

Здесь $L_1 = x_1^2 - x_1^1$, $L_2 = x_2^2 - x_2^1$ — проекции линии, соединяющей узлы 1 и 2, на оси x_1 и x_2 недеформированного элемента. Соответствующие обобщенные силы равны

$$\begin{aligned} \hat{p}_{N1} &= \frac{1}{2}\left[q_0 (L_2 + u_2^2 - u_2^1) - S (L_1 + u_1^2 - u_1^1)\right], \\ \hat{p}_{N2} &= \frac{1}{2}\left[q_0 (L_1 + u_1^2 - u_1^1) + S (L_2 + u_2^2 - u_2^1)\right] \end{aligned} \tag{16.117}$$

для каждого N ($N = 1, 2$). В частном случае одной нормальной нагрузки ($S = 0$) эти формулы сводятся к

$$\hat{p}_{N\alpha} = \frac{q_0}{2}(-1)^{(\alpha)} \varepsilon_{\beta\alpha} L^*_\beta, \tag{16.118}$$

где $\alpha, \beta = 1, 2$ и $\varepsilon_{\alpha\beta}$ — двумерный перестановочный символ.

Напряжения [1]. После определения узловых перемещений U_i^Δ и $\overset{N}{u}_{i(e)}$ локальные выражения для деформаций и энергии деформации можно получить, подставляя локальные поля перемещений в соотношения, связывающие между собой деформации и перемещения, и затем подставляя результат в соответствующие локальные выражения для функции энергии деформации элемента. Напряжения элемента могут быть вычислены с помощью уравнений состояния (15.1) и (15.36). Однако вычисленные таким образом напряжения в общем случае будут иметь конечные разрывы на межэлементных границах и в лучшем случае будут лишь грубыми средними значениями действительных напряжений элемента. Непрерывное распределение напряжений можно легко получить, используя введенное в § 9 понятие сопряженно-аппроксимационных функций.

Пусть $t^{ij}_{(e)}$ — локальный тензор напряжений элемента e, определяемый локальными уравнениями состояния для элемента (например, для гиперупругих элементов $t^{ij}_{(e)} = \partial W^{(e)}/\partial \gamma^{(e)}_{ij}$). Разрывное распределение напряжений в связанной модели, порождаемое этими локальными напряжениями, описывается всюду, за исключением множества меры нуль, формулой

$$\overline{T}^{ij} = \sum_{e=1}^{E} t^{ij}_{(e)}(\mathrm{x}, t). \tag{16.119}$$

Здесь предполагается, что преобразования от локальных координат к глобальным уже осуществлены. Будучи разрывными, глобальные напряжения $\overline{T}^{ij} = \overline{T}^{ij}(\mathrm{X}, t)$ не принадлежат конечномерному подпространству Φ или его сопряженному Φ^*, порождаемым глобальными базисными функциями $\Phi_\Delta(\mathrm{X})$ или $\Phi^\Delta(\mathrm{X})$ соответственно. Однако легко можно вычислить проекцию $T^{ij} = \Pi \overline{T}^{ij}$ напряжения $\overline{T}^{ij}$ на сопряженное пространство Φ^*:

$$T^{ij} = T^{ij}_\Delta \Phi^\Delta(\mathrm{X}), \tag{16.120}$$

где

$$T^{ij}_\Delta = \langle \overline{T}^{ij}, \Phi_\Delta \rangle = \int_{\overline{\mathscr{R}}} \overline{T}^{ij} \Phi_\Delta \, d\mathscr{R}, \tag{16.121}$$

[1]) См. Оден и Браули [1971а], а также Оден и Ки [1971а].

причем интегрирование производится по всей связанной области. Величины T^{ij}_{Δ} ($\Delta = 1, 2, \ldots, G$) называются *согласующимися компонентами напряжения в узле* Δ *связанной конечноэлементной модели*.

Локальные формы соотношения (16.120) можно получить, вспомнив, что [1])

$$\Phi_{\Delta}(\mathrm{X}) = \sum_{e} \overset{(e)}{\Omega}{}^{N}_{\Delta} \psi^{(e)}_{N}(\mathbf{x}) \quad \text{и} \quad \Phi^{\Delta}(\mathrm{X}) = C^{\Delta\Gamma}\Phi_{\Gamma}(\mathrm{X}), \tag{16.122а, б}$$

где $C^{\Delta\Gamma}$ — матрица, обращенная к $C_{\Delta\Gamma}$, а

$$C_{\Delta\Gamma} = \langle \Phi_{\Delta}, \Phi_{\Gamma} \rangle. \tag{16.122в}$$

Для типичного конечного элемента полагаем

$$t^{ij}_{N(e)} = \langle t^{ij}_{(e)}, \psi_N \rangle = \int_{v_{0(e)}} t^{ij}_{(e)} \psi_N \, dv_0 \tag{16.123}$$

и получаем [2]) локальную аппроксимацию

$$\bar{t}^{ij}_{(e)} = t^{ij}_{N(e)} \psi^{N}_{(e)}(\mathbf{x}), \tag{16.124}$$

где в соответствии с (9.154) и (9.155)

$$\psi^{N}_{(e)}(\mathbf{x}) = \overset{(e)}{\Omega}{}^{N}_{\Delta} \Phi^{\Delta}(\mathrm{X}) = \overset{(e)}{\Omega}{}^{N}_{\Delta} C^{\Delta\Gamma} \sum_{f=1}^{E} \overset{(f)}{\Omega}{}^{M}_{\Gamma} \psi^{(f)}_{M}(\mathbf{x}). \tag{16.125}$$

В приложениях локальные поля (16.124) играют второстепенную роль, поскольку согласующиеся напряжения в каждом узле можно получить непосредственно из (16.121).

16.4. ФОРМУЛИРОВКИ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ПОТЕНЦИАЛЬНОЙ ЭНЕРГИИ

Во многих случаях удобно переформулировать конечноэлементные постановки задач теории упругости в терминах полной потенциальной энергии каждого конечного элемента. Возвращаясь к нелинейному жесткостному соотношению (16.4) для гиперупругих элементов, заметим, что если обе его стороны умножить на произвольную вариацию δu^N_i узловых перемещений, то получим

$$\int_{v_{0(e)}} \frac{dW}{\partial \gamma_{kj}} \psi_{N,j} (\delta_{ki} + \psi_{M,k} u^M_i) \, \delta u^N_i \, dv_0 = p_{Ni} \delta u^N_i. \tag{16.126}$$

[1]) См. (9.138), (9.144) и (9.148).
[2]) См. (9.153).

А так как

$$\delta U_{(e)} = \int\limits_{v_{0(e)}} \delta W_{(e)}\, dv_0 = \int\limits_{v_{0(e)}} \frac{\partial W_{(e)}}{\partial u_i^N} \delta u_i^N\, dv_0 =$$

$$= \int\limits_{v_{0(e)}} \frac{\partial W_{(e)}}{\partial \gamma_{kj}} \frac{\partial \gamma_{kj}}{\partial u_i^N} \delta u_i^N\, dv_0 =$$

$$= \int\limits_{v_{0(e)}} \frac{\partial W_{(e)}}{\partial \gamma_{kj}} \psi_{N,j} (\delta_{ki} + \psi_{M,k} u_i^M)\, \delta u_i^N\, dv_0, \quad (16.127)$$

мы видим, что входящий в (16.126) интеграл можно рассматривать как вариацию полной энергии деформации элемента, обусловленную вариацией обобщенных перемещений u_i^N. Таким же образом, если записать

$$\delta V_{(e)} = -p_{Ni} \delta u_i^N, \quad (16.128)$$

то выражение в правой части (16.126) оказывается вариацией локальной потенциальной энергии внешних сил $V_{(e)} = -p_{Ni} u_i^N$. Ясно, конечно, что в действительности потенциал $V_{(e)}$ может не существовать, тем не менее $V_{(e)}$ в (16.128) можно искусственно трактовать как потенциал, если использовать надлежащие обобщенные силы, обсуждением которых мы занимались в предыдущем пункте, и если считать эти силы не зависящими от вариаций u_i^N. При этих условиях соотношение (16.126) можно переписать так:

$$\delta \pi^{(e)} = \frac{\partial \pi^{(e)}}{\partial u_i^N} \delta u_i^N = 0, \quad (16.129)$$

где $\pi^{(e)}$ — полная потенциальная энергия элемента e:

$$\pi^{(e)} = U_{(e)} + V_{(e)} = \int\limits_{v_{0(e)}} W_{(e)}\, dv_0 - p_{Ni} u_i^N. \quad (16.130)$$

Жесткостное соотношение для типичного элемента принимает вид

$$\frac{\partial \pi^{(e)}}{\partial u_i^N} = 0 = \int\limits_{v_{0(e)}} \frac{\partial W_{(e)}}{\partial u_i^N} dv_0 - p_{Ni}, \quad (16.131)$$

а полная потенциальная энергия всей совокупности элементов равняется

$$\Pi = \sum_{e=1}^{E} \pi^{(e)} = U + V, \quad (16.132)$$

где

$$U = \sum_{e=1}^{E} U_{(e)}, \qquad V = \sum_{e=1}^{E} V_{(e)}. \quad (16.133)$$

Поскольку

$$u^N_{i(e)} = \overset{(e)}{\Omega}{}^N_\Delta U^\Delta_i \quad \text{и} \quad P_{\Delta i} = \sum_{e=1}^{E} \overset{(e)}{\Omega}{}^N_\Delta p^{(e)}_{Ni}, \tag{16.134}$$

ясно, что

$$V = -\sum_e p^{(e)}_{Ni} u^N_{i(e)} = -\sum_e \overset{(e)}{\Omega}{}^N_\Delta p^{(e)}_{Ni} U^\Delta_i = -P_{\Delta i} U^\Delta_i. \tag{16.135}$$

Следовательно,

$$\Pi = \sum_{e=1}^{E} \int_{v_{0(e)}} W_{(e)}\, dv_0 - P_{\Delta i} U^\Delta_i. \tag{16.136}$$

Глобальные жесткостные соотношения получаются из условий равновесия

$$\delta\Pi = \frac{\partial\Pi}{\partial U^\Delta_i} \delta U^\Delta_i = 0, \tag{16.137}$$

из которых вытекает, что

$$\frac{\partial\Pi}{\partial U^\Delta_i} = 0 = \sum_{e=1}^{E} \int_{v_{0(e)}} \frac{\partial W_{(e)}}{\partial u^N_{k(e)}} \frac{\partial u^N_{k(e)}}{\partial U^\Delta_i} dv_0 - P_{\Delta i}. \tag{16.138}$$

Так как

$$\frac{\partial u^N_{k(e)}}{\partial U^\Delta_i} = \overset{(e)}{\Omega}{}^N_\Delta \delta_{ki}, \tag{16.139}$$

видно, что (16.138) можно переписать в виде

$$P_{\Delta i} = \sum_{e=1}^{E} \overset{(e)}{\Omega}{}^N_\Delta \int_{v_{0(e)}} \frac{\partial W_{(e)}}{\partial \gamma_{kj}} \psi_{N,j} (\delta_{ki} + \psi_{M,k} \overset{(e)}{\Omega}{}^M_\Gamma U^\Gamma_i)\, dv_0, \tag{16.140}$$

что согласуется с (16.33).

Для несжимаемых материалов надо использовать вместо $W_{(e)}$ видоизмененную функцию энергии деформации $\overline{W} = W_{(e)} + h(I_3 - 1)$. При этом

$$\overline{\Pi} = \sum_{e=1}^{E} \int_{v_{0(e)}} [W_{(e)} + h(I_3 - 1)]\, dv_0 - P_{\Delta i} U^\Delta_i, \tag{16.141}$$

и условие $\delta\overline{\Pi} = 0$ приводит к уравнениям равновесия и к условиям несжимаемости. Действительно, если $h = h^N \psi_N$, то

$$\delta\overline{\Pi} = \frac{\partial\overline{\Pi}}{\partial u^N_i} \delta u^N_i + \frac{\partial\overline{\Pi}}{\partial h^N} \delta h^N = 0, \tag{16.142}$$

откуда следует, что и $\partial\overline{\Pi}/\partial u_i^N$, и $\partial\overline{\Pi}/\partial h^N$ равны нулю. Условие $\partial\overline{\Pi}/\partial u_i^N = 0$ дает (16.57), а в соотношении

$$\frac{\partial\overline{\Pi}}{\partial h^N} = \int\limits_{v_{0(e)}} \psi_N (I_3 - 1)\, dv_0 = (\text{iii})_N = 0 \qquad (16.143)$$

мы узнаем условие несжимаемости (16.60).

При рассмотрении динамических явлений строится локальный потенциал Лагранжа $l_{(e)}$ для каждого элемента путем вычитания $\pi^{(e)}$ из кинетической энергии:

$$l_{(e)} = \varkappa_{(e)} - \pi^{(e)} = \frac{1}{2} m_{NM} \dot{u}_i^N \dot{u}_i^M - \pi^{(e)}. \qquad (16.144)$$

Глобально

$$L = \sum_{e=1}^{E} l_{(e)} = \varkappa - \Pi = \frac{1}{2} M_{\Delta\Gamma} \dot{U}_i^\Delta \dot{U}_i^\Gamma - \Pi. \qquad (16.145)$$

Минимизация интеграла действия A [см. (15.33)] приводит к уравнениям движения Лагранжа:

$$\frac{d}{dt} \frac{dL}{\partial \dot{U}_i^\Delta} - \frac{\partial L}{\partial U_i^\Delta} = 0, \qquad (16.146)$$

которые для совокупности конечных элементов имеют вид

$$M_{\Delta\Gamma} \ddot{U}_i^\Gamma + \frac{\partial \Pi}{\partial U_i^\Delta} = 0. \qquad (16.147)$$

Здесь $\partial\Pi/\partial U_i^\Delta$ равно правой части соотношения (16.138). В (16.147), конечно, $\partial\Pi/\partial U_i^\Delta \neq 0$ и $U_i^\Delta = U_i^\Delta(t)$.

16.5. УРАВНЕНИЯ В ПРИРАЩЕНИЯХ [1]

В этом пункте мы займемся важной задачей вывода уравнений движения конечного элемента в приращениях. Временно снимем ограничение упругости и вернемся к общему случаю движения элемента произвольной сплошной среды. Затем мы посмотрим, какой специальный вид примут наши уравнения в случае упругого поведения элемента при приращении воздействий.

---

[1]) Основные идеи, используемые при выводе линейных форм уравнений в приращениях, описывающих поведение деформируемых тел, принадлежат Коши [1829] и Сен-Венану [1868]; в последующем их неоднократно выдвигали заново. Современное полное изложение теории деформаций при приращениях дано Био [1965]. Техника приращений широко применяется в приложениях метода конечных элементов. Впервые она была использована Тэрнером [1959] и Аргирисом [1959] при исследованиях с помощью метода конечных элементов геометрически нелинейных задач теории упругости и упругой устойчивости. Обзор относящихся сюда работ вплоть до 1965 г. сделан Мартином [1966б]. Многие из конечноэлементных формулировок в приращениях, полученные до 1968 г., неполны, поскольку они не учитывают надлежащим образом изме-

Общие уравнения. Уравнения движения конечного элемента для случая больших деформаций и произвольных свойств материала в существенной степени нелинейны. Однако во многих приложениях удобно рассматривать линеаризованные формы этих уравнений относительно малых возмущений движения, наложенных на произвольное движение элемента. Такие формы уравнений в приращениях оказываются особенно полезными в задачах статической и динамической устойчивости, пластичности и задачах о статическом и квазистатическом поведении упругих тел.

Рассмотрим движение типичного конечного элемента, переводящее его к моменту времени t из начальной конфигурации $C_{0(e)}$ в конфигурацию $C_t^{(e)}$. В более поздний момент времени $t+\Delta t$ элемент будет занимать конфигурацию $C_{t+\Delta t}^{(e)}$, близкую к $C_t^{(e)}$. Пусть $\overset{0}{u}{}_i^N$, t_0^{ij}, S_i^0, $\hat{F}_i^0$ и u_i^N, t^{ij}, $\overline{S}_i$, $\hat{F}_i$ — узловые перемещения, напряжения, поверхностные усилия и объемные силы в конфигурациях $C_t^{(e)}$ и $C_{t+\Delta t}^{(e)}$ соответственно. Тогда

$$u_i^N = \overset{0}{u}{}_i^N + \zeta_i^N, \qquad t^{ij} = t_0^{ij} + s^{ij},$$
$$\overline{S}_i = S_i^0 + R_i, \qquad \hat{F}_i = \hat{F}_i^0 + B_i, \tag{16.148}$$

где ξ_i^N, s^{ij}, R_i и B_i — приращения величин $\overset{0}{u}{}_i^N$, t_0^{ij}, S_i^0 и $\hat{F}_i^0$ при движении из $C_t^{(e)}$ в $C_{t+\Delta t}^{(e)}$.

Под $\overline{S}_i$ здесь понимаются декартовы компоненты поверхностного усилия на единицу начальной (недеформированной) площади, отнесенные к начальной конфигурации $C_{0(e)}$, т. е. в соответствии с (16.92) и (16.93):

$$\overline{S}_i = t^{mj}\hat{n}_m(\delta_{ji} + \psi_{M,j}u_i^M) = \hat{S}^j(\delta_{ji} + \psi_{M,j}u_i^M). \tag{16.149}$$

Таким образом, если

$$S_i^0 = \hat{S}_0^j(\delta_{ji} + \psi_{M,j}\overset{0}{u}{}_i^M), \tag{16.150}$$

то

$$\overline{S}_i = (\hat{S}_0^j + \delta\hat{S}^j)\,[\delta_{ji} + \psi_{M,j}(\overset{0}{u}{}_i^M + \zeta_i^M)], \tag{16.151}$$

нений нагружения и поворотов элемента. Относительно общие формы уравнений в приращениях для конечных элементов были получены Ягмаи [1968], Хиббитом, Марклом и Райсом [1970], Оденом [1969в, 1970б] и Мартином [1970]. Обзор результатов можно найти у Одена [1969в], Мартина [1970] и Каваи [1970]. В настоящем пункте материал излагается по работе Одена и Ки [1971б].

где приращения $\delta\hat{S}^j$ величин $\hat{S}^j$ в общем случае также являются функциями от $\overset{0}{u}{}_i^M$, ζ_i^M и изменяются в процессе нагружения. Например, в случае равномерного давления q_0 из (16.96) вытекает, что

$$\delta\hat{S}^j = \delta q_0 \sqrt{G_0}\, G_0^{kj}\hat{n}_k + q_0 \left[(\delta\sqrt{G})\, G_0^{kj}\hat{n}_k + \sqrt{G_0}\,(\delta G^{kj})\,\hat{n}_k\right] + O(\varepsilon^2), \tag{16.152}$$

где G_0 и G_0^{kj} — детерминант и контравариантные компоненты тензора деформации в $C_t^{(e)}$; δq_0, $\delta\sqrt{G}$ и δG^{kj} — приращения величин q_0, $\sqrt{G}$ и G^{kj}, причем q_0 считается заданным, а $\delta\sqrt{G}$ и δG^{kj} обусловлены приращениями деформации. Слагаемое $O(\varepsilon^2)$ обозначает члены высшего порядка относительно приращений δq_0, δG и δG^{kj}. Поскольку в общем случае можно положить

$$\delta\sqrt{G} = \frac{\partial\sqrt{G(\mathbf{x}, \overset{0}{u}{}_i^M)}}{\partial u_i^N}\,\delta\zeta_i^N, \qquad \delta G^{kj} = \frac{\partial G^{kj}(\mathbf{x}\overset{0}{u}{}_i^M)}{\partial u_i^N}\,\delta\zeta_i^N, \tag{16.153}$$

члены в квадратных скобках в (16.152) являются линейными функциями от ζ_i^N. Поэтому с точностью до членов первого порядка относительно приращений узловых перемещений и приложенных нагрузок мы можем представить $\delta\hat{S}^j$ следующим образом:

$$\delta\hat{S}^j = Q_i^j(\overset{0}{u}{}_i^M,\ T_0^i)\,\delta T^i + P_M^{ji}(\overset{0}{u}{}_i^M,\ T_0^i)\,\zeta_i^M. \tag{16.154}$$

Здесь T_0^i — действительные заданные усилия в конфигурации $C_t^{(e)}$, не зависящие от деформации, δT^i — заданное приращение величины T_0^i, а Q_i^j и P_M^{ji} — функции, определяемые только состоянием тела в $C_t^{(e)}$ (до приложения приращений δT^i). Из (16.150) и (16.151) вытекает, что

$$\begin{aligned} R_i &= \bar{S}_i - S_i^0 = \\ &= \hat{S}_0^j \psi_{M,j}\zeta_i^M + (\delta_{ji} + \psi_{M,j}\overset{0}{u}{}_i^M)\,(Q_r^j\delta T^r + P_M^{jr}\zeta_r^M). \end{aligned} \tag{16.155}$$

Значит, обобщенные узловые силы в $C_{t+\Delta t}^{(e)}$ можно представить в виде

$$P_{Ni} = p_{Ni}^0 + r_{Ni}, \tag{16.156}$$

где

$$p_{Ni}^0 = \int\limits_{v_{0(e)}} \rho_0 \hat{F}_i^0\, \psi_N\, dv_0 + \int\limits_{A_{0(e)}} \hat{S}_0^j\,(\delta_{ji} + \psi_{M,j}\overset{0}{u}{}_i^M)\,\psi_N\, dA_0 \tag{16.157}$$

и

$$r_{Ni}=\int\limits_{v_{0(e)}}\rho_0 B_i\psi_N\,dv_0+\int\limits_{A_{0(e)}}[\hat{S}_0^j\psi_{M,\,j}\delta_{ri}+(\delta_{ji}+\psi_{R,\,j}\overset{0}{u}{}_i^R)\,P_M^{jr}]\times$$

$$\times\,\psi_N\,dA_0\zeta_r^M+\int\limits_{A_{0(e)}}\psi_N(\delta_{ji}+\psi_{M,\,j}\overset{0}{u}{}_i^M)\,Q_r^j\delta T^r\,dA_0. \qquad (16.158)$$

Возвращаясь к общим уравнениям движения (13.60), подставим туда (16.148) и (16.156). Получим уравнение

$$m_{NM}(\ddot{\overset{0}{u}}{}_i^M+\ddot{\zeta}_i^M)+\int\limits_{v_{0(e)}}(t_0^{mj}+s^{mj})\,\psi_{N,\,m}(\delta_{ji}+$$

$$+\psi_{M,\,j}\overset{0}{u}{}_i^M+\psi_{M,\,j}\zeta_i^M)\,dv_0=p_{Ni}^0+r_{Ni}, \qquad (16.159)$$

которое можно переписать так:

$$\Big[m_{NM}\ddot{\overset{0}{u}}{}_i^M+\int\limits_{v_{0(e)}}t_0^{mj}\psi_{N,\,m}(\delta_{ji}+\psi_{M,\,j}\overset{0}{u}{}_i^M)\,dv_0-p_{Ni}^0\Big]+m_{NM}\ddot{\zeta}_i^M+$$

$$+\int\limits_{v_{0(e)}}t_0^{mj}\psi_{N,\,m}\psi_{M,\,j}\,dv_0\zeta_i^M+\int\limits_{v_{0(e)}}s^{mj}\psi_{N,\,m}(\delta_{ji}+\psi_{M,\,j}\overset{0}{u}{}_i^M)\,dv_0+$$

$$+\int\limits_{v_{0(e)}}s^{mj}\psi_{N,\,m}\psi_{M,\,j}\,dv_0\zeta_i^M=r_{Ni}. \qquad (16.160)$$

Поскольку величины $\overset{0}{u}{}_i^M$, t_0^{ij} и p_{Ni}^0 должны удовлетворять уравнениям движения элемента, когда он находится в конфигурации $C_i^{(e)}$, выражение в квадратных скобках в (16.160) должно обращаться в нуль. Кроме того, последний интеграл в левой части (16.160) содержит произведение тензора приращений напряжений, линейных относительно ζ_i^N и их предысторий, на приращения узловых перемещений ζ_i^N. Следовательно, это слагаемое имеет порядок выше первого относительно приращений ζ_i^N и может быть опущено. Таким образом, мы приходим к системе линейных уравнений

$$m_{NM}\ddot{\zeta}_i^M+\int\limits_{v_{0(e)}}t_0^{mj}\psi_{N,\,m}\psi_{M,\,j}\,dv_0\zeta_i^M+$$

$$+\int\limits_{v_{0(e)}}s^{mj}\psi_{N,\,m}(\delta_{ji}+\psi_{M,\,j}\overset{0}{u}{}_i^M)\,dv_0=r_{Ni}. \qquad (16.161)$$

Это и есть общие уравнения движения конечного элемента в приращениях.

В общем случае тензор напряжений в любой частице является функционалом от градиентов деформации, их предысторий, температуры, ее предысторий и, возможно, градиентов температуры и т. д. В конечноэлементных моделях функционал реакции для напряжений может быть выражен в терминах узловых значений перемещений, температур и их предысторий и представляет собой функцию от $\mathbf{x}$ и, возможно, некоторых преимущественных направлений $\mathbf{d}_k$ в начальной конфигурации. Следовательно, тензор приращений напряжений s^{mj} можно определить как линейный функционал от значений и предысторий узловых перемещений, температур и т. д. Рассмотрим, например, специальный класс простых материалов, для которых

$$t^{ij} = \underset{s=0}{\overset{\infty}{\mathfrak{T}}}{}^{ij}\left(\mathbf{u}^{N(t)}(s)\right) \tag{16.162}$$

(зависимость от $\mathbf{x}$ явно не указана). Если предысториям $\mathbf{u}^{N(t)}(s)$ и текущим значениям узловых перемещений $\mathbf{u}^N$ сообщить малые вариации $\boldsymbol{\zeta}^{N(t)}(s)$ и $\boldsymbol{\zeta}^N$, то напряжение t^{ij} получит соответствующую вариацию s^{ij}, где

$$s^{ij} = \underset{s=0}{\overset{\infty}{\mathfrak{T}}}{}^{ij}\left(\mathbf{u}^{N(t)}(s) + \boldsymbol{\zeta}^{N(t)}(s)\right) - t^{ij}. \tag{16.163}$$

Если функционал $\underset{s=0}{\overset{\infty}{\mathfrak{T}}}{}^{ij}(\ )$ удовлетворяет надлежащим условиям гладкости, то можно записать

$$s^{ij} = \underset{s=0}{\overset{\infty}{\mathfrak{T}}}{}^{ij}\left(\mathbf{u}^{N(t)}(s)\right) + \delta \underset{s=0}{\overset{\infty}{\mathfrak{T}}}{}^{ij}\left(\mathbf{u}^{N(t)}(s) \mid \boldsymbol{\zeta}^{N(t)}(s)\right) + \ldots - t^{ij}, \tag{16.164}$$

где $\delta \underset{s=0}{\overset{\infty}{\mathfrak{T}}}{}^{ij}(\ |\ )$ — первая производная Фреше функционала $\underset{s=0}{\overset{\infty}{\mathfrak{T}}}{}^{ij}(\ )$, а вертикальная черта в аргументе функционала указывает, что производная линейна относительно следующей за чертой величины, в нашем случае — относительно предысторий $\boldsymbol{\zeta}^{N(t)}(s)$. Подставляя (16.162) в (16.163) и сохраняя лишь члены первого порядка по $\boldsymbol{\zeta}^N$ и $\boldsymbol{\zeta}^{N(t)}(s)$, убеждаемся, что s^{ij} является *линейным функционалом* от предысторий приращений узловых перемещений:

$$s^{ij} = \underset{s=0}{\overset{\infty}{\mathfrak{S}}}{}^{ij}\left(\mathbf{u}^{N(t)}(s) \mid \boldsymbol{\zeta}^{N(t)}(s)\right), \tag{16.165}$$

где

$$\underset{s=0}{\overset{\infty}{\mathfrak{S}}}{}^{ij}\left(\mathbf{u}^{N(t)}(s) \mid \boldsymbol{\zeta}^{N(t)}(s)\right) = \delta \underset{s=0}{\overset{\infty}{\mathfrak{T}}}{}^{ij}\left(\mathbf{u}^{N(t)}(s) \mid \boldsymbol{\zeta}^{N(t)}(s)\right). \tag{16.166}$$

Уравнения движения в приращениях (16.161) для конечных элементов материала рассматриваемого типа принимают вид

$$m_{NM}\ddot{\zeta}_i^M + \int\limits_{v_{0(e)}} \sum_{s=0}^{\infty} \mathfrak{T}^{mj}(\overset{0}{\mathbf{u}}^{N(t)}(s))\, \psi_{N,m}\psi_{M,j}\, dv_0 \zeta_i^M +$$

$$+ \int\limits_{v_{0(e)}} \sum_{s=0}^{\infty} \mathfrak{S}^{mj}(\overset{0}{\mathbf{u}}^{N(t)}(s) \,|\, \boldsymbol{\zeta}^{N(t)}(s))\, \psi_{N,m}(\delta_{ji} + \psi_{M,j}\overset{0}{u}{}_i^M)\, dv_0 = r_{Ni}. \quad (16.167)$$

Упругие элементы. В частном случае упругих конечных элементов тензор напряжений является функцией от текущих значений G_{ij} или γ_{ij}, и тензор приращений напряжений может быть представлен в виде линейной функции от приращений ζ_i^N. Рассмотрим, например, гиперупругий элемент, для которого функция энергии деформации $W(\gamma_{ij})$ аналитична относительно компонент деформации. Если $W(\gamma_{ij})$ — энергия деформации на единицу объема элемента в конфигурации $C_t^{(e)}$, то энергия деформации в произвольной близкой конфигурации $C_{t+\Delta t}^{(e)}$ равна

$$W(\gamma_{ij} + \delta\gamma_{ij}) = W(\gamma_{ij}) + \frac{\partial W}{\partial \gamma_{ij}}\delta\gamma_{ij} + \frac{1}{2!}\frac{\partial^2 W}{\partial \gamma_{ij}\partial \gamma_{kr}}\delta\gamma_{ij}\delta\gamma_{kr} + \ldots, \quad (16.168)$$

где $\delta\gamma_{ij}$ — вариация тензора деформации, обусловленная приращением величины u_k^N:

$$\delta\gamma_{ij} = \frac{\partial \gamma_{ij}}{\partial u_k^N}\zeta_k^N = \frac{1}{2}(\psi_{N,i}\delta_k^j + \psi_{N,j}\delta_k^i + \psi_{N,i}\psi_{M,j}\overset{0}{u}{}_k^M + \psi_{M,i}\psi_{N,j}\overset{0}{u}{}_k^M)\,\zeta_k^N. \quad (16.169)$$

Таким образом, тензор напряжений в возмущенной конфигурации имеет вид

$$t^{ij} = \frac{\partial W(\gamma_{ij} + \delta\gamma_{ij})}{\partial \gamma_{ij}} = \frac{\partial W}{\partial \gamma_{ij}} + \frac{\partial^2 W}{\partial \gamma_{ij}\partial \gamma_{mn}}\delta\gamma_{mn} + \ldots, \quad (16.170)$$

или, с точностью до членов первого порядка относительно приращений деформации,

$$t^{ij} = t_0^{ij} + \frac{\partial^2 W}{\partial \gamma_{ji}\partial \gamma_{mn}}\delta\gamma_{mn}, \quad (16.171)$$

где $t_0^{ij} = dW/\partial\gamma_{ij}$. Значит,

$$s^{ij} = t^{ij} - t_0^{ij} = C^{ijmn}\delta\gamma_{mn}, \quad (16.172)$$

где

$$C^{ijmn} = \frac{\partial^2 W}{\partial \gamma_{ij}\partial \gamma_{mn}}. \quad (16.173)$$

Замечая, что C^{ijmn} обладают следующими симметриями:

$$C^{ijmn} = C^{jimn} = C^{ijnm} = C^{mnij}, \tag{16.174}$$

и подставляя (16.169) в (16.172), получаем

$$s^{ij} = C^{ijmn}\psi_{N,m}\left(\delta_{nk} + \psi_{M,n}\overset{0}{u}{}^{M}_{k}\right)\zeta^{N}_{k}. \tag{16.175}$$

Итак, тензор приращений напряжений для упругого элемента является линейной функцией от приращений узловых перемещений, а также линеен относительно приращений деформаций $\delta\gamma_{ij}$. Однако *поведение при приращениях не является упругим в смысле классической (линейной) теории упругости, поскольку дополнительные напряжения зависят не только от дополнительной бесконечно малой деформации e_{ij}, но также от перемещений $\overset{0}{u}{}^{M}_{k}$* [1]. Действительно, если $C^{ijmn} = E^{ijmn}$, то предположение, что $s^{ij} = E^{ijmn}e_{mn}$, привело бы к выражению для напряжений $E^{ijmn}\psi_{N,m}\zeta^{N}_{n}$. Это отличается от правильного выражения на довольно значительную величину $E^{ijmn}\psi_{N,m}\psi_{M,n}\overset{0}{u}{}^{M}_{k}\zeta^{N}_{k}$, которая учитывает, в частности, влияние поворота элемента.

Приращение жесткостей. Часто оказывается удобным ввести матрицы (массивы) приращений жесткости, которые линейно действуют на приращения перемещений ζ^{N}_{i}. Обращаясь к (16.158), (16.161) и (16.175), введем следующие сокращенные обозначения:

$$\tilde{k}^{ik}_{NM} = \int_{v_{0(e)}} C^{ijmk}\psi_{N,j}\psi_{M,m}\,dv_0, \tag{16.176}$$

$$G^{ik}_{NM} = \int_{v_{0(e)}} t^{mj}_{0}\psi_{N,m}\psi_{M,j}\delta^{ik}\,dv_0, \tag{16.177}$$

$$D^{ik}_{NM} = \int_{v_{0(e)}} C^{mjrs}\psi_{N,m}\psi_{M,r}\left[\psi_{R,j}\overset{0}{u}{}^{R}_{i}\left(\delta_{sk} + \psi_{P,s}\overset{0}{u}{}^{P}_{k}\right) + \psi_{R,s}\overset{0}{u}{}^{R}_{k}\delta_{ij}\right]dv_0, \tag{16.178}$$

$$R^{ik}_{NM} = \int_{A_{0(e)}} \psi_N\left[\hat{S}^{j}_{0}\psi_{M,j}\delta^{k}_{i} + \left(\delta_{ji} + \psi_{R,j}\overset{0}{u}{}^{R}_{i}\right)P^{jk}_{M}\right]dA_0, \tag{16.179}$$

$$\delta p_{Ni} = \int_{v_{0(e)}} \rho_0 B_i\psi_N\,dv_0 + \int_{A_{0(e)}} \psi_N\left(\delta_{ji} + \psi_{M,j}\overset{0}{u}{}^{M}_{i}\right)Q^{j}_{r}\,\delta T^{r}\,dA_0. \tag{16.180}$$

---

[1]) См. Трусделл и Нолл [1965, стр. 250]. К сожалению, во многих конечноэлементных исследованиях ошибочно утверждается обратное.

Здесь $\tilde{k}^{ik}_{NM}$ — *матрица приращений жесткости*, G^{ik}_{NM} — *матрица начальных напряжений* [1]), D^{ik}_{NM} — *матрица начального поворота* [2]), R^{ik}_{NM} — *матрица начального нагружения* [3]) и δp_{Ni} — приращения обобщенных узловых сил, обусловленные заданными приращениями внешних нагрузок. В этих обозначениях уравнения движения элемента в приращениях принимают вид

$$m_{NM}\ddot{\zeta}^M_i + (\tilde{k}^{ik}_{NM} + G^{ik}_{NM} + D^{ik}_{NM} + R^{ik}_{NM})\,\zeta^M_k = \delta p_{Ni}. \qquad (16.181)$$

Следует отметить, что вопреки тому, что утверждается во многих работах, *матрица приращений жесткости* $\tilde{k}^{ik}_{NM}$ *не совпадает с обычной матрицей жесткости* k^{ik}_{NM} *классической линейной теории упругости, определяемой формулой* (16.13). Действительно, $\tilde{k}^{ik}_{NM}$ сводится к k^{ik}_{NM} только в том частном случае, когда $C^{ijmn} = E^{ijmn}$.

Беря различные частные случаи (16.181), можно получить постановки ряда специальных задач. Например, если $\tilde{k}^{ik}_{NM} = k^{ik}_{NM}$ и элемент не испытывает значительных поворотов в невозмущенной конфигурации, то из условия

$$\det(\tilde{k}^{ik}_{NM} + G^{ik}_{NM}) = 0 \qquad (16.182)$$

можно найти классическую критическую нагрузку (соответствующую статической потере устойчивости). Однако случаи довольно значительных поворотов элемента до потери устойчивости не так уж редки, и поэтому в общей ситуации необходимо к матрицам в (16.182) добавить D^{ik}_{NM} и R^{ik}_{NM}. Если δp_{Ni} приравнять нулю,

---

[1]) Эта матрица называется также матрицей «геометрической» жесткости или «касательной» жесткости; см., например, Тэрнер, Дилл, Мартин и Мелош [1960], Тэрнер, Мартин и Вейкл [1964] или Аргирис, Келси и Кэмел [1964], Аргирис [1965а]. Мартин [1966б] подробно исследовал эту матрицу для частных видов элементов, а общую формулу получил Оден [1966б] способом, несколько отличающимся от излагаемого здесь. Ранее в литературе, посвященной приложениям метода конечных элементов к геометрически нелинейным задача матрица G^{ik}_{NM} использовалась для того, чтобы «подправлять» линейную матрицу жесткости в конце каждого этапа приращения нагрузки. К сожалению, если не вводить новые материальные координаты в деформированном элементе после каждого приращения — как это делали, например, Мюррей и Вильсон [1969а, 1969б],— то ясно, что этот метод неверен.

[2]) Важность использования матрицы D^{ik}_{NM} в некоторых нелинейных задачах показана Марклом [1968], который называл ее «матрицей начальных перемещений». Используемый здесь термин введен Оденом и Кубицей [1967]. См. также Оден [1969в, 1970б] и Хиббит, Маркл и Райс [1970].

[3]) Значение введения поправочных членов на нагрузку в уравнения в приращениях было отмечено Оденом [1969д] и Оденом и Ки [1970]. Различные формы матрицы R^{ik}_{NM} были впервые предложены Хиббитом, Марклом и Райсом [1970]. Однако их формы не совпадают с (16.179).

а $m_{NM}\ddot{\zeta}_i^M$ оставить в уравнениях, то их можно использовать для исследования задач динамической устойчивости [1]).

Несжимаемые элементы. Для несжимаемых материалов необходимо ввести в рассмотрение приращения гидростатических давлений элемента. Поступая точно так же, как и при выводе уравнений (16.161), но используя в качестве отправной точки уравнения движения несжимаемых элементов (16.57), мы вместо (16.181) получим

$$m_{NM}\ddot{\zeta}_i^M + (\widetilde{k}_{NM}^{ik} + G_{NM}^{ik} + D_{NM}^{ik} + R_{NM}^{ik} + H_{NM}^{ik})\,\zeta_k^M + J_{Ni}(\delta h) = p_{Ni}, \tag{16.183}$$

где H_{NM}^{ik} — *матрица начальных давлений*

$$H_{NM}^{ik} = \int\limits_{v_{0(e)}} \overline{h}_0 \left[\frac{\partial G^{mj}(\overset{0}{\mathbf{u}}{}^R)}{\partial u_k^M} \psi_{Nj}(\delta_{im} + \psi_{P,m}\overset{0}{u}{}_i^P) + G_0^{mj}\psi_{N,j}\psi_{M,m}\delta^{ik} \right] dv_0 \tag{16.184}$$

и

$$J_{Ni}(\delta h) = \int\limits_{v_{0(e)}} \delta h G_0^{kj}\psi_{N,j}(\delta_{ik} + \psi_{M,k}\overset{0}{u}{}_i^M)\,dv_0. \tag{16.185}$$

Здесь $\overline{h}_0$ — гидростатическое давление в невозмущенном элементе (например, $\overline{h}_0 = \psi_R \overline{h}_0^R$) и δh — приращение гидростатического давления (например, $\delta h = \psi_R \delta h^R$). Напряжения t_0^{ij} и G_{NM}^{ik} не являются теперь полными напряжениями, они представляют собой части тензора начальных напряжений, обусловленные деформацией в момент времени t.

К уравнениям (16.183) надо, конечно, добавить условия несжимаемости в приращениях

$$\left[\int\limits_{v_{0(e)}} (\det z_{i,j}^0)^2 \varepsilon^{ijk}\varepsilon^{rst} z_{j,s}^0 z_{k,t}^0 \psi_{M,r}\,dv_0 \right] \zeta_i^M = 0, \tag{16.186а}$$

где

$$z_{i,j}^0 = \delta_{ij} + \psi_{N,j}\overset{0}{u}{}_i^N. \tag{16.186б}$$

---

[1]) Некоторые частные случаи, относящиеся к динамической устойчивости элементов при периодических начальных напряжениях, рассматривались Хаттом [1968] и Брауном, Хаттом и Саламой [1968]. Много работ посвящено использованию дискретных моделей при расчете скоростей флаттера самолетных конструкций; см., например, Бисплингхофф, Эшли и Халфмэн [1955] или более позднюю работу Карьяппы, Сомашекара и Шаха [1970]. Барсоум [1970] исследовал некоторые вопросы динамической устойчивости в связи с конечноэлементными аппроксимациями тонкостенных балок.

В случае если используются условия несжимаемости в узлах, мы применяем условие (16.62) «в приращениях»:

$$\sum_{e=1}^{E} \overset{(e)}{\Omega}{}_{\Delta}^{N} \delta\,(\mathrm{iii})_N^{(e)} = 0, \tag{16.187}$$

где

$$\delta\,(\mathrm{iii})_N^{(e)} = \int\limits_{v_{0(e)}} \psi_N \frac{\partial G\,(\overset{0}{\mathbf{u}}{}^R)}{\partial u_i^M}\, dv_0 \zeta_i^M. \tag{16.188}$$

16.6. КРИВОЛИНЕЙНЫЕ КООРДИНАТЫ

Все приведенные до сих пор в этом параграфе уравнения были получены в предположении, что материальные координаты $x^i_{(e)}$ являются прямоугольными декартовыми в начальных конфигурациях $C_{0(e)}$ конечных элементов. Нетрудно, однако, записать жесткостные соотношения в форме, справедливой в любой системе материальных координат. Вспоминая (см. (13.79) и (13.80)), что в общем случае

$$\mathbf{u}_{(e)} = w^i \mathbf{g}_i = w_i \mathbf{g}^i, \tag{16.189}$$

$$w^i = w^{Ni} \psi_N(\xi), \qquad w_i = w_i^N \psi_N(\xi), \tag{16.190}$$

где $\mathbf{g}_i$ и $\mathbf{g}^i$ — ковариантные и контравариантные базисные векторы системы локальных криволинейных материальных координат ξ^i, и что

$$t^{ij} = \frac{\partial W_{(e)}}{\partial \gamma_{ij}}, \qquad \text{где} \quad 2\gamma_{ij}^{(e)} = G_{ij}^{(e)} - g_{ij}^{(e)}, \tag{16.191}$$

из (13.84) и (13.85) получаем нелинейные жесткостные соотношения для гиперупругого элемента

$$\int\limits_{v_{0(e)}} \frac{\partial W}{\partial \gamma_{qj}} [\delta_j^i \psi_{N,q} - \psi_N \Gamma_{jq}^i + (\psi_{M,j} \psi_{N,q} \delta_m^i + \psi_M \psi_{N,q} \Gamma_{mj}^i - \\ - \psi_{M,j} \psi_N \Gamma_{mq}^i - \psi_M \psi_N \Gamma_{mj}^r \Gamma_{rq}^i)\, w^{Mm}]\, dv_0 = p_N^i \tag{16.192}$$

и

$$\int\limits_{v_{0(e)}} \frac{\partial W}{\partial \gamma_{pq}} [g_{iq} \psi_{N,p} + g_{qj} \psi_N \Gamma_{ip}^j + (\psi_{M,q} \psi_{N,p} \delta_i^m - \psi_M \psi_{N,p} \Gamma_{iq}^m + \\ + \psi_{M,q} \psi_N \Gamma_{ip}^m - \psi_M \psi_N \Gamma_{qs}^m \Gamma_{ip}^s)\, w_m^M]\, dv_0 = p_{Ni}. \tag{16.193}$$

Здесь

$$\psi_{N,i} = \frac{\partial \psi_N(\xi)}{\partial \xi^i}, \qquad \Gamma_{jk}^i = \frac{\partial \xi^i}{\partial x_m} \frac{\partial^2 x_m}{\partial \xi^j\, \partial \xi^k}. \tag{16.194}$$

В динамических задачах необходимо, конечно, в формулы (16.192) и (16.193) добавить инерционные члены $m_{NM}\ddot{w}^{Mi}$ и $m_{NM}\ddot{w}_i^M$. Поскольку получение различных видов этих уравнений для разных систем криволинейных координат осуществляется стандартным образом, мы на этом останавливаться не будем.

17. ЧИСЛЕННЫЕ РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

Из теории, изложенной в предыдущих параграфах, ясно, что статическое поведение конечных элементов при конечных упругих деформациях описывается большими системами нелинейных алгебраических и трансцендентных уравнений. Хотя системы нелинейных уравнений встречаются в прикладных задачах механики уже в течение нескольких веков, общих методов получения их точных решений не существует. Таким образом, неизбежно приходится использовать численные методы, и в общем случае решение можно получить лишь с некоторой заданной степенью точности. В этом параграфе мы обсудим основные идеи, на которых основываются некоторые схемы численных решений больших систем нелинейных уравнений [1]).

17.1. ВВОДНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Задача состоит в следующем. Рассматривается система n нелинейных уравнений:

$$\begin{aligned} f_1\,(X_1,\ X_2,\ \ldots,\ X_n) &= 0, \\ f_2\,(X_1,\ X_2,\ \ldots,\ X_n) &= 0, \\ \cdots\cdots&\cdots\cdots \\ f_n\,(X_1,\ X_2,\ \ldots,\ X_n) &= 0, \end{aligned} \qquad (17.1)$$

и требуется найти удовлетворяющие этой системе значения $\mathbf{X}$, где $\mathbf{X}$ представляет собой n-мерный вектор независимых неизвестных:

$$\mathbf{X} = \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{Bmatrix}. \qquad (17.2)$$

[1]) Мы даем лишь относительно краткий обзор. Более подробно с этими вопросами можно ознакомиться по книге Ортеги и Рейнболдта [1970]. Общие свойства и методы решений нелинейных уравнений описаны в книгах Саати и Брэма [1964] и Саати [1967] и в ряде обзорных статей; см., например, Брукс [1958, 1959], Спэнг [1962], Флетчер [1965], Бокс [1966], Зойтендейк [1966], Айзаксон и Келлер [1966], Ковалик и Осборн [1968], Пауэлл [1969].

В конечноэлементных приложениях, как правило, компонентами вектора X являются компоненты узловых перемещений и, возможно, гидростатические давления в элементах или в узлах, а уравнения (17.1) суть глобальные жесткостные соотношения и условия несжимаемости.

Часто мы будем использовать обозначение

$$\mathbf{f}(\mathbf{X}) = \{f_i(\mathbf{X})\}, \tag{17.3}$$

так что (17.1) можно записать в виде n-мерного векторного уравнения

$$\mathbf{f}(\mathbf{X}) = 0. \tag{17.4}$$

Другую постановку задачи можно получить, рассматривая норму

$$F(\mathbf{X}) = \| \mathbf{f}(\mathbf{X}) \|^2 = \mathbf{f}^T(\mathbf{X})\,\mathbf{f}(\mathbf{X}) = f_1^2(\mathbf{X}) + \ldots + f_n^2(\mathbf{X}), \tag{17.5а}$$

или

$$F(\mathbf{X}) = \sum_{i=1}^{n} f_i^2(\mathbf{X}). \tag{17.5б}$$

Если X и f_i (X) вещественны, то для любого X

$$F(\mathbf{X}) \geqslant 0. \tag{17.6}$$

Ясно, что равенство в (17.6) имеет место только в том случае, если все f_i (X) $= 0$, а это возможно лишь когда X удовлетворяет (17.4). Поэтому задача решения системы нелинейных уравнений (17.4) эквивалентна задаче нахождения значений X, при которых функция F (X), определенная формулой (17.5), достигает минимума. В приложениях к задачам нелинейной теории упругости нет, конечно, надобности искусственно строить вспомогательную функцию F (X), которую надо минимизировать для получения решений жесткостных уравнений (уравнений равновесия), поскольку мы уже имеем такую функцию в лице полной потенциальной энергии П, задаваемой формулой (16.136). Таким образом, задачу нахождения решений системы нелинейных уравнений равновесия типа (17.4) всегда можно свести к задаче нахождения таких X, которые минимизируют П (X) (или, в общем случае, F (X)) [1]).

Геометрические понятия. Удобно считать X точкой или вектором n-мерного пространства $\mathscr{E}^n$. Для каждой пары элементов X, Y $\in \mathscr{E}^n$ имеем $\mathbf{X} + \mathbf{Y} = \mathbf{Z} = (X_1 + Y_1, \ldots, X_n + Y_n) \in \mathscr{E}^n$

[1]) Такой подход к решению задач нелинейной теории упругости для конечноэлементных моделей использовался Богнером, Мэллетом, Миничем и Шмитом [1965], которые называли его «энергетическим» подходом. См. также Мэллет и Шмит [1967], Шмит, Богнер и Фокс [1968], Богнер [1968], Фокс и Стэнтон [1968], Шмит и Монфортон [1969]. Аналогичный подход, но в сочетании с другим методом минимизации, применял Беккер [1966].

и $\alpha\mathbf{X} = (\alpha X_1, \ldots, \alpha X\ ) \in \mathscr{E}^n$, где α — вещественное число. Можно ввести скалярное произведение $\mathbf{X}\cdot\mathbf{X} = \mathbf{X}^T\mathbf{X} = X_i X_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$; эвклидову норму $\| \mathbf{X} \| = \sqrt{\mathbf{X}\cdot\mathbf{X}}$; понятие ортогональности ($\mathbf{X}\cdot\mathbf{Y} = 0 \Longleftrightarrow \mathbf{X} \perp \mathbf{Y}$) и углы в $\mathscr{E}^n$ ($\cos\theta = \mathbf{X}\cdot\mathbf{Y}/\| X \|\,\| Y \|$, где θ —«угол между» $\mathbf{X}$ и $\mathbf{Y}$). Отметим, что в некоторых случаях удобнее использовать вместо эвклидовой нормы $\sqrt{X_i X_i}$ максимум-норму

$$\| \mathbf{X} \|_{\max} = \max_i | X_i |, \qquad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Некоторые результаты, излагаемые ниже, справедливы для случая банаховых пространств общего вида (или легко обобщаются на этот случай).

Вектор $\mathbf{X}$ называется *единичным* вектором, если $\| \mathbf{X} \| = 1$; система n взаимно ортогональных единичных векторов $\mathbf{e}_i$ образует *ортонормированный базис* пространства $\mathscr{E}^n$; каждый вектор $\mathbf{X} \in \mathscr{E}^n$ можно единственным образом представить в виде линейной комбинации векторов $\mathbf{e}_i$, а именно $\mathbf{X} = X_i\mathbf{e}_i$. Большинство геометрических понятий трехмерного пространства можно сформулировать так, чтобы они имели смысл и для $\mathscr{E}^n$. Например, если $\mathbf{X}_0$ — заданная точка, а λ — произвольное вещественное число, то множество всех векторов $\mathbf{X}$, удовлетворяющих условию

$$\mathbf{X} = \mathbf{X}_0 + \lambda\mathbf{N}, \qquad (17.7)$$

определяет *прямую линию*, проходящую через $\mathbf{X}_0$ в направлении $\mathbf{N}$. Аналогично множество точек, удовлетворяющих условию

$$(\mathbf{X} - \mathbf{X}_0)\cdot\mathbf{N} = 0, \qquad (17.8)$$

образует $(n - 1)$-мерную гиперплоскость с нормалью $\mathbf{N}$.

Пространство $\mathscr{E}^n$ или некоторое его подпространство служит областью определения $\mathscr{D}$ функций $f_i(\mathbf{X})$ из (17.1). Если для любых двух точек $\mathbf{X}_1$, $\mathbf{X}_2 \in \mathscr{D}$ прямолинейный отрезок $\mathbf{X} = \alpha\mathbf{X}_1 + (1 - \alpha)\,\mathbf{X}_2$ $(0 \leqslant \alpha \leqslant 1)$, соединяющий их, сам принадлежит $\mathscr{D}$, то область называется *выпуклой*. Как правило, мы будем предполагать, что наши выпуклые области *открыты*, т. е. что для каждого $\mathbf{X}_0 \in \mathscr{D}$ существует шар $\| \mathbf{X} - \mathbf{X}_0 \| < r$, все элементы которого тоже принадлежат $\mathscr{D}$. Множество $\mathscr{N}(\mathbf{X}_0, r) = \{\mathbf{X} \mid \| \mathbf{X} - \mathbf{X}_0 \| < r\}$ называется *открытым шаром* радиуса r с центром $\mathbf{X}_0$, а множество $\overline{\mathscr{N}}(\mathbf{X}_0, r) = \{\mathbf{X} \mid \| \mathbf{X} - \mathbf{X}_0 \| \leqslant r\}$ — замкнутым шаром. Множество $\mathscr{S}(\mathbf{X}_0, r) = \{\mathbf{X} \mid \| \mathbf{X} - \mathbf{X}_0 \| = r\}$ есть *сфера* радиуса r с центром $\mathbf{X}_0$. Функция вида $f(\mathbf{X}) = C$, где C — постоянная, описывает *поверхность* в $\mathscr{E}^n$. Таким образом, система (17.1) описывает совокупность n поверхностей в $\mathscr{E}^n$; точка их пересечения $\mathbf{X}$ и служит искомым решением системы.

При другом подходе мы рассматриваем функцию $F(\mathbf{X})$ [или $\Pi(\mathbf{X})$] из (17.5) как скалярнозначную функцию с областью опре-

деления $\mathscr{D}$. Полагая $F(\mathbf{X}) = C$, где C — постоянная, мы определяем $(n-1)$-мерную *поверхность уровня* функции $F(\mathbf{X})$. Решения системы (17.1) — это те точки области определения функции $F(\mathbf{X})$, в которых она достигает относительного минимума. Скорость изменения функции $F(\mathbf{X})$ в точке $\mathbf{X}$ при движении из нее в направлении единичного вектора $\mathbf{N}$ задается, как обычно, производной по направлению $\mathbf{N}$, т. е. равна $\mathbf{g}\cdot\mathbf{N}$, где $\mathbf{g}$ — градиент функции $F(\mathbf{X})$:

$$\mathbf{g} = \nabla F = \left\{ \frac{\partial F}{\partial X_1}, \frac{\partial F}{\partial X_2}, \ldots, \frac{\partial F}{\partial X_n} \right\}. \tag{17.9}$$

Кривая в $\mathscr{E}^n$ описывается параметрическим уравнением вида $\mathbf{X} = \mathbf{X}(\lambda)$ и векторы $d\mathbf{X}(\lambda)/d\lambda$ касательны к кривой. На всякой поверхности уровня $F(\mathbf{X}) = C$ скорость изменения функции $F(\mathbf{X})$ вдоль любой кривой на этой поверхности $dF/d\lambda = 0 = \mathbf{g}\cdot d\mathbf{X}/d\lambda$; это значит, что $\mathbf{g}$ направлено по нормали к поверхности уровня. Далее, если $d\mathbf{X}$ произвольно и образует с градиентом $\mathbf{g}$ угол θ, то $dF = \|\mathbf{g}\|\,\|d\mathbf{X}\|\cos\theta$. Следовательно, в направлении градиента $(\theta = 0)$ скорость изменения функции $F(\mathbf{X})$ максимальна.

Методы решения. В большинстве численных схем, применяемых для решения нелинейных уравнений, начинают с некоторого пробного приближенного решения $\mathbf{X}_0$, которое называется *нулевым приближением*. Далее тем или иным способом строится последовательность приближений, которая должна сходиться к решению нашей системы.

Численные методы, которые мы будем рассматривать, можно разбить на две группы: *итерационные методы* и *неитерационные методы*. В итерационных методах последовательность приближенных решений строится с помощью фиксированного набора операций. В неитерационных методах точки подбираются случайно. Как правило, в итерационных методах нулевое приближение выбирается произвольно, а последующие получаются с помощью рекуррентных формул вида

$$\mathbf{X}^{r+1} = \mathbf{X}^r + \lambda^r \mathbf{D}^r. \tag{17.10}$$

Здесь $\mathbf{X}^r$ — приближенное решение на r-м шаге процесса, называемое *r-й итерацией*, а $\lambda^r\mathbf{D}^r$ — поправка; $\mathbf{D}^r$ есть n-мерный вектор, определяющий направление поправки, а λ^r — скаляр, определяющий ее величину. Из сопоставления (17.10) с (17.7) ясно, что, используя рекуррентные формулы такого типа, мы продвигаемся к решению вдоль отрезков прямых, соединяющих последовательные приближения. Добавляя в (17.10) члены, содержащие приближения $\mathbf{X}^{r-1}$, $\mathbf{X}^{r-2}$, ..., можно, конечно, получить рекуррентные формулы более высокого порядка, основанные на квадратичной, кубичной и т. д. интерполяции.

Некоторые специальные итерационные схемы определения минимума функций $F(\mathbf{X}) = \mathbf{f}^T(\mathbf{X})\,\mathbf{f}(\mathbf{X})$ вида (17.5) относят к *методам спуска*; если $F(\mathbf{X}^{r+1}) \leqslant F(\mathbf{X}^r)$, то мы как бы «спускаемся» от значения функции в нулевом приближении $\mathbf{X}_0$ к значению в минимизирующей точке $\mathbf{X}^*$, где $F(\mathbf{X}^*) = 0$. К наиболее важным методам спуска относятся так называемые *градиентные методы*, в которых при выборе направления движения к минимуму используется градиент функции $F(\mathbf{X})$. *Итерационные методы поиска*, напротив, не связаны с вычислением градиентов. Эти методы построены по такому принципу: среди ряда приближений ищутся минимизирующие $F(\mathbf{X})$, затем вместо этих приближений образуются новые, так что на каждом этапе поиска используются только те приближения, которые в совокупности дают более близкое к минимуму значение.

К указанным методам примыкают некоторые общие итерационные методы, основанные на непосредственном рассмотрении нелинейной системы (17.1) или на ее последовательных линеаризациях. К ним относятся мощный метод Ньютона — Рафсона и методы продолжений типа метода последовательных нагружений. Заметим, наконец, что большинство итерационных схем можно считать видоизменениями давно известного метода последовательных приближений, который органически связан с фундаментальным понятием неподвижной точки оператора и принципом сжимающих отображений.

В следующем пункте мы кратко остановимся на этом принципе ввиду его общематематического значения и ретроспективной связи с другими итерационными методами. В остальном параграф посвящен описанию наиболее важных итерационных и неитерационных методов решения нелинейных уравнений.

17.2. НЕПОДВИЖНЫЕ ТОЧКИ И СЖИМАЮЩИЕ ОТОБРАЖЕНИЯ

Рассмотрим нелинейный оператор $\mathcal{F}$, который отображает пространство $\mathscr{E}^n$ (или в более общем случае банахово пространство $\mathscr{V}$) в себя. Всякая точка $\mathbf{X} \in \mathscr{E}^n$ (или $\mathscr{V}$), удовлетворяющая условию

$$\mathcal{F}(\mathbf{X}) = \mathbf{X}, \qquad (17.11)$$

называется *неподвижной точкой* оператора $\mathcal{F}$. Задача отыскания решений уравнения (17.11) называется задачей о неподвижных точках оператора $\mathcal{F}$.

Любое уравнение можно переформулировать как задачу о неподвижной точке. Если, например, задано уравнение

$$Q(\mathbf{X}) = \mathbf{Y}, \qquad (17.12)$$

то можно положить

$$\mathcal{F}(\mathbf{X}) = \mathbf{X} + Q(\mathbf{X}) - \mathbf{Y}. \qquad (17.13)$$

Тогда решение уравнения (17.12) будет неподвижной точкой оператора $\mathscr{F}(\mathrm{X})$, введенного формулой (17.13). Точно так же задачу отыскания решения уравнения (17.4) можно свести к задаче о неподвижной точке, если взять $\mathscr{F}(\mathrm{X}) = \mathrm{X} - \mathbf{f}(\mathrm{X})$.

Неподвижные точки оператора $\mathscr{F}(\mathrm{X})$ можно искать *методом последовательных приближений*. Пусть X_0 — нулевое приближение, т. е. какое-то пробное решение уравнения (17.11). Если $\mathscr{F}(\mathrm{X}_0)$ несущественно отличается от X_0, то естественно считать $\mathrm{X}^1 = \mathscr{F}(\mathrm{X}_0)$ уточнением X_0. Далее, точно так же $\mathrm{X}^2 = \mathscr{F}(\mathrm{X}^1)$ служит возможным уточнением X^1. Продолжая этот процесс, мы строим последовательность $\{\mathrm{X}^r\}$ последовательных приближений к неподвижной точке X оператора $\mathscr{F}(\mathrm{X})$ с помощью формулы

$$\mathrm{X}^{r+1} = \mathscr{F}(\mathrm{X}^r), \qquad r = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots \tag{17.14}$$

Если ввести степени оператора

$$\mathscr{F}^0 = I, \quad \mathscr{F}^{r+1} = \mathscr{F}(\mathscr{F}^r), \qquad r = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,$$

то

$$\begin{aligned} \mathrm{X}_0 &= \mathscr{F}^0(\mathrm{X}_0), \\ \mathrm{X}^1 &= \mathscr{F}(\mathrm{X}_0) = \mathscr{F}(\mathscr{F}^0(\mathrm{X}_0)) = \mathscr{F}^1(\mathrm{X}_0), \\ \mathrm{X}^2 &= \mathscr{F}(\mathrm{X}^1) = \mathscr{F}(\mathscr{F}^1(\mathrm{X}_0)) = \mathscr{F}^2(\mathrm{X}_0), \ \ldots \end{aligned}$$

Таким образом, (17.14) можно записать в виде

$$\mathrm{X}^{r+1} = \mathscr{F}^{r+1}(\mathrm{X}_0). \tag{17.15}$$

Определение[1]. Оператор $\mathscr{F}$, отображающий банахово пространство $\mathscr{V}$ в себя, называется *сжимающим отображением* (или *отображением сжатия*) в замкнутом шаре

$$\overline{\mathscr{N}}(\mathrm{X}_0,\ r) = \{\mathrm{X} \mid \|\mathrm{X} - \mathrm{X}_0\| \leqslant r\},$$

если существует такое вещественное число λ $(0 \leqslant \lambda < 1)$, что для любых $\mathrm{X},\ \mathrm{Y} \in \overline{\mathscr{N}}(\mathrm{X}_0,\ r)$ выполняется условие Липшица

$$\|\mathscr{F}(\mathrm{X}) - \mathscr{F}(\mathrm{Y})\| \leqslant \lambda \|\mathrm{X} - \mathrm{Y}\|. \tag{17.16}$$

Постоянная Липшица λ называется *коэффициентом сжатия*.

---

[1]) Хотя нас в основном интересуют нелинейные операторы в $\mathscr{E}^n$, это определение и все теоремы этого пункта справедливы для произвольных банаховых пространств. Отметим также, что понятие сжимающего отображения легко распространить на случай общих метрических пространств. Пусть $\mathscr{X}$ и $\mathscr{Y}$ — метрические пространства с метриками $d(X_1,\ X_2)$ и $\rho(Y_1,\ Y_2)$ соответственно. Отображение $\mathscr{F}$ из $\mathscr{X}$ в $\mathscr{Y}$ называется сжимающим в шаре $\overline{\mathscr{N}}(X_0,\ r) = \{X \mid d(X_0,\ X) \leqslant r\}$, если существует такой *коэффициент сжатия* $0 \leqslant \lambda < 1$, что $\rho(\mathscr{F}(X_1),\ \mathscr{F}(X_2)) \leqslant \lambda d(X_1,\ X_2)$ для любых $X_1,\ X_2 \in \overline{\mathscr{N}}(X_0,\ r)$.

Теорема 17.1 (принцип сжимающих отображений). *Пусть* $\mathscr{F}(X)$ *— отображение сжатия в* $\overline{\mathscr{N}}(X_0, r)$ *с коэффициентом сжатия* λ, *и пусть* X_0 *удовлетворяет условию*

$$\frac{1}{1-\lambda}\|\mathscr{F}(X_0)-X_0\|=r_0\leqslant r. \qquad (17.17)$$

Тогда:

а. *Последовательность* $\{X^r\}$, *построенная с помощью формулы* $X^{r+1}=\mathscr{F}(X^r)$, *сходится к некоторой точке* $X^*\in\overline{\mathscr{N}}(X_0, r_0)$.

б. X^* *есть неподвижная точка оператора* $\mathscr{F}$.

в. X^* *— единственная неподвижная точка оператора* $\mathscr{F}$ *в шаре* $\overline{\mathscr{N}}(X_0, r)$.

Доказательство. Чтобы доказать **а**, покажем сначала, что если выполнено условие (17.17), то все итерации $X^{r+1}=\mathscr{F}(X^r)$ будут находиться в шаре $\overline{\mathscr{N}}(X_0, r_0)$. Применим метод математической индукции (т. е. проверим, что наше утверждение верно для $r=1$, и покажем, что из его справедливости для $n=r$ следует справедливость для $n=r+1$). Поскольку $X^1=\mathscr{F}(X_0)$, имеем в силу (17.17)

$$\|X^1-X_0\|=(1-\lambda)r_0\leqslant r_0.$$

Значит, $X^1\in\overline{\mathscr{N}}(X_0, r_0)$. Предположим, что $\|X_0-X^r\|\leqslant r_0$ для итераций $X^1, X^2, \ldots, X^r$. Тогда

$$\begin{aligned}\|X^{r+1}-X^r\|&=\|\mathscr{F}(X^r)-\mathscr{F}(X^{r-1})\|\leqslant\\ &\leqslant\lambda\|X^r-X^{r-1}\|=\lambda\|\mathscr{F}(X^{r-1})-\mathscr{F}(X^{r-2})\|\leqslant\\ &\leqslant\lambda^2\|X^{r-1}-X^{r-2}\|\leqslant\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &\leqslant\lambda^r\|X^1-X_0\|=\lambda^r(1-\lambda)r_0.\end{aligned}$$

Отсюда следует, что

$$\begin{aligned}\|X^{r+1}-X_0\|&=\|(X^{r+1}-X^r)+(X^r-X^{r-1})+\ldots+(X^1-X_0)\|\leqslant\\ &\leqslant\|X^{r+1}-X^r\|+\|X^r-X^{r-1}\|+\ldots+\|X^1-X_0\|\leqslant\\ &\leqslant\lambda^r(1-\lambda)r_0+\lambda^{r-1}(1-\lambda)r_0+\ldots+(1-\lambda)r_0,\end{aligned}$$

или

$$\|X^{r+1}-X_0\|\leqslant(1-\lambda^{r+1})r_0\leqslant r_0.$$

Следовательно, $X^{r+1}\in\overline{\mathscr{N}}(X_0, r_0)$. Таким образом, мы доказали, что все итерации принадлежат шару $\overline{\mathscr{N}}(X_0, r_0)$.

Покажем теперь, что итерации $\{X^r\}$ образуют последовательность Коши. Действительно, для любого m

$$\begin{aligned}\|X^m-X^{m+n}\|&=\|(X^m-X^{m+1})+(X^{m+1}-X^{m+2})+\ldots\\ &\ldots+(X^{m+n-1}-X^{m+n})\|\leqslant\end{aligned}$$

$$\leqslant \| X^m - X^{m+1} \| + \| X^{m+1} - X^{m+2} \| + \ldots$$
$$\ldots + \| X^{m+n-1} - X^{m+n} \| \leqslant$$
$$\leqslant \lambda^m (1-\lambda) r_0 + \lambda^{m+1} (1-\lambda) r_0 + \ldots$$
$$\ldots + \lambda^{m+n-1} (1-\lambda) r_0 \leqslant$$
$$\leqslant \lambda^m (1-\lambda^n) r_0. \qquad (17.18)$$

Так как λ фиксированно и $0 \leqslant \lambda < 1$, то для любого $\varepsilon > 0$ можно найти такое целое $N(\varepsilon)$, что $\| X^m - X^{m+n} \| < \varepsilon$ при $n > 0$ и $m > N$ (например, при заданном ε можно взять такое N, что $\lambda^N < \varepsilon / r_0$; тогда $\| X^m - X^{m+n} \| < \varepsilon (1 - \lambda^n) < \varepsilon$ при $m > N$). Поэтому последовательность $\{X^m\}$ является последовательностью Коши.

Если X^* — предел этой последовательности, то $X^* \in \in \mathcal{N}(X_0, r_0)$. Этим завершается доказательство утверждения **а**.

Поскольку

$$\| \mathcal{F}(X^r) - X^* \| = \| X^{r+1} - X^* \|$$

и, как было показано, $\lim\limits_{r\to\infty} \| X^{r+1} - X^* \| = 0$, ясно, что $\lim\limits_{r\to\infty} \| \mathcal{F}(X^r) - \mathcal{F}(X^*) \| = 0$. Далее, $\| \mathcal{F}(X^r) - \mathcal{F}(X^*) \| \leqslant \leqslant \| X^r - X^* \|$; следовательно, $\lim\limits_{r\to\infty} \mathcal{F}(X^r) = \mathcal{F}(X^*) = X^*$, т. е. X^* — неподвижная точка оператора $\mathcal{F}$. Этим доказано **б**. Заметим, что **б** следует также из **а** ввиду непрерывности $\mathcal{F}$, вытекающей из условия (17.16). Действительно, если $\lim\limits_{r\to\infty} X^r = = X^*$, то

$$\lim_{r\to\infty} \mathcal{F}(X^r) = \mathcal{F}(X^*) = X^*.$$

Остается показать, что точка X^* — единственная неподвижная точка в $\mathcal{N}(X_0, r_0)$. Предположим, что $\overline{X}$ — другая неподвижная точка в $\mathcal{N}(X_0, r_0)$. Тогда

$$\| X^* - \overline{X} \| = \| \mathcal{F}(X^*) - \mathcal{F}(\overline{X}) \| \leqslant$$
$$\leqslant \lambda \| X^* - \overline{X} \| <$$
$$< \| X^* - \overline{X} \|,$$

что, конечно, невозможно. Тем самым теорема полностью доказана.

Отметим, что первое утверждение теоремы 17.1 можно записать так (см. (17.15)):

$$X^* = \lim_{r\to\infty} \mathcal{F}^r (X_0). \qquad (17.19)$$

Если справедливо соотношение (17.19), то будем говорить, что точка $\mathbf{X}^*$ *достижима* из $\mathbf{X}_0$, а множество всех точек, из которых $\mathbf{X}^*$ достижима, назовем *областью достижимости*. Нетрудно показать, что в случае, когда выполнены условия теоремы 17.1, X^* достижима из *любой* точки шара $\overline{\mathcal{N}}(\mathbf{X}_0, r_0)$. Действительно, поскольку

$$\|\mathcal{F}(\mathbf{X})-\mathcal{F}(\mathbf{X}_0)\| = \|\mathcal{F}(\mathbf{X})-\mathbf{X}^1\| \leqslant \lambda \|\mathbf{X}-\mathbf{X}_0\| \leqslant$$

$$\leqslant \lambda r_0 = \frac{\lambda}{1-\lambda}\|\mathbf{X}^1-\mathbf{X}_0\|,$$

видно, что $\|\mathcal{F}(\mathbf{X})-\mathbf{X}^1\| \leqslant \lambda r_0$, т. е. $\mathcal{F}$ отображает $\overline{\mathcal{N}}(\mathbf{X}_0, r_0)$ в меньший шар $\overline{\mathcal{N}}(\mathbf{X}^1, \lambda r_0) \subset \overline{\mathcal{N}}(\mathbf{X}_0, r_0)$. Вообще, устремляя в (17.18) n к бесконечности, получаем

$$\|\mathbf{X}^r-\mathbf{X}^*\| \leqslant \lambda^r r_0, \tag{17.20}$$

т. е. $\mathcal{F}^r$ отображает $\overline{\mathcal{N}}(\mathbf{X}_0, r_0)$ в $\overline{\mathcal{N}}(\mathbf{X}^r, \lambda^r r_0)$.

Отметим, что любая последовательность $\{\hat{\mathbf{X}}^r\}$ с $\hat{\mathbf{X}}^r \in \overline{\mathcal{N}}(\mathbf{X}^r, \lambda^r r_0)$ также будет сходиться к $\mathbf{X}^*$. Это дает возможность использовать при построении последовательных приближений к $\mathbf{X}^*$ аппроксимации оператора $\mathcal{F}$.

Схематически решение задачи о неподвижной точке методом последовательных приближений для одномерного случая показано на рис. 17.1. В случаях (a) и (b) мы имеем сходящиеся схемы, причем в случае (a) итерации образуют монотонно возрастающую последовательность, а в случае (b) — осциллирующую. В случае (c) оператор $\mathcal{F}$ имеет две неподвижные точки, X_1^* и X_2^*. Однако точка X_2^* недостижима методом последовательных приближений, потому что не существует содержащего ее шара, в котором $\mathcal{F}(X)$ является отображением сжатия: если ε — малое положительное число, то нулевое приближение $X_0 = X_2^* + \varepsilon$ приводит к расходящейся последовательности, а $X_0 = X_2^* - \varepsilon$ порождает последовательность, сходящуюся к X_1^*, а не к X_2^*.

Рассмотрение одномерных задач о неподвижной точке, представленных на рис. 17.1, наводит на мысль, что сходимость метода последовательных приближений (и все остальные утверждения теоремы 17.1) гарантирована, когда тангенс угла наклона кривой $z = \mathcal{F}(X)$ по модулю меньше единицы (т. е. $|\mathcal{F}'(X)| \leqslant \lambda < 1$). Это действительно так, и доказывается это без особого труда. Возникает вопрос, имеет ли место аналогичное утверждение для n-мерного случая. Ответ на этот вопрос также утвердителен. В самом деле, если $\mathcal{F} \equiv \mathbf{P}$ — оператор, отображающий $\mathscr{E}^n$ в себя

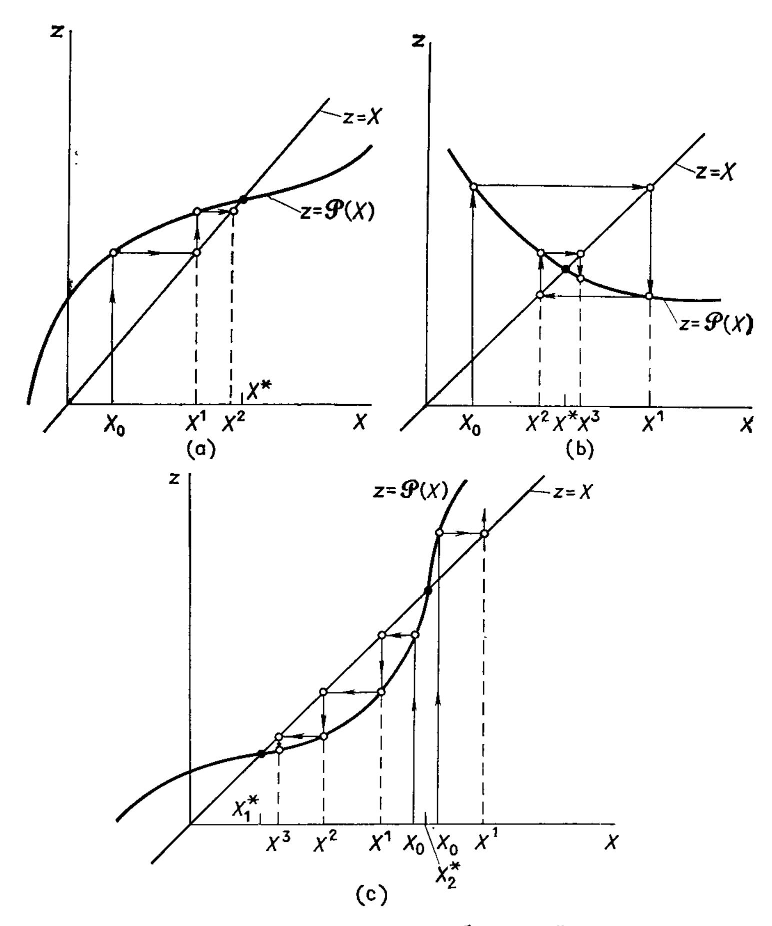


Рис. 17.1. Метод последовательных приближений для некоторых одномерных задач о неподвижных точках.

и имеющий непрерывную производную в $\bar{\mathcal{N}}$ $(\mathbf{X}_0, r)$, то, как следует из теоремы Тэйлора [1]),

$$|P_i(\mathbf{X})-P_i(\mathbf{Y})| \leqslant \sum_{j=1}^{n} \left|\frac{\partial P_i(\xi^i)}{\partial X_j}\right| |X_j - Y_j|$$

для любых двух точек $\mathbf{X}$ и $\mathbf{Y} \in \bar{\mathcal{N}}(\mathbf{X}_0, r)$, где ξ^i некоторая точка шара $\bar{\mathcal{N}}(\mathbf{X}_0, r)$, лежащая на отрезке, соединяющем $\mathbf{X}$ и $\mathbf{Y}$. Если

[1]) См. Айзаксон и Келлер [1966]. Дополнительные сведения об отображениях сжатия можно найти у Ролла [1969] или Ортеги и Рейнболдта [1970].

мы воспользуемся максимум-нормой $\| \mathbf{X} \| = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} | X_i |$, то

$$| \mathbf{P}(X) - \mathbf{P}(Y) | \leqslant \| \mathbf{X} - \mathbf{Y} \| \sum_{j=1}^{n} \left| \frac{\partial P_i (\xi^i)}{\partial X_j} \right|.$$

Следовательно, при $| \partial P_i (\xi^i)/\partial X_j | \leqslant \lambda/n$, $0 \leqslant \lambda < 1$, имеем

$$\| \mathbf{P}(\mathbf{X}) - \mathbf{P}(\mathbf{Y}) \| \leqslant \lambda \| \mathbf{X} - \mathbf{Y} \|,$$

т. е. $\mathbf{P}$ является отображением сжатия в $\overline{\mathcal{N}}(\mathbf{X}_0, r)$ и, значит, справедливы все заключения теоремы 17.1.

Возвращаясь к (17.4), заметим, что можно построить много таких операторов $\mathbf{P}$ (или $\mathcal{P}$), неподвижными точками которых будут решения уравнения (17.4). Пусть, например, $\mathbf{A}(\mathbf{X})$ — любая невырожденная матрица размера $n \times n$. Тогда если положить

$$\mathbf{P}(\mathbf{X}) = \mathbf{X} - \mathbf{A}(\mathbf{X})\, \mathbf{f}(\mathbf{X}),$$

то ясно, что $\mathbf{P}(\mathbf{X}) = \mathbf{X} \Rightarrow \mathbf{A}(X)\, f(\mathbf{X}) = \mathbf{0}$. Но $\mathbf{A}(\mathbf{X})\, \mathbf{f}(\mathbf{X}) = \mathbf{0} \Rightarrow$ $\Rightarrow \mathbf{f}(\mathbf{X}) = \mathbf{0}$, поскольку по предположению матрица $\mathbf{A}(\mathbf{X})$ невырождена при любом $\mathbf{X}$. Рекуррентная формула в этом случае имеет вид

$$\mathbf{X}^{r+1} = \mathbf{P}(\mathbf{X}^r) = \mathbf{X}^r - \mathbf{A}(\mathbf{X}^r)\, \mathbf{f}(\mathbf{X}^r). \qquad (17.21)$$

Выбирая различным образом $\mathbf{A}(\mathbf{X})$, можно по формуле (17.21) построить множество итерационных схем. Если, например, $\mathbf{A}(\mathbf{X}) = \mathbf{A}$ есть постоянная матрица, то (17.21) определяет так называемый *метод хорд*. Если в качестве $\mathbf{A}(\mathbf{X})$ взять матрицу, обратную к матрице Якоби:

$$\mathbf{A}(\mathbf{X}) = \mathbf{J}^{-1}(\mathbf{X}) = [\partial f_i (\mathbf{X})/\partial X_j]^{-1},$$

то получится *метод Ньютона — Рафсона* (см. п. 17.4). Если же положить $\mathbf{A} = \mathbf{J}^{-1}(\mathbf{X}_0)$, то получится *модифицированный метод Ньютона — Рафсона*. Перечень этих примеров можно было бы продолжить и далее.

17.3. МЕТОДЫ СПУСКА И ГРАДИЕНТНОЙ МИНИМИЗАЦИИ

Используя в качестве отправной точки (17.10), рассмотрим некоторые итерационные методы минимизации функции $F(\mathbf{X}) = \mathbf{f}^T(\mathbf{X})\, \mathbf{f}(\mathbf{X})$. Эти методы отличаются выбором λ^r и Γ^r, часть из них относится к методам спуска $[F(\mathbf{X}^{r+1}) \leqslant F(\mathbf{X}^r)]$, а в других используются градиенты (или «сопряженные» градиенты) функции $F(\mathbf{X})$. Поскольку в большинстве этих методов фигурируют некоторые аппроксимации градиента $\mathbf{g}$, их обычно называют градиентными методами.

Покоординатные методы. Один из простейших способов выбора вектора направления $\mathbf{D}^r$ в (17.10) — задать его в виде

$$\mathbf{D}^r = \mathbf{e}_j^r, \tag{17.22}$$

где $\mathbf{e}_j$ есть n-мерный единичный вектор:

$$\mathbf{e}_j^r = \{0, 0, \ldots, 0, 1, 0 \ldots 0\} \tag{17.23}$$

(единица на j-м месте).

Таким образом, каждый раз изменяется лишь одна компонента вектора $\mathbf{X}^r$. Выбор этой компоненты может осуществляться произвольно, или же могут вводиться дополнительные условия, определяющие номер компоненты j, изменяющейся на данном шаге итерации. Методы такого типа называются *покоординатными* методами (или, подробнее, *методами покоординатной релаксации*).

В покоординатных методах λ^r обычно определяется следующим образом. Предположим, что $F(\mathbf{X})$ аналитична в окрестности точки $\mathbf{X}^r$. Тогда справедливо разложение

$$F(\mathbf{X}^r + \lambda^r \mathbf{D}^r) = F(\mathbf{X}^r) + \lambda^r \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F(\mathbf{X}^r)}{\partial X_i} D_i^r + \frac{1}{2} (\lambda^r)^2 \sum_{i,\, j=1}^{n} \frac{\partial^2 F(\mathbf{X}^r)}{\partial X_i\, \partial X_j} D_i^r D_j^r + \ldots . \tag{17.24}$$

Величины $\partial^2 F(\mathbf{X})/\partial X_i\, \partial X_j$ являются компонентами симметричной матрицы $\mathbf{H}$ размера $n \times n$, называемой *матрицей Гессе* функции $F(\mathbf{X})$:

$$H_{ij} = \frac{\partial F(\mathbf{X})}{\partial X_i\, \partial X_j}, \tag{17.25}$$

и

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F(\mathbf{X}^r)}{\partial X_i} D_i^r = \mathbf{g}^r \cdot \mathbf{D}^r, \tag{17.26}$$

где $\mathbf{g}^r = \nabla F(\mathbf{X}^r)$ — градиент функции $F(\mathbf{X})$ в точке $\mathbf{X}^r$. Таким образом, если ограничиться квадратичными членами, то

$$F(\mathbf{X}^r + \lambda^r \mathbf{D}^r) = F(\mathbf{X}^r) + \lambda^r \mathbf{g}^r \cdot \mathbf{D}^r + \frac{1}{2} (\lambda^r)^2 \mathbf{D}^{r\mathrm{T}} \mathbf{H} \mathbf{D}^r. \tag{17.27}$$

Предположим, далее, что поверхность уровня в окрестности точки $\mathbf{X}^r$ выпукла, т. е. для любых $\mathbf{X}$ и $\mathbf{Y}$ из этой окрестности $F[\alpha \mathbf{X} + (1 - \alpha) \mathbf{Y}] \leqslant \alpha F(\mathbf{X}) + (1 - \alpha) F(\mathbf{Y})$ при $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$. Тогда условие того, что величина λ^r при заданном $\mathbf{D}^r$ определяет

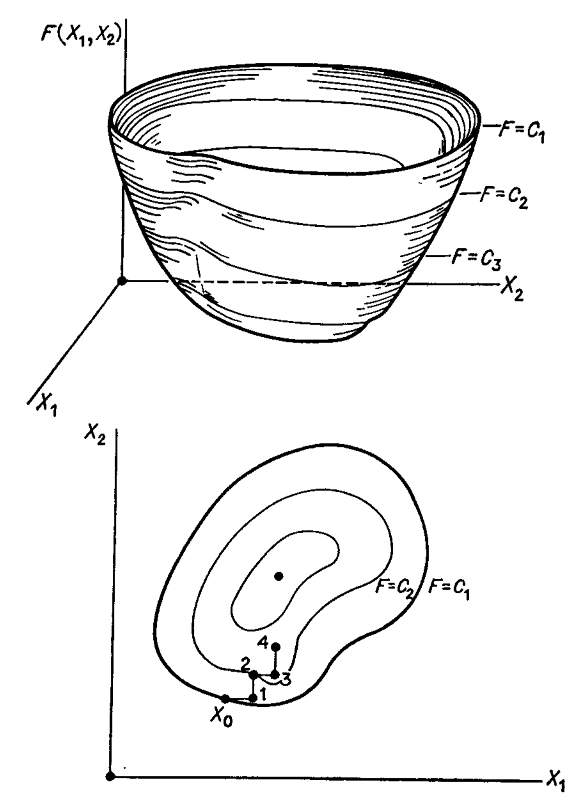


Рис. 17.2. Последовательные движения в методе покоординатной релаксации.

максимальный шаг в направлении минимума, имеет вид

$$\frac{\partial F\,(\mathbf{X}^r+\lambda^r\mathbf{D}^r)}{\partial\lambda^r}=0=\mathbf{g}^r\cdot\mathbf{D}^r+\lambda^r\mathbf{D}^{r\mathrm{T}}\mathbf{H}\mathbf{D}^r,$$

откуда

$$\lambda^r=-\frac{\mathbf{g}^r\cdot\mathbf{D}^r}{\mathbf{D}^{r\mathrm{T}}\mathbf{H}\mathbf{D}^r}=-\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{\partial F\,(\mathbf{X}^r)}{\partial X_i}D_i^r}{\sum\limits_{i}^{n}\sum\limits_{j}^{n}\frac{\partial^2F\,(\mathbf{X}^r)}{\partial X_i\,\partial X_j}D_i^rD_j^r}. \tag{17.28}$$

Поскольку в покоординатных методах $\mathbf{D}^r$ задается формулой (17.22), то

$$\mathbf{g}^r\cdot\mathbf{D}^r=g_i^r,\qquad \mathbf{D}^{r\mathrm{T}}\mathbf{H}\mathbf{D}^r=H_{(j)(j)}^r\equiv\frac{\partial^2F\,(\mathbf{X}^r)}{\partial X_{(j)}\,\partial X_{(j)}}, \tag{17.29}$$

где g_j^r есть j-я компонента градиента $\mathbf{g}$ в точке $\mathbf{X}^r$, а $H_{(j)(j)}^r$ — элемент матрицы Гессе $\mathbf{H}$ в точке $\mathbf{X}^r$, стоящий на пересечении j-й строки и j-го столбца. Таким образом, в покоординатных методах

$$\lambda^r = -\frac{g_j^r}{H_{(j)(j)}^r}. \tag{17.30}$$

Направление j-го шага в (17.22) и (17.30) в принципе произвольно. Образчик последовательных движений в покоординатном методе представлен на рис. 17.2.

Примером одновариантного метода, в котором $\mathbf{e}_j^r$ выбираются не произвольно, может служить известный релаксационный метод Саутвелла [1]). В этом методе номер j того места в (17.23), на котором стоит единица, соответствует той координате, которая обеспечивает максимальное локальное уменьшение $F(\mathbf{X})$, т. е. j выбирается из условия

$$\| \partial F(\mathbf{X}^r)/\partial X_j \| = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} | \partial F(X^r)/\partial X_i |.$$

Ясно, что возможны многочисленные модификации и улучшения этого метода.

Метод наискорейшего спуска. Напомним, что направлением максимальной скорости возрастания функции $F(\mathbf{X})$ является направление ее градиента $\mathbf{g}(\mathbf{X})$. Следовательно, $-\mathbf{g}(\mathbf{X})$ представляет собой направление максимального спуска в $\mathbf{X}$. Полагая

$$\mathbf{D}^r = -\mathbf{g}(\mathbf{X}^r), \tag{17.31}$$

мы получаем метод наискорейшего спуска Коши [1847].

Величину шага λ^r, соответствующую направлению (17.31), можно вычислить по формуле (17.28). Таким образом, для каждого r направление вектора $\mathbf{X}^{r+1} - \mathbf{X}^r$ является направлением наискорейшего убывания $F(\mathbf{X})$.

Нетрудно доказать существование решений и сходимость итерационного процесса в том случае, когда $F(\mathbf{X})$ является квадратичной дважды непрерывно дифференцируемой функцией в области $\mathcal{D}$ и ее матрица Гессе положительно определена.

Теорема 17.2. *Пусть $F(X)$ — квадратичная функция вида*

$$2F(\mathbf{X}) = A + 2\mathbf{b}^T\mathbf{X} + \mathbf{X}^T\mathbf{H}\mathbf{X}, \tag{17.32}$$

где матрица $\mathbf{H}$ положительно определена. Пусть, далее, $\{\mathbf{X}^r\}$ — такая последовательность точек, что

$$\mathbf{X}^{r+1} = \mathbf{X}^r + \lambda^r \mathbf{g}^r,$$

[1]) См., например, Саусвелл [1940, 1946] и Аллен [1954].

где λ^r определяется формулой (17.28), *а* g^r — *градиент*:

$$g^r = \nabla F = HX^r + b.$$

Тогда

а. *Существует единственная точка* X^*, *в которой функция* $F(X)$ *достигает минимума.*

б. *Последовательность* $\{X^r\}$ *сходится к* X^*.

Доказательство [1]). Поскольку H — положительно определенная матрица, существует такая невырожденная матрица K, что $K^TK = H$. Поэтому (17.32) можно переписать в виде

$$2F(X) = (Y^T + b^TK^{-1})(Y + K^{-1T}b) + (A - b^TH^{-1}b),$$

где $Y = KX$. Таким образом, $2F(X) \geqslant A - b^TH^{-1}b$ для всех X, и равенство достигается в том и только в том случае, если $Y = -K^{-1T}b$, т. е. если $X + H^{-1}b = 0$. Поэтому минимум $F(-H^{-1}b)$ существует и единствен. Этим доказано утверждение а теоремы.

Чтобы доказать утверждение б, обозначим через $X^* = -H^{-1}b$ точку, в которой $F(X)$ достигает минимума. Условие $\lim\limits_{r\to\infty} \| X^* - X^r \| = 0$ равносильно в рассматриваемой ситуации условию

$$\lim_{r\to\infty} [F(X^r) - F(X^*)] = 0,$$

которое мы сейчас и докажем.

Пусть $E^r = X^r - X^{*\prime}$— ошибка на r-м шаге. Тогда

$$F(X^r) - F(X^*) = F(X^* + E^r) - F(X^*) = \frac{1}{2} E^{rT}HE^r.$$

Если $\bar{\omega}$ — собственное значение матрицы H, то $HX = \bar{\omega}X$ и $\bar{\omega} = X^THX/X^TX$.

Обозначим через ω отношение наименьшего собственного значения матрицы H к наибольшему. Тогда $\omega X^TX \leqslant X^THX \leqslant X^TX$ для любого X. Следовательно,

$$\frac{F(X^r) - F(X^{r+1})}{F(X^r) - F(X^*)} = \frac{(g^{rT}g^r)^2}{(g^{rT}Hg^r)(g^{rT}H^{-1}g^r)} \geqslant \omega,$$

где $0 < \omega \leqslant 1$, ибо матрица H положительно определена. При выводе этого неравенства используется то обстоятельство, что $HE^r = H(X^r - X^*) = HX^r + b = g^r$. Вычитая обе части неравенства из единицы и производя упрощения, получаем

$$F(X^{r+1}) - F(X^*) \leqslant (1 - \omega)[F(X^r) - F(X^*)].$$

[1]) В изложении этого доказательства мы следуем Саати и Брэму [1964].

Поэтому, если X_0 — нулевое приближение, то

$$F(X^r)-F(X^*)\leqslant(1-\omega)^r[F(X_0)-F(X^*)]. \qquad (17.33)$$

Поскольку $0<\omega\leqslant 1$, правая часть этого неравенства стремится к нулю при неограниченном возрастании r; значит, $F(X^r)-F(X^*)\to 0$, чем и завершается доказательство.

Если $F(X)$ не является квадратичной функцией, то итерационный процесс все же может сходиться в смысле (17.33) при условии, что X_0 достаточно близко к X^* — настолько, чтобы квадратичные члены в разложении $F(X)$ преобладали над членами высших порядков. Доказательства сходимости, основанные на этом соображении, называются доказательствами, основанными на квадратичной сходимости. Теорему 17.2 можно обобщить на случай произвольной дважды непрерывно дифференцируемой функции $F(X)$, матрица Гессе которой в точке минимума X^* положительно определена.

Теорема 17.3[1]. *Пусть $F(X)$ — вещественнозначная дважды непрерывно дифференцируемая функция, определенная на выпуклой области пространства $\mathscr{E}^n$. Пусть X_0 — произвольная точка, такая, что замкнутое множество $\mathscr{G}=\{X\colon F(X)\leqslant F(X_0)\}$ ограничено и для любого вектора $X\in\mathscr{G}$ выполняется неравенство $|X^THX|\leqslant\alpha X^TX$, где H — матрица Гессе функции $F(X)$, а α — положительное число. Пусть, далее, $X^{r+1}=X^r+\lambda^r g^r$, где g^r — градиент функции $F(X)$ в точке $X^r\in\mathscr{G}$ и λ^r удовлетворяет условию $F(X^r+\lambda^r g^r)\leqslant F(X^r+\lambda g^r)$ при любом $\lambda\geqslant 0$. Тогда:* а) *некоторая подпоследовательность $\{X^{r,m}\}$ последовательности $\{X^r\}$ сходится к точке $X^*\in\mathscr{G}$, в которой $g(X^*)=0$;* б) *$F(X^{r,m})$ монотонно убывает и стремится к $F(X^*)$ — локально минимальному значению функции $F(X)$;* в) *если X^* — единственная точка локального минимума в $\mathscr{G}$, то сама последовательность $\{X^r\}$ сходится к X^*.*

Выбор λ^r в соответствии с (17.28) обеспечивает оптимальный размер шага для квадратичной функции $F(X)$. При этом $F(X)$ убывает за один шаг на максимально возможную величину. Если $F(X)$ не является квадратичной функцией или если требуется оптимальность λ^r для заданного числа n шагов, а не для одного шага, то к более быстрой сходимости может привести и другой выбор λ^r.

Методы сопряженных градиентов[2]. Так называемый *метод сопряженных градиентов* минимизирует квадратичные функ-

[1]) Доказательство этой теоремы можно найти у Гольдстейна [1962]. См. также Саати и Брэм [1964].

[2]) См. Хестинз и Штифель [1952], а также Флетчер и Ривс [1964]. Более общее изложение имеется у Дэниэла [1967].

ции n переменных за p итераций, где $p \leqslant n$. Чтобы продемонстрировать идею метода, перепишем квадратичную функцию (17.32) в виде

$$F(\mathbf{X}) = F_0 + \frac{1}{2}(\mathbf{X} - \mathbf{X}^*)^{\mathrm{T}} \mathbf{H} (\mathbf{X} - \mathbf{X}^*), \tag{17.34}$$

где $\mathbf{X}^*$ — точка, в которой $F(\mathbf{X})$ принимает минимальное значение. Тогда

$$\mathbf{g}(\mathbf{X}) = \nabla F = \mathbf{H}(\mathbf{X} - \mathbf{X}^*). \tag{17.35}$$

Как обычно, положим $\mathbf{X}^{r+1} = \mathbf{X}^r + \lambda^r \mathbf{D}^r$. Предположим, что векторы $\mathbf{D}^0, \mathbf{D}^1, \ldots, \mathbf{D}^n$, указывающие направления последовательных движений, линейно независимы, и введем обозначение $\sigma^r = \lambda^r \mathbf{D}^r$. Имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{X}^r &= \mathbf{X}^{r-1} + \sigma^{r-1} = \\ &= \mathbf{X}^{r-2} + \sigma^{r-2} + \sigma^{r-1} = \\ &= \mathbf{X}^{r-q} + \sigma^{r-q} + \sigma^{r-q+1} + \ldots + \sigma^{r-1}, \end{aligned}$$

или, для n-й итерации,

$$\mathbf{X}^n = \mathbf{X}^{r+1} + \sum_{q=r+1}^{n-1} \sigma^q. \tag{17.36}$$

Поэтому

$$\mathbf{g}^n = \mathbf{H}(\mathbf{X}^n - \mathbf{X}^*) = \mathbf{H}\mathbf{X}^{r+1} + \mathbf{H} \sum_{q=r+1}^{n-1} \sigma^q - \mathbf{H}X^*.$$

Поскольку $\mathbf{H}\mathbf{X}^* = \mathbf{0}$ и $\mathbf{H}\mathbf{X}^{r+1} = \mathbf{g}^{r+1}$, то

$$\mathbf{g}^n = \mathbf{g}^{r+1} + \sum_{q=r+1}^{n-1} \lambda^q \mathbf{H}\mathbf{D}^q.$$

Отсюда следует, что

$$\mathbf{g}^{n\mathrm{T}} \mathbf{D}^r = \mathbf{g}^{(r+1)\mathrm{T}} \mathbf{D}^r + \sum_{q=r+1}^{n-1} \lambda^q \mathbf{D}^{q\mathrm{T}} \mathbf{H} \mathbf{D}^r. \tag{17.37}$$

Предположим теперь, что векторы $\mathbf{D}^0, \mathbf{D}^1, \ldots, \mathbf{D}^{n-1}$ являются $\mathbf{H}$-сопряженными в том смысле, что

$$\mathbf{D}^{q\mathrm{T}} \mathbf{H} \mathbf{D}^r = 0, \qquad q \neq r. \tag{17.38}$$

Тогда в силу (17.37) для всех r имеем

$$\mathbf{g}^{n\mathrm{T}} \mathbf{D}^r = 0. \tag{17.39}$$

Поскольку $\mathbf{D}^0, \mathbf{D}^1, \ldots, \mathbf{D}^{n-1}$ линейно независимы, они образуют базис нашего n-мерного пространства. Поэтому (17.39) означает, что

$$\mathbf{g}^n = \mathbf{0}. \tag{17.40}$$

Значит,

$$\mathbf{H}(\mathbf{X}^n - \mathbf{X}^*) = \mathbf{g}^n = 0,$$

и вследствие положительной определенности **H**

$$\mathbf{X}^n = \mathbf{X}^*. \qquad (17.41)$$

Таким образом, минимум достигается после n итераций или раньше, если на каком-либо шаге λ^n окажется равным нулю.

Основное требование (17.38) метода сопряженных градиентов может быть удовлетворено различными способами. В общем случае полагаем, как обычно,

$$\mathbf{D}^0 = -\mathbf{g}^0 = -\nabla F(\mathbf{X}_0) \qquad (17.42а)$$

и

$$\mathbf{D}^{r+1} = -\mathbf{g}^{r+1} + \beta^r \mathbf{D}^r, \qquad (17.42б)$$

где β^r выбирается так, чтобы удовлетворялось условие (17.38), т. е. чтобы

$$\mathbf{D}^{r+1^{\mathrm{T}}}\mathbf{H}\mathbf{D}^r = -\mathbf{g}^{r+1^{\mathrm{T}}}\mathbf{H}\mathbf{D}^r + \beta^r \mathbf{D}^{r^{\mathrm{T}}}\mathbf{H}\mathbf{D}^r = 0.$$

Отсюда

$$\beta^r = \frac{\mathbf{g}^{r+1^{\mathrm{T}}}\mathbf{H}\mathbf{D}^r}{\mathbf{D}^{r^{\mathrm{T}}}\mathbf{H}\mathbf{D}^r}. \qquad (17.43)$$

Определенные таким образом векторы направлений $\mathbf{D}^r$ являются линейно независимыми и **H**-сопряженными.

Если $F(\mathbf{X})$ — не квадратичная функция (17.34), а функция общего вида, то матрицу Гессе **H** надо определять для каждого цикла. В этом случае вывод о сходимости за n итераций становится, строго говоря, неверным, но и для неквадратичных функций часто наблюдается относительно быстрая сходимость за n циклов. Кроме того, в случае неквадратичной функции $F(\mathbf{X})$ иногда более удобно размеры шагов λ^r подбирать способом, отличным от (17.28).

Метод переменных матриц. Метод переменных матриц, предложенный Давидоном [1959] и обобщенный Флетчером и Пауэллом [1963], является мощным итерационным методом спуска, позволяющим находить локальные минимумы нелинейных функций нескольких переменных. Метод основан на обычном предположении, что члены второго и более низких порядков в разложении Тэйлора преобладают над всеми другими членами в окрестности локального минимума. Напомним, что для квадратичной функции n переменных вида (17.32) точкой минимума является $\mathbf{X}^* = -\mathbf{H}^{-1}\mathbf{b}$. В методе переменных матриц, однако, обратная матрица $\mathbf{H}^{-1}$ не вычисляется непосредственно. Вместо этого вводится аппроксимирующая ее матрица **G**, в качестве которой перво-

начально можно взять любую положительно определенную симметричную матрицу. Матрица $\mathbf{G}$ видоизменяется при r-й итерации с использованием информации, полученной при движении в направлении

$$\mathbf{D}^r = -\mathbf{G}^r\mathbf{g}^r. \tag{17.44}$$

Видоизменение осуществляется таким образом, чтобы вектор перемещения σ^i к минимуму вдоль прямой $\mathbf{X} = \mathbf{X}^r + \lambda\mathbf{D}^r$ был собственным вектором матрицы $\mathbf{G}^{r+1}\mathbf{H}$. Это гарантирует, что $\mathbf{G}$ приближается к матрице $\mathbf{H}^{-1}$, определенной в точке минимума. Обычно $\mathbf{G}_0$ принимают равной единичной матрице, при этом начальный шаг совершается в направлении наискорейшего спуска.

После определения $\mathbf{D}^r$ из соотношения (17.44) величина λ^r подбирается таким образом, чтобы значение $F(\mathbf{X}^r + \lambda^r\mathbf{S}^r)$ было минимальным по сравнению со всеми другими значениями на прямой $\mathbf{X}^r + \lambda\mathbf{S}^r$. Процесс осуществляется следующим образом. Полагаем

$$\mathbf{X}^{r+1} = \mathbf{X}^r + \sigma^r, \tag{17.45}$$

где $\sigma^r = \lambda^r\mathbf{D}^r$. Вычисляем $F(\mathbf{X}^{r+1})$, учитывая, что $\sigma^{rT}\mathbf{g}^{r+1} = 0$, и определяем

$$\mathbf{Y}^r = \mathbf{g}^{r+1} - \mathbf{g}^r. \tag{17.46}$$

Тогда

$$\mathbf{G}^{r+1} = \mathbf{G}^r + \mathbf{A}^r + \mathbf{B}^r, \tag{17.47}$$

где

$$\mathbf{A}^r = \frac{\sigma^r\sigma^{r^{\mathrm{T}}}}{\sigma^{r^{\mathrm{T}}}\mathbf{Y}^r}, \tag{17.48а}$$

$$\mathbf{B}^r = -\frac{\mathbf{G}^r\mathbf{Y}^r\mathbf{Y}^{r\mathrm{T}}\mathbf{G}^r}{\mathbf{Y}^{r^{\mathrm{T}}}\mathbf{G}^r\mathbf{Y}^r}. \tag{17.48б}$$

Далее весь процесс повторяется исходя из точки $\mathbf{X}^{r+1}$ с использованием градиента $\mathbf{g}^{r+1}$ и матрицы $\mathbf{G}^{r+1}$. Величина расстояния от минимума при r-й итерации задается формулой

$$\hat{d}^r = (\mathbf{g}^{r\mathrm{T}}\mathbf{H}^{-1^{\mathrm{T}}}\mathbf{H}^{-1}\mathbf{g}^r)^{1/2}, \tag{17.49}$$

которую можно приближенно записать так:

$$\hat{d}^r \approx (\mathbf{D}^{r^{\mathrm{T}}}\mathbf{D}^r)^{1/2} \tag{17.50}$$

(ибо $\mathbf{G}^r$ приближается к $\mathbf{H}^{-1}$ при $r \to \infty$). Итерационный процесс заканчивают, когда $\hat{d}^r$ станет меньше некоторой заданной величины или когда каждая компонента D^r станет меньше заданной постоянной.

Можно показать, что если $F(\mathbf{X})$ — квадратичный функционал, то описанный метод сходится за $m \leqslant n$ итераций. Действительно, из (17.46) следует, что

$$\mathbf{Y}^r = \mathbf{H}\mathbf{X}^{r+1} - \mathbf{H}\mathbf{X}^r = \mathbf{H}\sigma^r.$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} \mathbf{G}^{r+1}\mathbf{H}\sigma^r &= \mathbf{G}^r Y^r + \sigma^r \left(\frac{\sigma^{r^{\mathrm{T}}}\mathbf{H}\sigma^r}{\sigma^{r^{\mathrm{T}}}\mathbf{H}\sigma^r} \right) - \frac{\mathbf{G}^r\mathbf{Y}^r(\mathbf{G}^r\mathbf{Y}^r)\mathbf{Y}^r}{\mathbf{Y}^{r^{\mathrm{T}}}\mathbf{G}^r\mathbf{Y}^r} = \\ &= \mathbf{G}^r\mathbf{Y}^r + \sigma^r - \mathbf{G}^r\mathbf{Y}^r = \\ &= \sigma^r. \end{aligned} \tag{17.51}$$

Мы можем считать, что $\mathbf{H}$ и $\mathbf{G}^r$ суть вполне определенные симметричные положительно определенные матрицы. Тогда для каждого $r = 0, 1, \ldots, n-1$ определена итерация $\mathbf{X}^r \neq \mathbf{H}^{-1}\mathbf{b} = \mathbf{X}^*$. В противном случае $\mathbf{X}^r = \mathbf{X}^*$ и процесс сходится для $r < n$. Из предыдущего обсуждения сопряженных градиентов мы знаем, что $\mathbf{X}^n = \mathbf{H}^{-1}\mathbf{b}$, если $\mathbf{D}^0, \ldots, \mathbf{D}^r$ являются H-сопряженными. Рассмотрим следующие два соотношения:

$$\sigma^{i^{\mathrm{T}}}\mathbf{H}\sigma^j = 0, \qquad 0 \leqslant i < j < k, \tag{17.52а}$$

$$\mathbf{G}^k\mathbf{H}\sigma^i = \sigma^i, \qquad 0 \leqslant i < k. \tag{17.52б}$$

Из (17.51) видно, что они справедливы при $k = 1$. Покажем, что если они выполняются для k, то они верны и для $k+1$. Из первоначального выражения для градиента $\mathbf{g}^k = \mathbf{a} + \mathbf{H}\mathbf{X}^k$ следует, что

$$\mathbf{g}^k = \mathbf{a} + \mathbf{H}(\mathbf{X}^{i+1} + \sigma^{i+1} + \sigma^{i+2} + \ldots + \sigma^{k-1}),$$

откуда

$$\mathbf{g}^k = \mathbf{g}^{i+1} + \mathbf{H}(\sigma^{i+1} + \sigma^{i+2} + \ldots + \sigma^{k-1}).$$

Значит, для всех $i \leqslant k$, $i \neq k$,

$$\sigma^{i^{\mathrm{T}}}\mathbf{g}^k = \sigma^{i^{\mathrm{T}}}\mathbf{g}^{i+1} = 0,$$

так что (17.52) верно для $k \leqslant n$. Отсюда следует, что $\mathbf{X}^n = \mathbf{H}^{-1}\mathbf{b}$. Соотношение (17.52а) показывает, что $\mathbf{G}^n\mathbf{H}$ имеет n линейно независимых собственных векторов с единичными собственными значениями. Поэтому $\mathbf{G}^n\mathbf{H} = \mathbf{I}$, что и требовалось доказать.

17.4. МЕТОД НЬЮТОНА — РАФСОНА

Теперь рассмотрим мощный и хорошо известный метод Ньютона — Рафсона и его модификацию. Этот метод широко применяется в нелинейных задачах механики твердых тел и, в частности, строительной механики.

Вернемся опять к системе нелинейных уравнений (17.4) и предположим, что разность между начальной точкой $\mathbf{X}_0$ и решением является малым вектором $\Delta\mathbf{X}$. Если функция $\mathbf{f}(\mathbf{X})$ достаточное число раз дифференцируема в $\mathbf{X}_0$, то можно воспользоваться разложением Тэйлора:

$$\mathbf{f}(\mathbf{X}) = \mathbf{f}(\mathbf{X}_0 + \Delta\mathbf{X}) = \mathbf{f}(\mathbf{X}_0) + \mathbf{J}_0(\mathbf{X} - \mathbf{X}_0) + \ldots = 0, \quad (17.53)$$

где $\mathbf{J}_0$ — *матрица Якоби* в точке $\mathbf{X}_0$:

$$\mathbf{J}_0 = \left[\frac{\partial f_i(\mathbf{X}_0)}{\partial X_j}\right]. \quad (17.54)$$

Если в (17.53) ограничиться только линейными членами, то получим

$$0 \approx \mathbf{f}(\mathbf{X}_0) + \mathbf{J}_0(\mathbf{X} - \mathbf{X}_0),$$

откуда

$$\mathbf{X} = \mathbf{X}_0 - \mathbf{J}_0^{-1}\mathbf{f}(\mathbf{X}_0). \quad (17.55)$$

Это значение $\mathbf{X}$, конечно, лишь приближенное, но его можно использовать в качестве начального на следующем шаге итерационного процесса. В общем случае получаем рекуррентную формулу

$$\mathbf{X}^{r+1} = \mathbf{X}^r - \mathbf{J}^{r^{-1}}\mathbf{f}(\mathbf{X}^r). \quad (17.56)$$

Процесс повторяется до тех пор, пока не получим $|\Delta X_j| < \varepsilon$ для некоторого заранее заданного ε.

Проиллюстрируем метод Ньютона — Рафсона на классическом примере функций одной переменной. Начиная с пробной точки X_0, вычисляем $f(X_0)$ и $f'(X_0)$ и подсчитываем новое значение $X^1 = X_0 - f(X_0)/f'(X_0)$. Как показано на рис. 17.3a, это означает спуск по касательной к функции $f(X)$ в точке X_0. Если $f'(X)$ в какой-либо точке обращается в нуль, итерации Ньютона — Рафсона, как видно из рис. 17.3b, могут расходиться.

Отметим, что в соответствии с (17.56) на каждом шаге итерационного процесса нужно обращать матрицу Якоби $\mathbf{J}^r$ размера $n \times n$. Этого можно избежать, применяя *модифицированный метод Ньютона — Рафсона*, в котором используется лишь матрица Якоби из первого шага. В этом методе вместо (17.56) применяется рекуррентная формула:

$$\mathbf{X}^{r+1} = \mathbf{X}^r - \mathbf{J}_0^{-1}\mathbf{f}(\mathbf{X}^r). \quad (17.57)$$

Ясно, что модифицированный метод Ньютона — Рафсона является частным случаем упомянутого в п. 17.2 метода хорд, соответствующим выбору $\mathbf{J}_0^{-1}$ в качестве матрицы $\mathbf{A}$ из (17.21). Хотя необходимое для достижения требуемой точности число итераций при использовании модифицированного метода, как правило, гораздо больше, общий объем вычислений и затраты времени могут быть

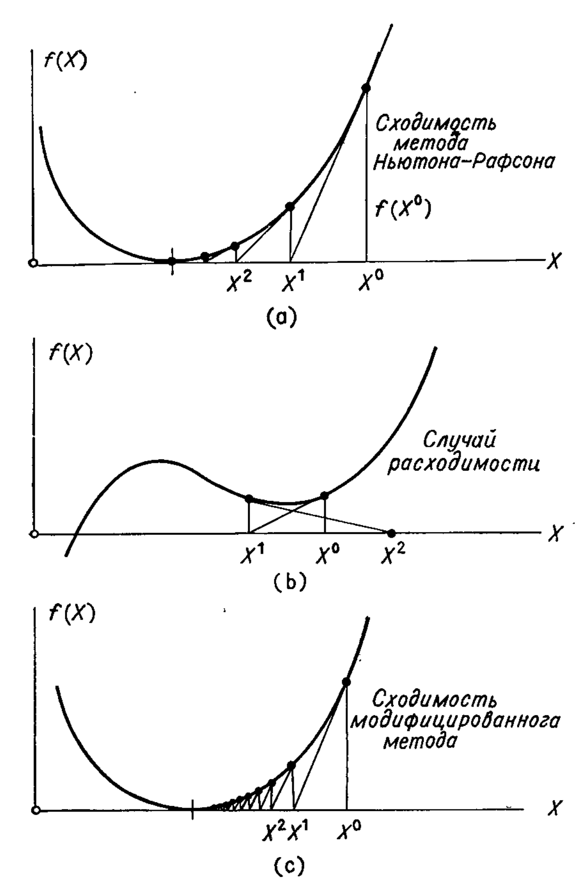


Рис. 17.3. Стандартный и модифицированный методы Ньютона — Рафсона.

значительно меньше, чем при использовании обычного метода Ньютона — Рафсона. Схематично сопоставление модифицированного и немодифицированного методов представлено на рис. 17.3a и c; в последнем случае видно, что во всех итерациях используется начальный наклон $f'(X_0)$.

Метод Ньютона — Рафсона и его модифицированный вариант успешно применялись на практике для решения больших систем нелинейных уравнений. Важная роль этих итерационных методов связана и с их теоретической ценностью, поскольку для них существует ряд теорем, позволяющих ответить на вопросы о существовании и единственности решения, сходимости и скорости сходимости итерационного процесса на основе сведений о начальной точке $\mathbf{X}_0$ и о значениях $|\partial f_i/\partial X_j|$ и $|\partial^2 f_i/\partial X_j\, \partial X_k|$. Кроме

того, результаты о существовании и единственности решений и о сходимости метода Ньютона — Рафсона решения нелинейных алгебраических и трансцендентных уравнений можно обобщить на случай нелинейных операторов в банаховых пространствах.

Приведем без доказательства некоторые теоремы о нелинейных уравнениях [1]).

Теорема 17.4. Система нелинейных уравнений:

$$f_i(\mathbf{X}) = 0, \qquad i = 1, 2, \ldots, n,$$
$$\mathbf{X}^{\mathrm{T}} = \{X_1, \ldots, X_n\},$$

имеет решение, которое можно получить методом Ньютона — Рафсона, если выполнены следующие условия:

а. *Матрица Якоби* $\mathbf{J}_0$ *невырождена и*

$$\|\mathbf{J}_0^{-1}\| \leqslant B, \tag{17.58}$$

где B — некоторое положительное число.

б.
$$\|\mathbf{X}^1 - \mathbf{X}_0\| \leqslant A, \tag{17.59}$$

где A — некоторое положительное число.

в.
$$\frac{\partial^2 f_i}{\partial X_j\, \partial X_k} \leqslant C \qquad \text{для} \quad i, j, k = 1, 2, \ldots, n. \tag{17.60}$$

При этом решение $\mathbf{X}^*$ *удовлетворяет оценке*

$$\|\mathbf{X}^* - \mathbf{X}_0\| \leqslant \left(1 - \sqrt{1 - 2c_0}\right) \frac{A}{c_0}, \tag{17.61}$$

где

$$c_0 = Bn\sqrt{n}\, CA \leqslant \frac{1}{2}. \tag{17.62}$$

Теорема 17.5. Если выполнены все условия теоремы 17.4 *и*

$$\frac{\partial^2 f_i}{\partial X_j\, \partial X_k} \leqslant A \qquad i, j, k = 1, 2, \ldots, n \tag{17.63}$$

в области

$$\|\mathbf{X} - \mathbf{X}_0\| < \left(1 + \sqrt{1 - 2c_0}\right) \frac{B}{c_0}, \tag{17.64}$$

то решение $\mathbf{X}^*$ *единственно.*

На r-м шаге итерационного процесса

$$\|\mathbf{X}^{r+1} - \mathbf{X}^r\| = \|\mathbf{J}^{r^{-1}} \mathbf{f}(\mathbf{X}^r)\|,$$

а нам нужно, чтобы

$$\lim_{r\to\infty} \|\mathbf{X}^* - \mathbf{X}^r\| = 0,$$

---

[1]) См., например, Ролл [1969].

т. е. чтобы для любого заданного положительного ε существовало такое целое m, что

$$\| \mathbf{X}^* - \mathbf{X}^r \| < \varepsilon \qquad \text{при} \quad r > m.$$

Поэтому мы должны постоянно, начиная с нулевого приближения, следить за величиной $\| \mathbf{J}^{r^{-1}} \mathbf{f} (\mathbf{X}^r) \|$, которая позволяет удерживать в нужных границах последовательные итерации. Если существование $\mathbf{J}_0^{-1}$ уже установлено, оценка нормы матрицы, обратной к матрице Якоби, на следующем шаге зависит от оценки модуля вторых производных $| f_{i,\, jk} |$ и получается с помощью теоремы о среднем значении. Отсюда условие (17.60).

Метод Ньютона — Рафсона можно рассматривать как еще один метод минимизации, во многом похожий на методы наискорейшего спуска. Предположим, что

$$F(\mathbf{X}) = \mathbf{f}^{\mathrm{T}}(\mathbf{X})\, \mathbf{f}(\mathbf{X}) = f_i f_i$$

и с точностью до квадратичных членов

$$F(\mathbf{X}^{r+1}) = F(\mathbf{X}^r + \sigma^r) = \\ = F(\mathbf{X}^r) + \mathbf{g}^{rT}\sigma^r + \frac{1}{2}\sigma^{rT}\mathbf{H}^r\sigma^r.$$

Выберем σ^r так, чтобы

$$\frac{\partial [F(\mathbf{X}^{r+1}) - F(\mathbf{X}^r)]}{\partial \sigma_i^r} = 0 = \mathbf{g}^r + \mathbf{H}^r \sigma^r.$$

Но

$$g_i^r = \frac{\partial F(\mathbf{X}^r)}{\partial X_i} = 2 f_i(\mathbf{X}^r) = 2 f_i^r,$$

$$H_{ij}^r = \frac{\partial^2 F(\mathbf{X}^r)}{\partial X_i\, \partial X_j} = 2 J_{ij}(\mathbf{X}^r) = 2 J_{ij}^r.$$

Таким образом, метод Ньютона — Рафсона характеризуется вектором поправки

$$\sigma^r = \lambda^r \mathbf{D}^r = -\mathbf{H}^{r^{-1}} \mathbf{g}^r = [-4 J_{ij}^{r^{-1}} f_i^r] \tag{17.65}$$

и

$$\mathbf{X}^{r+1} = \mathbf{X}^r - \mathbf{H}^{r^{-1}} \mathbf{g}^r = \mathbf{X}^r - \mathbf{J}^{r^{-1}} \mathbf{f}^r. \tag{17.66}$$

Следует отметить, что в методе Ньютона — Рафсона (как, впрочем, и в большинстве градиентных методов) на каждом шаге итерационного процесса требуется знание величины $\partial f_i / \partial X_j$. Однако, за исключением отдельных случаев, вычисление большого массива производных либо вообще невозможно, либо требует чересчур много времени. Поэтому удобно использовать конечно-разностные аппроксимации для $\mathbf{J}$. Используя, например, для $\partial f_i / \partial X_j$ разно-

стную аппроксимацию вперед, зададимся малым $\Delta X_i = h$ и запишем

$$\frac{\partial f_i(\mathbf{X}^r)}{\partial X_j} \approx \frac{f_i(X^1, X^2, \ldots, X^j+h, \ldots, X^n) - f_i(X^r)}{h}. \quad (17.67)$$

Тогда производные $\partial f_i/\partial X_j$ не надо вычислять аналитически и при составлении вычислительных программ в памяти машины требуется хранить только n функций $f_i(\mathbf{X})$, а градиенты их уже не требуются.

17.5. МЕТОД ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫХ НАГРУЖЕНИЙ [1]

По-видимому, наиболее часто используемым методом решения систем нелинейных уравнений, встречающихся в задачах нелинейной теории упругости, является метод последовательных нагружений. Будучи в некоторых чертах сходным с методом Ньютона — Рафсона, этот метод обладает рядом особенностей, делающих его особенно полезным в приложениях к физическим задачам. Во-первых, каждый шаг итерационного процесса допускает ясную физическую интерпретацию. А именно рассматривается нагружение деформируемого тела приращением нагрузки δp, которое считается достаточно малым, так что реакция тела на это приращение линейна. После приложения каждого приращения нагрузки выписывается новое жесткостное соотношение и осуществляется следующее приращение нагрузки. Продолжая этот процесс, мы получаем полную картину нелинейного поведения тела в виде последовательности кусочно-линейных шагов. Поскольку до приложения нагрузок тело, как правило, находится в естественном ненапряженном состоянии, вопрос о выборе начального приближения отпадает. Действительно, если $\mathbf{X}$ обозначает вектор неизвестных узловых перемещений, то мы просто полагаем $\mathbf{X}_0 = 0$, что дает начальную точку, соответствующую недеформированному состоянию тела. В случае же, когда тело несжимаемо, мы приравниваем нулю узловые перемещения и вычисляем гидростатические давления в недеформированном состоянии. Они и служат компонентами начальной точки $\mathbf{X}_0$.

Поскольку каждый его шаг имеет вполне определенный физический смысл, метод последовательных нагружений позволяет

[1]) В литературе методы последовательных нагружений фигурируют под самыми разнообразными названиями: например, описываемые здесь расчетные схемы часто называют методами погружения, методами продолжения или методами переменных параметров. Методы погружения использовались при исследовании вопросов существования решений нелинейных операторных уравнений и для решения нелинейных функциональных уравнений. См., скажем, работы Гавурина [1958], Давиденко [1965] и Мейера [1968]. Имеется исторический обзор Фиккена [1951]. Сводное изложение методов продолжения и дополнительные ссылки на литературу читатель найдет в книге Ортеги и Рейнболдта [1970].

получить гораздо больше сведений о поведении тела, чем просто величины перемещений при заданной системе нагрузок. Действительно, естественным образом получается полный набор решений, соответствующих различным частям нагрузки. Это позволяет исследовать промежуточные состояния на устойчивость и при необходимости производить соответствующие видоизменения процедуры для определения точек бифуркации и нахождения многозначных решений.

Приступим к описанию метода. Опять начнем с рассмотрения системы n нелинейных уравнений вида (17.4), но теперь будем предполагать, что каждое уравнение помимо неизвестного вектора $\mathbf{X}$ содержит еще некоторый вещественный параметр p, т. е. будем рассматривать систему вида

$$\mathbf{h}(\mathbf{X}, p) = 0. \tag{17.68}$$

Здесь $\mathbf{h}$ есть n-мерный «вектор нелинейных уравнений» относительно компонент n-мерного вектора $\mathbf{X}$, а параметр p, вообще говоря, связан с заданной нагрузкой. Если на тело действуют n независимых нагрузок, то все равно можно получить систему типа (17.68), представляя полный вектор нагрузок $\mathbf{P}$ в виде $p\mathbf{\Lambda}$, где $\mathbf{\Lambda}$ — постоянный вектор. Если в задаче параметр p не присутствует сам естественным образом (как в задачах строительной механики), то систему уравнений вида (17.68) можно получить, осуществляя погружение нашей нелинейной системы (17.4) в некоторое однопараметрическое семейство с помощью оператора, обычно называемого *оператором гомотопии*, например, такого [1]):

$$\mathbf{h}(\mathbf{X}, p) = \alpha(p)\,\mathbf{g}(\mathbf{X}) + \beta(p)\,\mathbf{f}(\mathbf{X}), \tag{77.69a}$$

где $\alpha(p)$ и $\beta(p)$ — вещественнозначные функции, а $\mathbf{g}(\mathbf{X})$ — векторнозначная функция, подобранная таким образом, что если $p \in [0, Q]$ (Q — вещественное число), то

$$\mathbf{h}(\mathbf{X}_0, 0) = 0$$

и

$$\mathbf{h}(\mathbf{X}^*, Q) = 0,$$

где $\mathbf{X}^*$ — решение системы (17.4). Можно, например, положить

$$\mathbf{h}(\mathbf{X}, p) = (Q - p)(\mathbf{X} - \mathbf{X}_0) + p\mathbf{f}(\mathbf{X}). \tag{17.69б}$$

Тогда

$$\mathbf{h}(\mathbf{X}_0, 0) = 0$$

и

$$\mathbf{h}(\mathbf{X}^*, Q) = Q\mathbf{f}(\mathbf{X}^*) = 0$$

[1]) См. Мейер [1968].

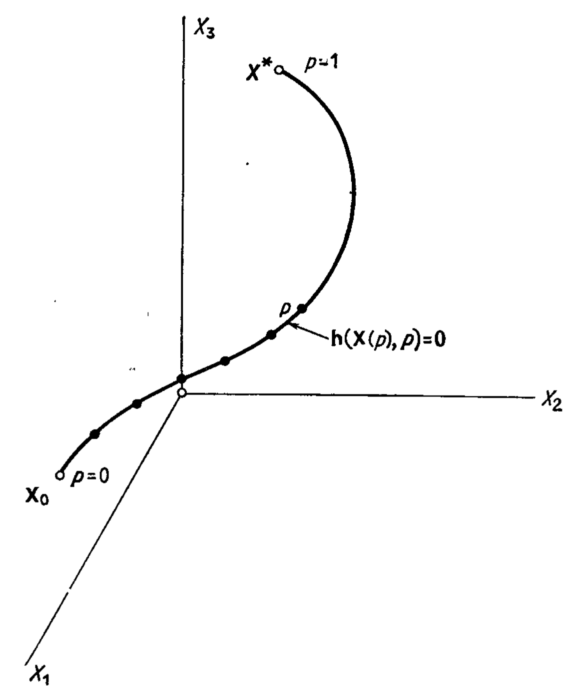


Рис. 17.4. Кривая в $\mathscr{E}^3$, определяемая нелинейной системой $h_i(X_1, X_2, X_3; p) = 0$, $i = 1, 2, 3$, $p \in [0, 1]$.

означает, что решение $\mathbf{X}^*$ системы (17.4) достигается при $p = Q$. В задачах механики редко возникает необходимость в погружениях типа (17.69), поскольку уравнения вида (17.68) появляются вполне естественно. Отметим также, что параметр нагрузки p всегда можно нормировать. Если, например, $p \in [0, Q]$, то берем $\hat{p} = p/Q \in [0, 1]$.

При заданном значении p система (17.68) определяет точку в $\mathscr{E}^n$, лежащую на пересечении n поверхностей $h_i(\mathbf{X}, p) = 0$. Таким образом, (17.68) представляет собой систему параметрических уравнений траектории, или кривой, в $\mathscr{E}^n$ с параметром p. Если бы мы могли решить (17.68) для любого $p \in [0, 1]$, то решения

$$\mathbf{X} = \mathbf{X}(p)$$

были бы явными параметрическими уравнениями кривой в $\mathscr{E}^n$, соединяющей известную начальную точку $\mathbf{X}_0 = \mathbf{X}(0)$ с решением заданной системы нелинейных уравнений $\mathbf{X}^* = \mathbf{X}(1)$ [или $\mathbf{X}^* = \mathbf{X}(Q)$, если $p \in [0, Q]$]. Для случая $n = 3$ такая кривая показана на рис. 17.4.

Итак, $\mathbf{X} = \mathbf{X}(p)$ есть отображение отрезка $[0, 1]$ в некоторое множество $\mathcal{D} \subset \mathcal{E}^n$. Будем предполагать, что это отображение удовлетворяет соотношению (17.68) для всех $p \in [0, 1]$, что оно непрерывно дифференцируемо по p на отрезке $[0, 1]$ и что функция $\mathbf{h}\colon \mathcal{E}^n \times [0, 1] \to \mathcal{E}^n$ в (17.68) имеет непрерывные частные производные по $\mathbf{X}$ и p. Таким образом, (17.68) удовлетворяется для всех значений p из отрезка $[0, 1]$. Следовательно, если $\mathbf{X}$ — решение, соответствующее некоторому значению p, а $\mathbf{X} + \delta\mathbf{X}$ — другое решение, соответствующее $p + \delta p$, где δp — приращение p, то

$$\mathbf{h}(\mathbf{X}, p) = \mathbf{h}(\mathbf{X} + \delta\mathbf{X},\ p + \delta p) = 0. \tag{17.70}$$

В силу предположенной дифференцируемости $\mathbf{h}(\mathbf{X}, p)$ имеем

$$\mathbf{h}(\mathbf{X} + \delta\mathbf{X},\ p + \delta p) = \mathbf{h}(\mathbf{X},\ p) + \mathbf{H}_x(\mathbf{X},\ p)\,\delta\mathbf{X} + \mathbf{h}_p(\mathbf{X},\ p)\,\delta p + \boldsymbol{\omega}(\mathbf{X},\ p,\ \delta\mathbf{X},\ \delta p), \tag{17.71}$$

где $\mathbf{H}_x$ — матрица размера $n \times n$, а $\mathbf{h}_p$ и $\boldsymbol{\omega}$ — n-мерные векторы, определяемые соотношениями

$$\mathbf{H}_x(\mathbf{X},\ p) = \left[\frac{\partial h_i(\mathbf{X},\ p)}{\partial X_j}\right], \tag{17.72а}$$

$$\mathbf{h}_p(\mathbf{X},\ p) = \left[\frac{\partial h_i(\mathbf{X},\ p)}{\partial p}\right] \tag{17.72б}$$

и

$$\boldsymbol{\omega}(\mathbf{X},\ p,\ \delta\mathbf{X},\ \delta p) = \left\{\frac{1}{2!}\left[\frac{\partial^2 h_i(\boldsymbol{\xi}^1,\ \theta)}{\partial X_j\,\partial X_k}\,\delta X_j\delta X_k + 2\,\frac{\partial^2 h_i(\boldsymbol{\xi}^1,\ \theta)}{\partial X_j\,\partial p}\,\delta X_j\delta p + \frac{\partial^2 h_i(\boldsymbol{\xi}^1,\ \theta)}{\partial p^2}\,\delta p^2\right]\right\}. \tag{17.72в}$$

Здесь

$$\boldsymbol{\xi}^1 \in \{\overline{\mathbf{X}} \mid \overline{\mathbf{X}} = \alpha\mathbf{X} + (1-\alpha)(\mathbf{X} + \delta\mathbf{X});\quad 0 \leqslant \alpha \leqslant 1\},$$

$$\theta \in [p,\ p + \delta p].$$

Итерационная схема приближенного решения уравнения (17.68) немедленно получается из (17.70) и (17.71), если предположить, что δp и $|\delta X_i|$ достаточно малы, чтобы в (17.71) можно было сохранить только линейные члены. При этом

$$\mathbf{H}_x(\mathbf{X},\ p)\,\delta\mathbf{X} + \mathbf{h}_p(\mathbf{X},\ p)\,\delta p \approx 0.$$

Следовательно, если $\mathbf{H}_x^{-1}(\mathbf{X},\ p)$ существует в точке $(\mathbf{X},\ p)$, то

$$\delta\mathbf{X} = -\mathbf{H}_x^{-1}(\mathbf{X},\ p)\,\mathbf{h}_p(\mathbf{X},\ p)\,\delta p. \tag{17.73}$$

Это непосредственно приводит к методу последовательных нагружений. А именно, пусть $p \in [0, Q]$, $\mathbf{X}(0) = \mathbf{X}^0$ и матрица $\mathbf{H}_x(\mathbf{X},\ p)$

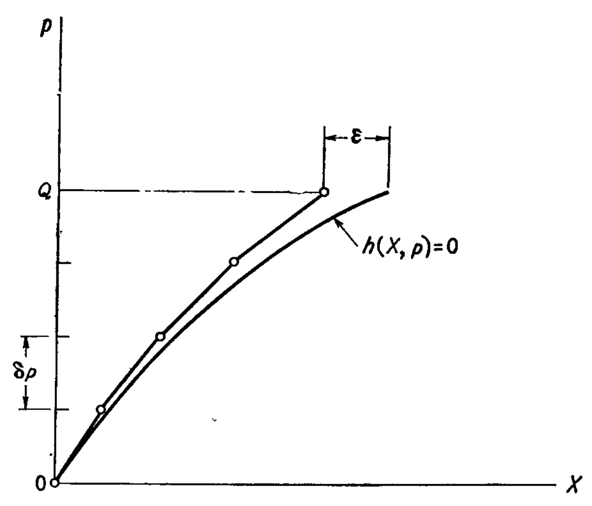


Рис. 17.5. Процесс последовательных нагружений.

невырождена для всех рассматриваемых значений p. Разделим отрезок $[0, Q]$ на M частей:

$$0 = p_0 < p_1 < p_2 < \ldots < p_M = Q,$$

так что

$$\delta p_r = p_r - p_{r-1} \quad \text{и} \quad Q = \sum_{r=1}^{M} \delta p_r. \qquad (17.74\text{а, б})$$

Тогда кривая $\mathbf{X} = \mathbf{X}(p)$ получается с помощью формул

$$\mathbf{X}^{r+1} = \mathbf{X}^r - \mathbf{H}_x^{-1}(\mathbf{X}^r, p_r)\, \mathbf{h}_p(\mathbf{X}^r, p_r)\, \delta p_{r+1}, \qquad (17.75)$$

где $r = 0, 1, \ldots, M - 1$.

Этот процесс для одномерного случая $[h(X, p) = 0]$ изображен на рис. 17.5. Если только $h(X, p)$ не является идеально линейной функцией, после конечного числа M приращений нагрузки всегда возникает в результате некоторая ошибка ε. Если в какой-нибудь точке $(\mathbf{X}^r, p_r)$ матрица $\mathbf{H}(\mathbf{X}^r, p_r)$ вырождена, процесс, конечно, не проходит. В этом случае необходимо модифицировать уравнения, изменяя, например, масштаб параметра или определяя новую начальную точку вслед за точкой $(\mathbf{X}^r, p_r)$ с помощью, скажем, метода Ньютона — Рафсона. Если в самом начале $\det \mathbf{H}_x(\mathbf{X}_0, 0) = 0$, надо выбирать новое нулевое приближение $\mathbf{X}_0'$. Значение $\mathbf{X}_0'$ может соответствовать нулевому значению некоторого нового параметра $p' = p'(\mathbf{X}, p)$.

Интересно отметить, что все рассмотренные в п. 16.5 соотношения в приращениях содержатся в (17.72). Мгновенные жесткости

$\tilde{k}^{ik}_{NM}$ (16.176), матрица начальных напряжений G^{ik}_{NM} (16.177) и матрица начальных поворотов D^{ik}_{NM} (16.178) могут быть отождествлены с матрицей $\mathbf{H}_x$ (17.72а). Матрица начальных нагрузок R^{ik}_{NM} (16.179) соответствует определяемой формулой (17.72б) матрице $\mathbf{h}_p$, а при помощи (16.180) можно получить приращение нагрузки δp.

Модификации. Возможны некоторые модификации и усовершенствования процедуры, описываемой соотношением (17.75). Если приращение δp_r достаточно мало, есть основания полагать, что векторы $\mathbf{X}^r$, $r = 0, 1, \ldots$, определенные соотношением (17.75), дадут неплохую аппроксимацию решения (17.68). Однако для нелинейных систем на каждом шаге процесса неизбежно появляются погрешности (см. рис. 17.5), которые будут накапливаться при движении вдоль кривой $\mathbf{X} = \mathbf{X}(p)$. Один из путей повышения точности метода последовательных нагружений — использование каждой точки $\mathbf{X}^r$, определяемой соотношением (17.75), в качестве начальной точки для метода Ньютона — Рафсона. Поскольку $\mathbf{X}^r$, вообще говоря, близко к $\mathbf{X}(p_r)$, для уменьшения погрешности ε_r до желательных пределов обычно требуется лишь небольшое число итераций. Таким образом, для каждого r осуществляется процесс

$$\mathbf{X}^{r,\,m+1} = \mathbf{X}^{r,\,m} - \mathbf{H}_x^{-1}(\mathbf{X}^{r,\,m},\ p_r)\,\mathbf{h}(\mathbf{X}^{r,\,m},\ p_r), \qquad (17.76)$$

где $\mathbf{X}^{1,0} = \mathbf{X}_0$, $\mathbf{X}^{r+1,\,0} = \mathbf{X}^{r,\,m_r}$, $m = 0, 1, 2, \ldots, m_r - 1$, при $r < M$; при $r = M$ берутся $m = 0, 1, 2, \ldots$. Таким образом, после каждого приращения нагрузки δp_r выполняется m_r итераций Ньютона — Рафсона, а после последнего приращения нагрузки ($r = M$) осуществляется такое число итераций, какое нужно для получения сколь угодно близкого к $\mathbf{X}^* = \mathbf{X}(Q)$ значения $\mathbf{X}$. Действительно, можно показать [1]), что если матрица $\mathbf{H}_x(\mathbf{X}, p)$ существует, невырождена и непрерывна по p и если существует непрерывный при всех p вектор $\mathbf{X}(p)$, то существуют такое разбиение отрезка $[0, Q]$ и такие целые числа $m_1, m_2, \ldots, m_{M-1}$, что $\lim\limits_{m\to\infty} \{\mathbf{X}^{M,\,m}\} = \mathbf{X}(Q) = \mathbf{X}^*$.

С некоторыми видоизменениями по существу такой же процесс может использоваться для получения многозначных решений уравнения (17.68). А именно если матрица $\mathbf{H}_x(\mathbf{X}^r, p_r)$ почти вырождена [т. е. если $\det \mathbf{H}_x(\mathbf{X}^r, p_r) \approx 0$] при некотором p_r, то, сохраняя p_r постоянным, введем новую точку $\hat{\mathbf{X}}_0 = \mathbf{X}^r + \mathbf{A}$, где $\mathbf{A}$ —

---

[1]) Доказательство можно найти в книге Ортеги и Рейнболдта [1970]. Для случая равномерных приращений $\delta p_r = Q/M$ Мейер [1968] получил оценки размера шага, требуемого для того, чтобы решение $\mathbf{X}^*$ было достижимо методом Ньютона — Рафсона из последней итерации $\mathbf{X}^M$.

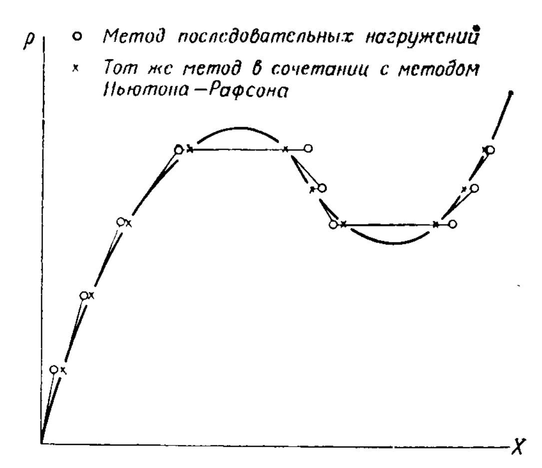


Рис. 17.6. Нахождение многозначных решений с помощью комбинирования метода последовательных нагружений и метода Ньютона — Рафсона.

некоторый постоянный вектор. Точка $\hat{X}_0$ служит начальной точкой для итераций Ньютона — Рафсона. В случае сходимости процесса он определяет новую начальную точку (X^*, p_r), из которой можно возобновить процесс последовательных нагружений с меньшими, чем прежде, приращениями нагрузки или даже с $\delta p_{r+1} < 0$. Ясно, что можно установить ряд признаков для определения знака и величины приращения δp_{r+1} и вектора $\mathbf{A}$. На рис. 17.6 представлен пример применения описываемого метода к нахождению многозначных решений в одномерной задаче.

Отметим, что каждая точка $\mathbf{X}^r$, определяемая по формуле (17.75), может быть подправлена на каждом шаге с помощью любого другого метода, а не только метода Ньютона — Рафсона. Если, например, мы можем построить такую функцию $\mathbf{P}(\mathbf{X}, p)$, что

$$\mathbf{h}(\mathbf{X}, p) = \mathbf{X} - \mathbf{P}(\mathbf{X}, p) = 0, \tag{17.77}$$

то каждую точку $\mathbf{X}^r$ в (17.75) можно подправить с помощью метода последовательных приближений: при любом p точка $\mathbf{X}(p)$ является неподвижной точкой оператора $\mathbf{P}(\mathbf{X}, p)$ и

$$\mathbf{X}^{r,\,m+1} = \mathbf{P}(\mathbf{X}^{r,\,m}, p), \tag{17.78}$$

где $\mathbf{X}^{1,0} = \mathbf{X}_0$, $\mathbf{X}^{r+1,0} = \mathbf{X}^{r,\,m_r}$, $m = 0, 1, 2, \ldots, m-1$ при $r < M$ и $m = 0, 1, 2, \ldots$ при $r = M$. Возможны и другие выборы подправляющего итерационного процесса.

Численное интегрирование. Предположим, что параметр нагрузки p сам является известной непрерывной функцией

вещественной переменной $s \in [0, \infty)$. Тогда, если, вернувшись к соотношению (17.73), разделить обе его части на δs и совершить предельный переход при $\delta s \to 0$, мы получим систему нелинейных дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{K}(\mathbf{X}, s)\,\dot{p}, \tag{17.79}$$

где

$$\dot{\mathbf{X}} = \frac{d\mathbf{X}}{ds}, \qquad \dot{p} = \frac{dp}{ds} \tag{17.80а, б}$$

и

$$\mathbf{K}(\mathbf{X}, s) = -\mathbf{H}_x^{-1}(\mathbf{X}, p(s))\,\mathbf{h}_p(\mathbf{X}, p(s)). \tag{17.80в}$$

Поэтому можно считать, что процесс последовательных нагружений соответствует численному интегрированию системы уравнений (17.79).

Действительно, одним из простейших методов численного интегрирования является метод Эйлера, в соответствии с которым интервал $[0, S]$ разбивается на подынтервалы точками $0 = s_0 < s_1 < s_2 < \ldots < s_M = S$ и $\dot{\mathbf{X}}$ аппроксимируется разностным отношением

$$\dot{\mathbf{X}}(s_r) \approx \frac{\mathbf{X}^{r+1} - \mathbf{X}^r}{\delta s_{r+1}}.$$

Это приводит к формуле интегрирования

$$\mathbf{X}^{r+1} = \mathbf{X}^r + \mathbf{K}(\mathbf{X}^r, s_r)\,\delta s_{r+1}\dot{p}(s_r). \tag{17.81}$$

Ясно, что если $p \equiv s$ и $\dot{p} = 1$, то (17.81) совпадает с (17.75), т. е. метод последовательных нагружений (17.75) является просто результатом применения метода Эйлера к дифференциальному уравнению (17.79).

Это замечание наводит на мысль, что использование вместо (17.75) и (17.81) более сложных методов численного интегрирования может обеспечить бо́льшую точность решения нелинейной системы (17.68). Это, вообще говоря, верно, поскольку погрешность метода Эйлера имеет порядок $h = \delta s$, в то время как можно указать много других методов интегрирования, имеющих погрешность порядка h^m, $m > 1$. Для примера укажем на методы Рунге — Кутты [1]) четвертого порядка, в которых $\mathbf{K}(\mathbf{X}^r, s_r)\,h$ в формуле

[1]) Подробное изложение различных методов Рунге — Кутты, включая исторический обзор, содержится в книге Коллатца [1966]. Вопросы использования метода Рунге — Кутты в методах последовательных нагружений (методах продолжения) обсуждаются в работах Киснера [1964] и Давиденко [1965]. См. также Хайслер, Стриклин и Стеббинз [1971] и Оден [1971в].

(17.81) (при $\dot{p} = 1$, $\delta s_{r+1} = h$) заменяется на

$$\Delta \mathbf{X}^r = \sum_{i=0}^{3} \mu_i \mathbf{Z}_i, \qquad (17.82а)$$

где

$$\mathbf{Z}_0 = \mathbf{K}(\mathbf{X}^r,\ s_r) \quad \text{и} \quad \mathbf{Z}_i = \mathbf{K}\left(\mathbf{X}^r + \sum_{j=0}^{i-1} \beta_{ij}\mathbf{Z}_j;\ s_r + \alpha_i h\right). \qquad (17.82б)$$

Метод Рунге — Кутты с *коэффициентами Рунге* получается, если взять $\mu_0 = \mu_3 = \mu_1/2 = \mu_2/2 = 1/6$, $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3/2 = 1/2$ и $\beta_{10} = \beta_{21} = \beta_{32}/2 = 1/2$, $\beta_{20} = \beta_{30} = 0$; *коэффициенты Кутты* имеют вид $\mu_0 = \mu_1/3 = \mu_2/3 = \mu_3 = 1/8$, $\alpha_1 = \alpha_2/2 = \alpha_3/3 = 1/3$ и $\beta_{10} = -\beta_{20} = 1/3$, $\beta_{30} = \beta_{21} = -\beta_{31} = \beta_{32} = 1$, а *коэффициенты Гилла* таковы: $\mu_0 = \mu_3 = 1/6$, $\mu_1 = (1 - 1/\sqrt{2})/3$, $\mu_2 = (1 + 1/\sqrt{2})/3$, $\alpha_3 = 2\alpha_2 = 2\alpha_1 = 2\beta_{10} = 1$, $\beta_{31} = -1/\sqrt{2}$, $\beta_{20} = -\beta_{10} - \beta_{31}$, $\beta_{21} = 1 + \beta_{31}$, $\beta_{32} = 1 - \beta_{31}$ и $\beta_{30} = 0$.

С другой стороны, методы Эйлера или Рунге — Кутты можно использовать для определения начальных точек $\mathbf{X}_0, \mathbf{X}^1, \ldots, \mathbf{X}^m$ так называемого метода поправок и предсказаний. Воспользуемся тем, что на (17.79), а следовательно и на метод последовательных нагружений, можно смотреть как на задачу решения системы нелинейных интегральных уравнений

$$\mathbf{X}(s) = \mathbf{X}_0 + \int_0^s \mathbf{K}(\mathbf{X}(\zeta),\ \zeta)\, d\zeta. \qquad (17.83а)$$

Здесь мы для простоты приняли $\dot{p} = 1$. Если $\mathbf{X}^r = \mathbf{X}(s_r)$, то можно записать

$$\mathbf{X}^{r+1} = \mathbf{X}^{r-m} + \int_{s_{r-m}}^{s_{r+1}} \mathbf{K}(\mathbf{X}(\zeta),\ \zeta)\, d\zeta; \qquad (17.83б)$$

тем самым предполагается, что известен процесс изменения $\mathbf{X}$ от $\mathbf{X}_0$ до $\mathbf{X}^{r-m}$ (т. е. значения $\mathbf{X}_0, \mathbf{X}^1, \ldots, \mathbf{X}^{r-m}$). Интеграл в (17.83б) можно приближенно представить квадратурной формулой типа [1])

$$\int_{s_{r-m}}^{s_{r+1}} \mathbf{K}(\mathbf{X}(\zeta),\ \zeta)\, d\zeta \approx h \sum_{j=0}^{q} \beta_j \mathbf{K}(\mathbf{X}^{r-j+\alpha},\ s_{r-j+\alpha}). \qquad (17.84)$$

Здесь используется $q + 1$ промежуточных точек между s_{r-m} и s_{r+1}; β_j суть весовые коэффициенты, а $\alpha = 1$ или 0. Если $\alpha = 0$,

[1]) Квадратурные формулы такого типа используются в § 20 для решения систем нелинейных интегро-дифференциальных уравнений.

то говорят, что формула (17.84) *открыта справа*, если же $\alpha = 1$, то говорят, что она *закрыта справа*. Пусть $r \geqslant \max\{m, n, q, t\}$, тогда *метод поправок и предсказаний* для численного интегрирования задается правилами

$$\mathbf{X}^{r+1} = \mathbf{X}^{r-m} + h \sum_{j=1}^{q} \beta_j \mathbf{K}(\mathbf{X}^{r-j+1}, s_{r-j+1}) + h\beta_0 \mathbf{K}(\mathbf{X}_*^{r+1}, s_{r+1}), \qquad (17.85а)$$

$$\mathbf{X}_*^{r+1} = \mathbf{X}^{r-n} + h \sum_{j=0}^{t} \mu_j \mathbf{K}(\mathbf{X}^{r-}, s_{r-j}). \qquad (17.85б)$$

Таким образом, $(t+1)$-точечная открытая справа квадратурная формула используется для определения *предсказания* (17.85б), а $(q+1)$-точечная закрытая справа квадратурная формула — для определения *поправленного значения* (17.85а). Если, например, $t = n = 3$, $q = m = 0$, $24\mu = (55, -59, 37, -9)$ и $24\beta = (9, 19, -5, 1)$, то формулы (17.85) дают метод Адамса — Моултона [1]).

Использование приемов численного интегрирования в методе последовательных нагружений совместно с корректировкой результатов после каждого этапа с помощью метода Ньютона — Рафсона, по-видимому, представляет собой один из наиболее эффективных способов решения больших систем нелинейных уравнений.

17.6. МЕТОДЫ ПОИСКА

Вернемся к вопросу о решении нелинейных уравнений путем минимизации функционала $F(\mathbf{X})$ типа (17.5). Рассмотрим ряд примеров методов итерационного и неитерационного поисков, которые могут успешно применяться, когда неудобно (или невозможно) вычислять градиенты функционала $F(\mathbf{X})$.

Симплексный метод поиска. *В симплексном методе поиска*, как показывает само название, используются симплексы [2]). *Симплекс* в k-мерном пространстве образуется множеством $k+1$ точек (называемых его *вершинами*) $p_0, p_1, \ldots, p_k$, не лежащих в одной $(k-1)$-мерной гиперплоскости. Симплекс $\mathscr{S}$ состоит из всех точек y, удовлетворяющих условию

$$y = \sum_{i=0}^{k} c_i p_i, \qquad (17.86а)$$

---

[1]) См. Айзаксон и Келлер [1966, стр. 388].

[2]) Напомним, что в одномерном пространстве симплекс — это отрезок, соединяющий две точки $[p_0, p_1]$. В случае $k = 2$ симплекс состоит из точек, расположенных внутри и на границе треугольника. Для $k = 3$ симплекс состоит из точек, расположенных внутри и на границе тетраэдра, и т. д. См. Нелдер и Мид [1964].

где

$$c_i \geqslant 0, \qquad \sum_{i=0}^{k} c_i = 1. \tag{17.86б, в}$$

Когда рассматривается задача нахождения n-мерного вектора $\mathbf{X}^*$, минимизирующего функцию $F(\mathbf{X})$, вектор $\mathbf{X}$ можно считать точкой в n-мерном пространстве. В симплексном методе $n+1$ пробных точек $\mathbf{X}^0, \mathbf{X}^1, \ldots, \mathbf{X}^n$ берутся в качестве вершин симплекса в n-мерном пространстве. Затем подсчитываются величины

$$y^0 = F(\mathbf{X}^0),\ y^1 = F(\mathbf{X}^1),\ \ldots,\ y^n = F(\mathbf{X}^n). \tag{17.87}$$

Пусть $y^h = F(\mathbf{X}^h)$ и $y^l = F(\mathbf{X}^l)$ являются соответственно максимальной и минимальной из этих величин. После исключения точки $\mathbf{X}^h$, соответствующей наибольшему значению y (т. е. y^h) мы находим «центр тяжести» $\overline{\mathbf{X}}$ оставшихся точек по формуле

$$\overline{\mathbf{X}} = \frac{1}{n} \sum_{\substack{i=0\\ i\neq h}}^{n} \mathbf{X}^i. \tag{17.88}$$

Затем строится прямая в n-мерном пространстве, соединяющая точки $\mathbf{X}^h$ и $\overline{\mathbf{X}}$. Произвольная точка $\hat{\mathbf{X}}$ на этой прямой может быть задана формулой

$$\hat{\mathbf{X}} = (1+\alpha)\overline{\mathbf{X}} - \alpha \mathbf{X}^h; \tag{17.89}$$

число α называется *коэффициентом отражения*. Обычно α задается заранее и положительно, так что точки $\hat{\mathbf{X}}$ и $\overline{\mathbf{X}}$ находятся по разные стороны от $\mathbf{X}^h$ (т. е. $\hat{\mathbf{X}}$ ближе к минимуму). Далее вычисляется величина

$$\hat{y} = F(\hat{\mathbf{X}}). \tag{17.90}$$

Здесь возможны различные случаи. Например:

1. $\hat{y} < y^l$ — это значит, что мы нашли новый минимум и можно двигаться дальше в том же направлении, в котором мы пришли к точке $\hat{\mathbf{X}}$. Находим новую точку

$$\hat{\hat{\mathbf{X}}} = (1+\gamma)\hat{\mathbf{X}} - \gamma\overline{\overline{\mathbf{X}}}, \tag{17.91}$$

где $\gamma > \alpha > 0$. Если $\hat{\hat{y}} = F(\hat{\hat{\mathbf{X}}}) < y^l$, то можно построить новый (улучшенный) симплекс, положив $\hat{\hat{y}} = y^{l'}$, т. е. вводя новую «вершину минимума», а все остальные вершины оставив неизменными, и продолжить процесс.

2. $\hat{\hat{y}} > y^l$ (или $\hat{y} > y^l$) — процесс идет неправильно. В этом случае надо заменить точку максимума точкой $\hat{\hat{\mathbf{X}}}$ (или $\hat{\mathbf{X}}$) и повторить процесс.

3. $\hat{y} > y^i$, $i \neq h$ — в этом случае (17.91) дает не лучшее направление и X^h надо переопределить, взяв в качестве точки максимума ту из точек X^h или $\hat{X}$, которая соответствует меньшей величине y. Затем находим новую точку

$$\hat{\hat{X}} = \beta X^h + (1-\beta)\bar{X}, \qquad (17.92)$$

где $0 < \beta < 1$ — *коэффициент сжатия*. Если $\hat{\hat{y}} = F(\hat{\hat{X}}) \leqslant y^h$, то y^h заменяется на $\hat{\hat{y}}$ и процесс повторяется. Если $\hat{\hat{y}} > y^h$, сжатие ничего не дает; в этом случае все надо начать сначала с новыми начальными значениями $\tilde{X}^i$, в качестве которых можно взять, например,

$$\tilde{X}^i = \frac{1}{2}(X^i + X^l). \qquad (17.93)$$

Итерации продолжаются, пока не будет достигнут минимум.

Хотя симплексный метод предполагает осуществление множества проб и итераций, доказано, что он достаточно эффективен при решении некоторых нелинейных систем в тех случаях, когда не проходят другие методы. Особенно эффективен этот метод при решении больших систем линейных неравенств. Поэтому он гораздо чаще применяется в нелинейном программировании, чем при решении систем нелинейных уравнений.

Возможны многие модификации и улучшения симплексного метода поиска. Скажем, можно предпринять меры для того, чтобы симплексный метод не приводил к не представляющей интереса точке минимума, если известен единичный куб n-мерного пространства, в котором находится нужный минимум. Функция переопределяется таким образом, чтобы ее значения вне куба были сколь угодно большими, тогда любая попытка выйти за пределы куба завершится возвращением внутрь куба и процесс сойдется к искомому минимуму.

На рис. 17.7 показаны возможные пути симплексного поиска в двумерном пространстве. Поиск начинается (см. (а)) с выбора трех начальных точек X^0, X^1, X^2, определяющих симплекс. Предположим, что $X^2 = X^h$ соответствует наибольшему значению y [$y^2 = f(X^2) > y^0$, $y^2 > y^1$]. Вычисляем по X^0 и X^1 их среднее значение $\bar{X}$ и проводим прямую (17.89) до новой точки $\hat{X}$. На рис. (а) представлен случай, когда $\hat{y} < y^l$, так что вычисляется новое значение $\hat{\hat{X}}$. Поиск в этом случае успешен. На рис. (b) тоже $\hat{y} < y^l$, но дальнейшее продвижение в $\hat{\hat{X}}$ не дает желаемого результата, поскольку $\hat{\hat{y}} > y^l$. Следовательно, в этом случае $\hat{X}$ берется в качестве новой точки, соответствующей минимальному значению.

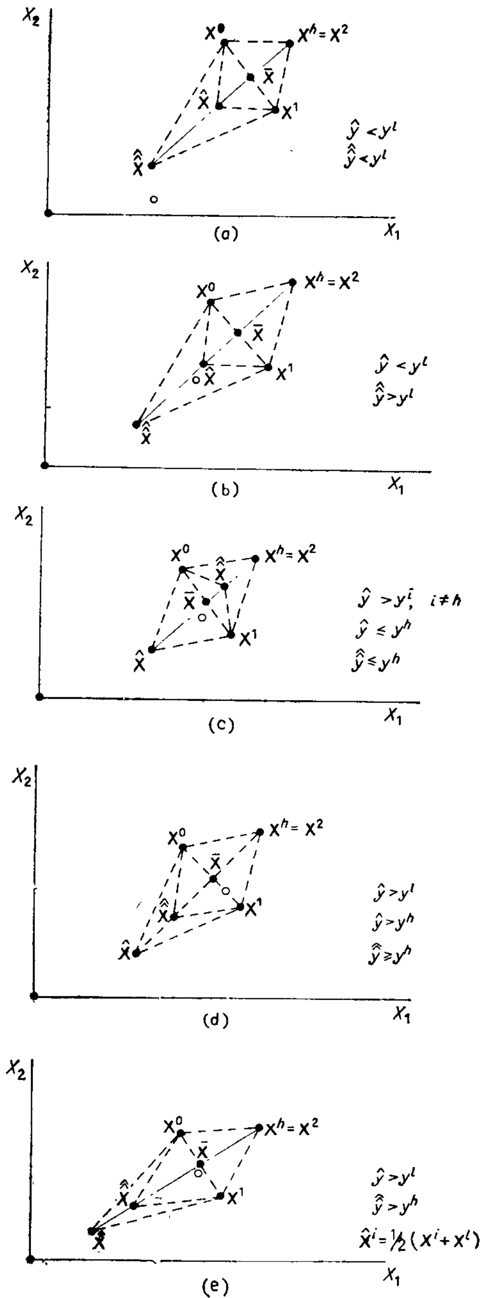


Рис. 17.7. Симплексный метод поиска.

На рис. (c) показан случай, когда возникает необходимость в сжатии, поскольку $\hat{y} > y^l$. Новое значение $\mathbf{X}^h$ принимается равным $\hat{\mathbf{X}}$, так как $\hat{y} < y^h$, далее $\mathbf{X}^h$ опять заменяется на $\hat{\hat{\mathbf{X}}}$, поскольку оказывается, что $\hat{\hat{y}} \leqslant y^h$. Случай, изображенный на рис. (d), сходен с показанным на рис. (c), за исключением того, что $\mathbf{X}^h$ сохраняет свою первоначальную роль, ибо $\hat{y} > y^h$. Наконец, на рис. (e) сжатие не дает нужного результата, и необходимо брать новые начальные точки. Начальные значения $\mathbf{X}^0$, $\mathbf{X}^1$, $\mathbf{X}^2 = \mathbf{X}^i$ заменяются на $\overline{\mathbf{X}}^i = \frac{1}{2}(\mathbf{X}^i + \mathbf{X}^l)$, где $\mathbf{X}^l$ — точка, соответствующая наименьшему начальному значению $y^l = F(\mathbf{X}^l)$.

Методы случайного поиска. В методах случайного поиска начальные пробные точки не определяются точно. Они выбираются случайно в соответствии с некоторой n-мерной функцией плотности вероятности. Функция плотности обычно берется «плоской», что означает равную вероятность выбора в качестве начальных любых точек заданной области.

В методе чисто случайного поиска просто в области, где минимум заведомо существует, случайно выбирают пробные точки в соответствии с некоторым фиксированным распределением вероятностей. После проверки определенного числа точек считается, что минимум достигается в точке, соответствующей наименьшему из полученных значений функции. Требуемое число пробных точек можно определить, исходя из распределения вероятности.

Если предположить, что минимум равновероятно может находиться в любой точке n-мерного (гипер)куба со стороной d и что изменения независимых переменных ограничены величиной δ_N, то отношение объема соответствующего кубика к объему всего куба равно

$$a = \left(\frac{\delta_N}{d}\right)^n. \qquad (17.94)$$

Вероятность того, что пробная точка не лежит в кубике, равна $1 - a$. Из элементарных вероятностных соображений следует, что вероятность неуспеха p проб составляет $(1 - a)^p$. Вероятность же того, что по крайней мере одна точка попадет в кубик, равняется

$$S = 1 - (1 - a)^p. \qquad (17.95)$$

Отсюда

$$p = \frac{\ln(1 - S)}{\ln(1 - a)}. \qquad (17.96)$$

Здесь S — доверительный уровень, а p — требуемое число точек. В таблице 17.1 приведены некоторые типичные числовые значения.

Таблица 17.1

Зависимость числа проб p от a и S[1])

a \ S	0.8	0.9	0.05	0.99
0.1	16	22	29	44
0.05	32	45	59	90
0.025	64	91	119	182
0.01	161	230	299	459
0.005	322	460	598	919

Видно, что требуемое число точек быстро возрастает при уменьшении a.

Ставится условие[1]), чтобы число пробных точек не зависело от числа независимых переменных. Это означает, что величина a должна быть постоянной. Следовательно, с увеличением n величина δ_N/d также увеличивается. Таким образом, точность «на одну переменную» уменьшается, так как размеры кубика растут. Подставляя (17.94) в (17.96), получаем

$$p=\frac{\ln(1-S)}{\ln\left[1-(\delta_N/d)^n\right]}. \qquad (17.97)$$

Если предположить, что величина $(\delta_N/d)^n$ мала, то знаменатель можно приближенно заменить первым членом разложения

$$\ln\left[1-\left(\frac{\delta_N}{d}\right)^n\right]=-\left(\frac{\delta_N}{d}\right)^n+\frac{1}{2}\left(\frac{\delta_N}{d}\right)^{2n}-\frac{1}{3}\left(\frac{\delta_N}{d}\right)^{3n}+\ldots .$$

При этом получим

$$p\approx-\left(\frac{d}{\delta_N}\right)^n\ln(1-S). \qquad (17.98)$$

Число требуемых точек растет почти экспоненциально с увеличением размерности. Для доверительного уровня S, равного 0.9, имеем

$$p\approx 2{,}3\left(\frac{d}{\delta_N}\right)^n. \qquad (17.99)$$

Спэнг [1962] сравнил это число с числом точек, требуемым при поиске с помощью простой кубической решетки с шагом δ_N, когда за минимум принимается наименьшее из значений в узлах решетки. Это последнее число равно

$$p=\left(\frac{d}{\delta_N}\right)^n, \qquad (17.100)$$

1) Брукс [1958].

т. е. приблизительно в два раза меньше, чем при чисто случайном поиске. Все равно такой поиск практически редко применяется при больших n, поскольку p по-прежнему возрастает по экспоненциальному закону [1]:

18. НЕКОТОРЫЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

В этом параграфе представлены приложения описанной теории к некоторым задачам теории упругости при конечных деформациях. Все приводимые ниже примеры относятся к изотропным телам.

18.1. ПЛОСКОЕ НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ

В теории плоского напряженного состояния рассматриваются тонкие тела, у которых компоненты напряжений в одном из направлений заданы и напряженное состояние в произвольной частице является по существу двумерным.

Упругие мембраны. Рассмотрим тонкий лист из однородного упругого материала, ограниченного поверхностями $x^3 = \pm d_0/2$, начальная толщина d_0 которого в общем случае является функцией от x^1 и x^2. В первоначально плоском недеформированном листе положение произвольной частицы P определяется радиус-вектором

$$\mathbf{r} = \hat{\mathbf{r}}(x^1,\ x^2) + x^3\hat{\mathbf{n}}, \tag{18.1}$$

где $\hat{\mathbf{r}}\,(x^1, x^2)$ — радиус-вектор частицы Q в плоскости x^1, x^2 и $\hat{\mathbf{n}}$ — единичный вектор нормали к недеформированной срединной поверхности.

Предположим, что лист совершает движение, переводящее его из начальной конфигурации C_0 в другую конфигурацию C. Положение частицы P относительно фиксированной системы отсчета в C_0 определяется радиус-вектором

$$\mathbf{R} = \hat{\mathbf{R}}\,(x^1,\ x^2) + \mathbf{M}\,(x^1,\ x^2,\ x^3), \tag{18.2}$$

где $\hat{\mathbf{R}}\,(x^1,\ x^2)$ — радиус-вектор частицы Q на деформированной срединной поверхности и $\mathbf{M}\,(x^1,\ x^2,\ x^3)$ — вектор, соединяющий частицы P и Q в деформированном теле. Вектор перемещения $\mathbf{w}$

[1] Для уменьшения необходимого числа точек Спэнг [1962] разработал квазиитерационный метод поиска. В этом методе предполагается, что минимум находится в окрестности группы точек, соответствующих наименьшим значениям. После проведения некоторого количества проб вокруг этой группы строится меньший гиперкуб. Далее процесс повторяется. Хотя число пробных точек, случайно выбираемых на каждом шагу, здесь не так велико, как при чисто случайном поиске, доверительный уровень при этом уже не удается оценить, так как вероятности зависят от исследуемой функции.

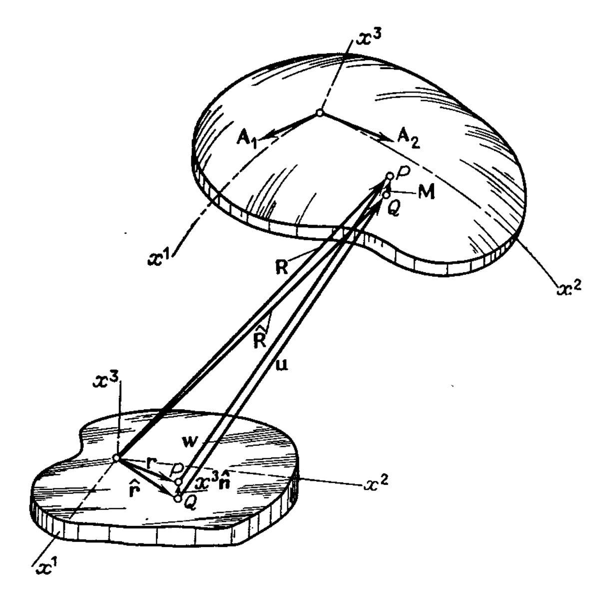


Рис. 18.1. Геометрия деформации тонкого листа.

произвольной частицы P равен

$$\mathbf{w} = \mathbf{R} - \mathbf{r} = \mathbf{u} + \mathbf{M} - x^3\mathbf{n}, \tag{18.3}$$

где $\mathbf{u}$ теперь обозначает перемещения частиц на срединной поверхности:

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}(x^1, x^2) = \hat{\mathbf{R}}(x^1, x^2) - \hat{\mathbf{r}}(x^1, x^2). \tag{18.4}$$

Геометрия этого движения показана на рис. 18.1.

Теперь вычислим базисные векторы $\mathbf{G}_i$, касательные к деформированным координатным линиям x^i:

$$\mathbf{G}_\alpha = \mathbf{A}_\alpha + \mathbf{M}_{,\alpha}, \qquad \mathbf{G}_3 = \mathbf{M}_{,3}, \qquad \alpha = 1, 2. \tag{18.5}$$

Здесь $\mathbf{A}_\alpha$ — векторы, касательные к координатным линиям x^1, x^2 на деформированной срединной поверхности. В последующих формулах используются как греческие, так и латинские индексы, причем греческие принимают значения 1 и 2, а латинские от 1 до 3.

Для получения соотношений, характеризующих теорию плоского напряженного состояния, предположим, что материальные линии, нормальные к недеформированной срединной поверхности листа, остаются прямыми и нормальными к деформированной срединной поверхности. Однако эти материальные линии могут испытывать при движении конечные деформации удлинения. Таким образом, если λ — относительное удлинение (т. е. отноше-

ние деформированной длины к недеформированной) в направлении x^3 при $x^3 = 0$, то вектор **M** в формуле (18.2) записывается в виде

$$\mathbf{M}(x^1, x^2, x^3) = \lambda x^3 \mathbf{n}, \qquad (18.6)$$

где **n** — единичный вектор нормали к деформированной срединной поверхности. И λ и **n** являются функциями от x^1 и x^2. При таком определении **M** соотношения (18.5) принимают вид

$$\mathbf{G}_\alpha = \mathbf{A}_\alpha + x^3 (\lambda \mathbf{n})_{,\alpha}, \qquad \mathbf{G}_3 = \lambda \mathbf{n}. \qquad (18.7)$$

Замечая, что $\mathbf{n}\cdot\mathbf{A}_\alpha = 0$, получаем для компонент тензора меры деформации G_{ij} такие выражения:

$$\begin{aligned} G_{\alpha\beta} &= \mathbf{G}_\alpha \cdot \mathbf{G}_\beta = A_{\alpha\beta} - 2\lambda x^3 B_{\alpha\beta} + \lambda^2 (x^3)^2 B^\lambda_\alpha B_{\beta\lambda} + (x^3)^2 \lambda_{,\alpha} \lambda_{,\beta}, \\ G_{\alpha 3} &= \mathbf{G}_\alpha \cdot G_3 = \lambda x^3 \lambda_{,\alpha}, \qquad (18.8) \\ G_{33} &= \mathbf{G}_3 \cdot \mathbf{G}_3 = \lambda^2, \qquad \alpha, \beta, \lambda = 1, 2. \end{aligned}$$

Здесь $A_{\alpha\beta}$ и $B_{\alpha\beta}$ — ковариантные компоненты соответственно первого и второго фундаментальных тензоров деформированной срединной поверхности, а B^λ_α — смешанные компоненты второго фундаментального тензора:

$$A_{\alpha\beta} = \mathbf{A}_\alpha \cdot \mathbf{A}_\beta, \qquad B_{\alpha\beta} = -\mathbf{A}_\alpha \cdot \mathbf{n}_{,\beta}, \qquad B^\lambda_\alpha = A^{\lambda\beta} B_{\beta\alpha}. \qquad (18.9)$$

В последнем из этих соотношений $A^{\lambda\beta}$ — контравариантные компоненты первого фундаментального тензора деформированной срединной поверхности (так что $A^{\alpha\lambda} A_{\lambda\beta} = \delta^\alpha_\beta$ или $A^{\alpha\beta} = \mathbf{A}^\alpha \cdot \mathbf{A}^\beta$, где $\mathbf{A}^\alpha \cdot \mathbf{A}_\beta = \delta^\alpha_\beta$).

В принципе, подстановка соотношений (18.8) в (4.16) приводит к выражениям для компонент тензора деформации, соответствующим теории Кирхгофа конечных деформаций пластин. Сейчас, однако, нас интересует упрощенный вариант соотношений (18.8), который отвечает теории очень тонких мембран. Поэтому ограничимся рассмотрением деформаций симметричных относительно срединной поверхности достаточно тонких тел, так что G_{ij} по существу постоянны по всей толщине. В этом случае $\lambda = d/d_0$ и вместо (18.8) имеем

$$G_{\alpha\beta} = A_{\alpha\beta}, \qquad G_{\alpha 3} = 0, \qquad G_{33} = \lambda^2. \qquad (18.10)$$

Компоненты деформации в этом случае равны

$$\gamma_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(A_{\alpha\beta} - \delta_{\alpha\beta}), \qquad \gamma_{\alpha 3} = 0, \qquad \gamma_{33} = \frac{1}{2}(\lambda^2 - 1). \qquad (18.11)$$

Главные инварианты тензора деформации принимают вид

$$\begin{aligned} I_1 &= \lambda^2 + \delta^{\alpha\beta} A_{\alpha\beta}, \\ I_2 &= \delta_{\alpha\beta} \lambda^2 \varepsilon^{\alpha\lambda} \varepsilon^{\beta\mu} A_{\mu\lambda} + A, \qquad (18.12) \\ I_3 &= \lambda^2 A, \end{aligned}$$

где $\varepsilon^{\alpha\lambda}$, $\varepsilon^{\beta\mu}$ — двумерные перестановочные символы ($\varepsilon^{12} = -\varepsilon^{21} = 1$, $\varepsilon^{11} = \varepsilon^{22} = 0$) и

$$A = \det(A_{\alpha\beta}) = \frac{1}{2}\varepsilon^{\alpha\beta}\varepsilon^{\lambda\mu}A_{\alpha\lambda}A_{\beta\mu}. \qquad (18.13)$$

Отметим также, что, поскольку

$$\mathbf{A}_\alpha = \hat{\mathbf{R}}_{,\alpha}(x^1, x^2) = \mathbf{i}_\alpha + \mathbf{u}_{,\alpha}, \qquad (18.14)$$

где $\mathbf{u}$ — вектор перемещения частиц срединной поверхности, компоненты деформации равны

$$\gamma_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(u_{\alpha,\beta} + u_{\beta,\alpha} + u_{k,\alpha}u_{k,\beta}),$$
$$\gamma_{33} = \frac{1}{2}(\lambda^2 - 1), \qquad (18.15)$$
$$\gamma_{\alpha 3} = 0,$$

где α, $\beta = 1, 2$ и $k = 1, 2, 3$.

Предположим, что лист изготовлен из однородного изотропного гиперупругого материала с энергией деформации на единицу недеформированного объема W. Тогда локально

$$\dot{W}(I_1, I_2, I_3) = t^{ij}\dot{\gamma}_{ij} = t^{\alpha\beta}\dot{\gamma}_{\alpha\beta} + t^{33}\dot{\gamma}_{33}, \qquad (18.16)$$

где тензор напряжений t^{ij} определяется соотношениями

$$t^{\alpha\beta} = \frac{\partial W}{\partial\gamma_{\alpha\beta}}, \qquad t^{\alpha 3} = 0, \qquad t^{33} = \frac{\partial W}{\partial\gamma_{33}}. \qquad (18.17)$$

С учетом (18.11) и (18.12) имеем

$$t^{\alpha\beta} = 2\left(\frac{\partial W}{\partial I_1} + \lambda^2\right)\frac{\partial W}{\partial I_2}\delta^{\alpha\beta} + 2\left(\frac{\partial W}{\partial I_2} + \lambda^2\frac{\partial W}{\partial I_3}\right)AA^{\alpha\beta}, \qquad (18.18а)$$

$$t^{\alpha 3} = 0, \qquad (18.18б)$$

$$t^{33} = 2\frac{\partial W}{\partial I_1} + 2\frac{\partial W}{\partial I_2}\delta_{\alpha\beta}AA^{\alpha\beta} + 2\frac{\partial W}{\partial I_3}A, \qquad (18.18в)$$

где

$$AA^{\alpha\beta} = \varepsilon^{\alpha\lambda}\varepsilon^{\beta\mu}A_{\lambda\mu}. \qquad (18.19)$$

Нормальную компоненту напряжений t^{33} можно определить из краевых условий на деформированной срединной поверхности. Пусть, например, q_1 и q_2 обозначают давления, приходящиеся на единицу площади деформированной срединной поверхности и приложенные соответственно к поверхностям $x^3 = -d/2$ и $x^3 = +d/2$. Тогда приближенно $\lambda t^{33} = -q_1\sqrt{A}$ на поверхности $-d/2$ и $\lambda t^{33} = -q_2\sqrt{A}$ на поверхности $+d/2$. Для тонких мембран можно также использовать аппроксимацию $\lambda t^{33} = -q\sqrt{A}$, где

$q = (q_1 + q_2)/2$ — среднее давление. Однако поскольку в очень тонких мембранах величины мембранных напряжений $t^{\alpha\beta}$, как правило, во много раз превышают t^{33}, обычно просто полагают $t^{33} = 0$ и сводят таким образом задачу к задаче об определении двумерного напряженного состояния. В последующих рассуждениях мы будем считать, что $t^{33} \approx 0$.

Для несжимаемых материалов $I_3 = 1$ и W является функцией лишь от I_1 и I_2. В этом случае вместо (8.12) можно записать

$$\begin{aligned} I_1 &= \lambda^2 + \delta^{\alpha\beta} A_{\alpha\beta}, \\ I_2 &= \frac{1}{\lambda^2} + \lambda^2 \delta_{\alpha\beta} \varepsilon^{\alpha\lambda} \varepsilon^{\beta\mu} A_{\mu\lambda}, \\ \lambda^2 &= \left(\frac{1}{2} \varepsilon^{\alpha\beta} \varepsilon^{\beta\mu} A_{\alpha\beta} A_{\lambda\mu}\right)^{-1}. \end{aligned} \tag{18.20}$$

Определяющие уравнения для несжимаемых мембран имеют вид

$$t^{\alpha\beta} = 2\left(\frac{\partial \hat{W}}{\partial I_1} + \lambda^2 \frac{\partial \hat{W}}{\partial I_2}\right) \delta^{\alpha\beta} + 2\left(h + \frac{1}{\lambda^2} \frac{\partial \hat{W}}{\partial I_2}\right) A^{\alpha\beta}, \tag{18.21а}$$

$$t^{33} = 2 \frac{\partial \hat{W}}{\partial I_1} + \frac{2}{\lambda^2} \frac{\partial \hat{W}}{\partial I_2} \delta_{\alpha\beta} A^{\alpha\beta} + \frac{2}{\lambda^2} h, \tag{18.21б}$$

где $W = \hat{W}(I_1, I_2)$ и h — гидростатическое давление. Величину гидростатического давления h можно определить из условия $t^{33} \approx 0$:

$$h = -\lambda^2 \frac{\partial \hat{W}}{\partial I_1} - \frac{\partial \hat{W}}{\partial I_2} \delta_{\alpha\beta} A^{\alpha\beta}. \tag{18.22}$$

Поэтому (18.21а) можно переписать так:

$$t^{\alpha\beta} = 2(\delta^{\alpha\beta} - \lambda^2 A^{\alpha\beta}) \frac{\partial \hat{W}}{\partial I_1} + 2\left[\lambda^2 \delta^{\alpha\beta} + A^{\alpha\beta}\left(\frac{1}{\lambda^2} - \delta_{\lambda\mu} A^{\lambda\mu}\right)\right] \frac{\partial \hat{W}}{\partial I_2}, \tag{18.23}$$

а $t^{\alpha 3} = t^{33} = 0$.

Мембранные элементы. Располагая кинематическими соотношениями, записанными в терминах перемещения срединной поверхности, мы можем теперь вывести уравнения равновесия для конечных элементов упругих мембран. Рассматривая типичный элемент e с N_e узлами, мы, как обычно, представляем локальное поле перемещений в виде

$$u_i = \psi_N(x^1, x^2) u_i^N, \tag{18.24}$$

где u_i — компоненты перемещений частицы x^1, x^2 на срединной поверхности и $N = 1, 2, \ldots, N_e; i = 1, 2, 3$. Тогда в соответствии

с (18.15) имеем

$$2\gamma_{\alpha\beta}=\psi_{N,\alpha}u^N_\beta+\psi_{N,\beta}u^N_\alpha+\psi_{N,\alpha}\psi_{M,\beta}u^N_k u^M_k,$$
$$2\gamma_{33}=\lambda^2-1,\quad \gamma_{\alpha 3}=0. \tag{18.25}$$

Для сжимаемых материалов λ^2 можно аппроксимировать на элементе следующим образом:

$$\lambda^2=\psi_N(x_1,\ x_2)\,\mu^N, \tag{18.26}$$

где $\mu^N\equiv(\lambda^2)^N$ — значение λ^2 в узле N. Для несжимаемых материалов можно получить выражение λ^2 через мембранные деформации $\gamma_{\alpha\beta}$, если подставить (18.11) в (18.20):

$$\lambda^2=(1+2\gamma^\alpha_\alpha+2\varepsilon^{\alpha\lambda}\varepsilon^{\beta\mu}\gamma_{\alpha\beta}\gamma_{\lambda\mu})^{-1}. \tag{18.27}$$

Поскольку $t^{33}\approx 0$, уравнения равновесия конечного элемента мембраны имеют вид

$$p_{Ni}=\int\limits_{v_{0(e)}}\frac{\partial W}{\partial u^N_i}\,dv_0=\int\limits_{v_{0(e)}}\frac{\partial W}{\partial\gamma_{\alpha\beta}}\,\frac{\partial\gamma_{\alpha\beta}}{\partial u^N_i}\,dv_0. \tag{18.28}$$

Если предположить, что начальная толщина недеформированного элемента d_0 постоянна, и обозначить площадь недеформированной срединной поверхности через A^*_0, то уравнение (18.28) примет вид

$$p_{Ni}=d_0\int\limits_{A^*_{0(e)}}t^{\alpha\beta}\psi_{N,\alpha}\,(\delta_{\beta i}+\psi_{M,\beta}u^M_i)\,dA^*_0. \tag{18.29}$$

Обобщенные узловые силы p_{Ni} определяются соотношениями (16.93), которые в нашем случае действия поперечных нагрузок более удобно записать так:

$$p_{N\alpha}=\int\limits_{A^*_{0(e)}}\hat F^*_\alpha\psi_N(x^1,\ x^2)\,dA^*_0+$$
$$+\int\limits_{A^*_{0(e)}}S^{*j}\,(\delta_{\alpha j}+\psi_{M,\alpha}u^M_j)\,\psi_N(x^1,\ x^2)\,dA^*_0, \tag{18.30а}$$

$$p_{N3}=\int\limits_{A^*_{0(e)}}\hat F^*_3\psi_N\,dA^*_0+\int\limits_{A^*_{0(e)}}S^{*3}\psi_N\,dA^*_0, \tag{18.30б}$$

где $\hat F^*_i(x^1,\ x^2)$ — компоненты объемных сил на единицу площади недеформированной срединной поверхности и S^{*j} — поверхностные усилия на единицу площади недеформированной срединной поверхности в конвективных координатах x^i [см. (16.96)]. Для приложенных касательных сил на кривой Г, являющейся границей срединной поверхности элемента, можно использовать двумерный вариант формулы (16.98). Однако в последующем мы предпочитаем применять аппроксимации обобщенных сил типа (16.113), (16.117) и (16.118).

В случае сжимаемых материалов жесткостные соотношения для элементов изотропных мембран получаются подстановкой (18.18а) и (18.26) в (18.29). Произведя эту подстановку, найдем

$$2d_0 \int\limits_{A^*_{0(e)}} \left[\left(\frac{\partial W}{\partial I_1} + \psi_R \mu^R \frac{\partial W}{\partial I_2} \right) \delta^{\alpha\beta} + \left(\frac{\partial W}{\partial I_2} + \psi_R \mu^R \frac{\partial W}{\partial I_3} \right) f^{\alpha\beta} \right] \times \\ \times \psi_{N,\alpha} (\delta_{\beta i} + \psi_{M,\beta} u_i^M)\, dA_0^* = p_{Ni}, \qquad (18.31)$$

где

$$f^{\alpha\beta} \equiv AA^{\alpha\beta} = \\ = \delta^{\alpha\beta} + 2\varepsilon^{\alpha\lambda}\varepsilon^{\beta\mu}\gamma_{\lambda\mu} = \\ = \delta^{\alpha\beta} + \varepsilon^{\alpha\lambda}\varepsilon^{\beta\mu} (\psi_{N,\mu} u_\lambda^N + \psi_{N,\lambda} u_\mu^N + \psi_{N,\lambda}\psi_{M,\mu} u_k^N u_k^M), \quad (18.32)$$

N_e величин $\mu^R = (\lambda^2)^R$ определяются из условия, что t^{33} должно в среднем на элементе обращаться в нуль. С учетом (18.18в) получаем в каждой узловой точке

$$\int\limits_{A^*_{0(e)}} \left(\frac{\partial W}{\partial I_1} + \frac{\partial W}{\partial I_2} \delta_{\alpha\beta} f^{\alpha\beta} + \frac{\partial W}{\partial I_3} A \right) \psi_N\, dA_0^* = 0. \qquad (18.33)$$

$3N_e$ уравнений (18.31) вместе с N_e уравнениями (18.33) образуют систему $4N_e$ уравнений относительно $4N_e$ неизвестных u_i^N и μ^N. Если предполагается, что величина λ^2 постоянна в каждом элементе, скажем $\lambda^2 = \mu_0$, то в (18.31) надо просто заменить $\psi_R \mu^R$ на μ_0 и к $3N_e$ уравнениям равновесия добавить одно условие:

$$\int\limits_{A_0^*} t^{33}\, dA_0^* = 0,$$

которое получается из (18.33) заменой ψ_N на единицу.

Для изотропных несжимаемых материалов вместо (18.31) имеем

$$2d_0 \int\limits_{A_0^*} \left\{ (\delta^{\alpha\beta} - \lambda^4 f^{\alpha\beta}) \frac{\partial \hat{W}}{\partial I_1} + [\lambda^2 \delta^{\alpha\beta} + f^{\alpha\beta} (1 - 2\lambda^4 - 2\lambda^4 \gamma_\mu^{\ \mu})] \frac{\partial \hat{W}}{\partial I_2} \right\} \times \\ \times \psi_{N,\alpha} (\delta_{\beta i} + \psi_{M,\beta} u_i^M)\, dA_0^* = p_{Ni}, \qquad (18.34)$$

где $f^{\alpha\beta}$ определяется по формуле (18.32) и, согласно (18.27),

$$\lambda^2 = \Big[1 + 2\psi_{N,\alpha} \left(\delta_{\alpha k} + \frac{1}{2} \psi_{M,\alpha} u_k^M \right) u_k^N + \\ + \frac{1}{2} \varepsilon^{\alpha\lambda}\varepsilon^{\beta\mu} (\psi_{N,\alpha} u_\beta^N + \psi_{N,\beta} u_\alpha^N + \psi_{N,\alpha}\psi_{M,\beta} u_k^N u_k^M) \times \\ \times (\psi_{R,\lambda} u_\mu^R + \psi_{R,\mu} u_\lambda^R + \psi_{R,\lambda}\psi_{P,\mu} u_j^R u_j^P) \Big]^{-1}. \qquad (18.35)$$

Здесь $i, j, k = 1, 2, 3$; $\alpha, \beta, \lambda, \mu = 1, 2$; $N, M, P, R = 1, 2, \ldots, N_e$.

Рассмотрим теперь ряд частных случаев уравнений (18.34) и обсудим численные результаты, получающиеся при их применении к конкретным задачам.

Растяжение упругого листа. Для начала рассмотрим относительно простую задачу о растяжении на заданную величину тонкого упругого листа. Тонкое прямоугольное тело защемлено по противоположным краям и растягивается в своей плоскости, как показано на рис. 18.2. Узловые силы на сторонах $x^2 = \pm b/2$ равны нулю, а компоненты u_1^N узловых перемещений на границе $x^1 = \pm a/2$ заданы равными $\pm a(\varepsilon - 1)/2$, где ε — относительное удлинение в направлении координатной линии x^1. Эта задача соответствует испытаниям так называемых двухосных полос, широко используемым для описания предельных свойств таких материалов, как резины, полимеры, твердые топлива и клеи. Несмотря на простоту формулировки, точного решения задачи о поведении двухосных полос при конечных упругих деформациях, по-видимому, не существует. Что же касается получения численных решений, то использование метода конечных элементов в случае этой задачи особенно удобно, поскольку на границах заданы (отличные от нуля) перемещения, а не усилия, так что не приходится исследовать изменения формы нагруженных поверхностей.

Сначала рассмотрим симплексную аппроксимацию локальных полей перемещений, соответствующую набору треугольных элементов. В этом случае

$$\psi_N(x^1, x^2) = a_N + b_{N\alpha} x^\alpha \tag{18.36}$$

и

$$u_\alpha = \psi_N u_\alpha^N = a_N u_\alpha^N + b_{N\beta} x^\beta u_\alpha^N, \qquad u_3 = u_3^N = 0. \tag{18.37}$$

Здесь $N = 1, 2, 3$; $\alpha, \beta = 1, 2$; а массивы a_N и $b_{N\alpha}$ определяются формулами (10.106).

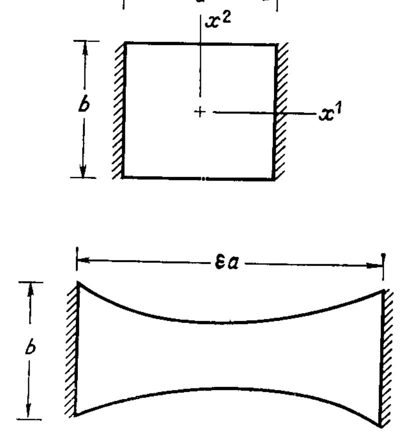


Рис. 18.2. Растяжение упругого двухосного листа.

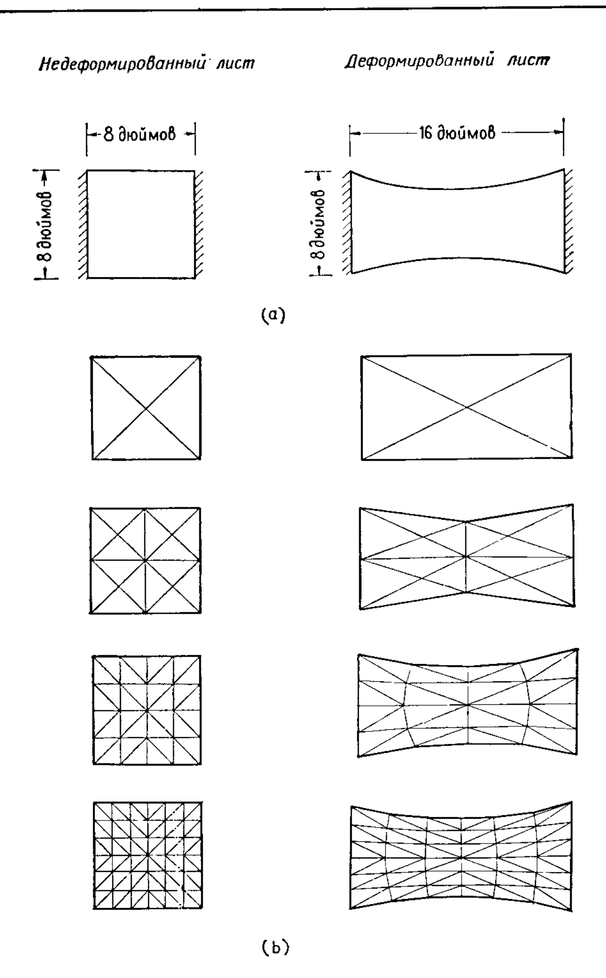


Рис. 18.3. Конечноэлементные решения задачи о растяжении двухосного листа: (a) форма реального листа в недеформированном и деформированном состояниях; (b) различные конечноэлементные представления.

Если предположить, что полоса несжимаемая, то разрешающие уравнения равновесия для типичного элемента получаются после подстановки (18.37) в (18.34):

$$v_{0(e)}\left((\delta^{\alpha\beta}-\lambda^4 f^{\alpha\beta})\frac{\partial\hat{W}}{\partial I_1}+\right.$$

$$\left.+\left\{\lambda^2\delta^{\alpha\beta}\mp f^{\alpha\beta}\left[1-2\lambda^4-2\lambda^4 b_{R\mu}\left(\delta_{\mu\lambda}+\frac{1}{2}b_{M\mu}u_\lambda^M\right)\right]u_\lambda^R\right\}\frac{\partial\hat{W}}{\partial I_2}\right)\times$$

$$\times b_{N\alpha}(\delta_{\beta\rho}+b_{P\beta}u_\rho^P)=p_{N\rho}, \quad (18.38a)$$

$$\lambda^2=\Big[1+2b_{N\alpha}(\delta_{\alpha\beta}+b_{M\alpha}u_\beta^M)\,u_\beta^N+ \\ +\frac{1}{2}\varepsilon^{\alpha\lambda}\varepsilon^{\beta\mu}(b_{N\alpha}u_\beta^N+b_{N\beta}u_\alpha^N+b_{N\alpha}b_{M\beta}u_\lambda^N u_\lambda^M)\times \\ \times(b_{R\lambda}u_\mu^R+b_{R\mu}u_\lambda^R+b_{R\lambda}b_{P\mu}u_\rho^R u_\rho^P)\Big]^{-1}, \quad (18.38б)$$

где $v_{0(e)}=d_0A^*_{0(e)}$ — начальный объем элемента и α, β, λ, μ, $\rho=1$, 2; M, N, P, $R=1$, 2, 3. Эти уравнения применимы к симплексным элементам любого несжимаемого изотропного гиперупругого материала. Для материала Муни $\hat{W}(I_1, I_2)$ имеет вид (15.62), и потому

$$\frac{\partial\hat{W}}{\partial I_1}=C_1,\qquad \frac{\partial\hat{W}}{\partial I_2}=C_2. \quad (18.39)$$

Заметим, что случай $C_2=0$ соответствует так называемым неогуковым материалам. Большинство из приводимых здесь численных результатов относится к материалам Муни.

На рис. 18.3 представлены численные результаты, полученные Оденом и Сато [1967a] [1]) при применении уравнений (18.38) к конкретной задаче о растяжении двухосной полосы. В этом примере рассматривалось растяжение квадратного резинового листа толщиной 0,05 дюйма со стороной 8,0 дюйма, при котором первоначальная длина листа увеличивается в два раза ($\varepsilon=2$). Предполагалось, что материал листа является материалом Муни с постоянными $C_1=24.0$ фунт/дюйм^2 и $C_2=1.5$ фунт/дюйм^2. На рисунке показана форма деформированного листа, получающаяся при различных разбиениях на конечные элементы. Возникавшие в процессе вычисления системы нелинейных уравнений решались методом Ньютона — Рафсона. Начальные точки определялись с помощью малого числа итераций Ньютона — Рафсона для довольно грубой конечноэлементной модели листа. Эти результаты затем использовались в качестве начальных значений для более мелкой сетки, причем начальные значения перемещений в дополнительных узлах определялись линейной интерполяцией.

Для сравнения с экспериментальными данными представляет интерес определение результирующей силы F, которую требуется приложить к границе в горизонтальном направлении для получения величины относительного удлинения $\varepsilon=2$. Величина F для каждой сетки конечных элементов получается простым суммированием компонент в направлении оси x^1 обобщенных сил на границе. В рассматриваемом примере значения для результирующей силы монотонно сходятся при измельчении сетки к ≈ 36.0 фунта (см. рис. 18.4).

Другой подход к решению задачи о двухосной полосе методом конечных элементов применил Беккер [1966], который пользовался билинейной аппроксимацией локального поля перемещений:

$$\psi_N(x^1, x^2)=a_N+b_{N\alpha}x^\alpha+\bar{c}_Nx^1x^2, \\ u_\alpha=\psi_Nu_\alpha^N=a_Nu_\alpha^N+b_{N\beta}x^\beta u_\alpha^N+\bar{c}_Nx^1x^2u_\alpha^N. \quad (18.40)$$

Здесь $N=1$, 2, 3, 4, а массивы a_N, $b_{N\alpha}$ и $\bar{c}_N$ определяются формулами (10.118). Однако прямая подстановка (18.40) в (18.35) приводит к очень сложному выражению для λ^2, которое в соответствии с (18.34) надо интегрировать

[1]) Ранее конечноэлементное исследование конечных деформаций тонких упругих мембран было проведено Оденом [1966a], а конечные плоские деформации упругих листов с помощью конечноэлементных моделей изучал Беккер [1966]. См. рис. 18.6 и 18.7.

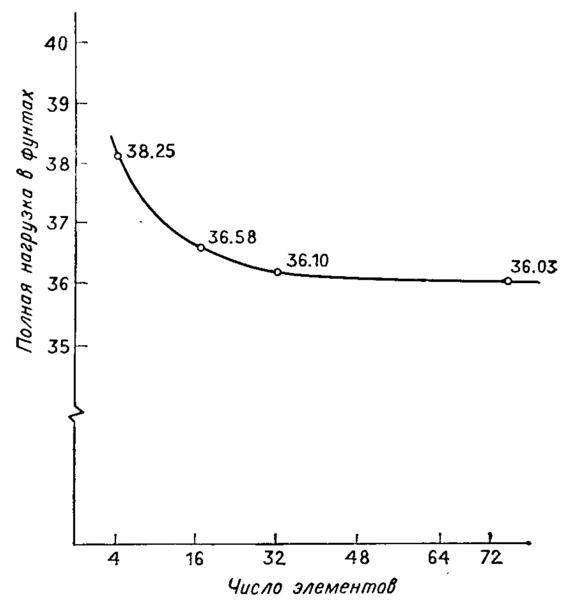


Рис. 18.4. Зависимость полной нагрузки от числа элементов при растяжении квадратного листа.

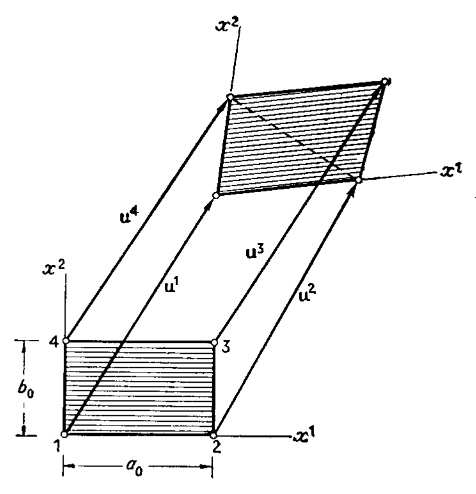


Рис. 18.5. Деформация четырехугольного элемента.

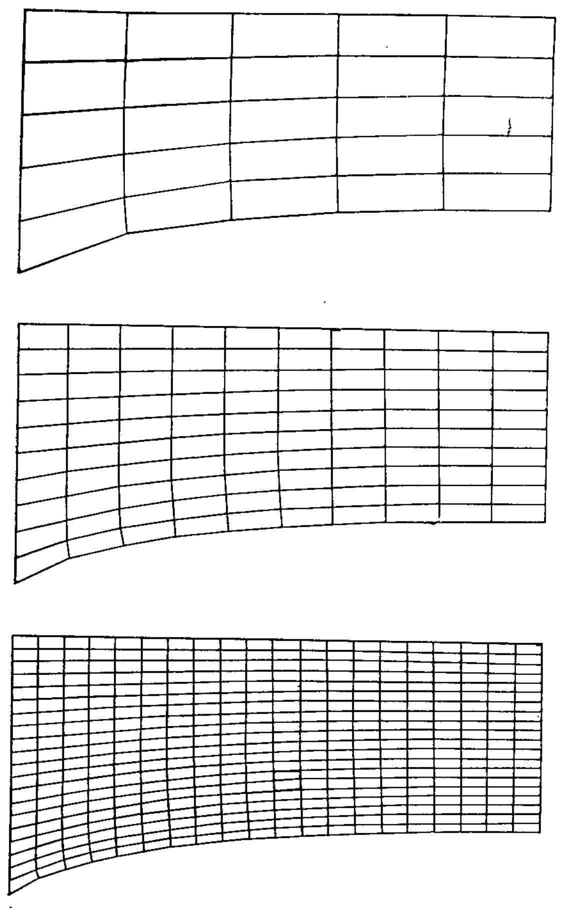


Рис. 18.6. Конечноэлементные представления четверти деформированного упругого листа; $\varepsilon = 2.0$ и $a_0/b_0 = 1.0$.

по недеформированной срединной поверхности. Для того чтобы избежать этой трудности, можно с помощью приема, использованного при выводе соотношения (16.77), получить упрощенную форму условия несжимаемости $\lambda^2 A = I_3 = 1$. Рассмотрим показанный на рис. 18.5 типичный прямоугольный элемент размера $a_0 \times b_0$ и толщины d_0. Площадь деформированной срединной поверхности можно выразить через узловые перемещения в виде суммы площадей треугольников 124 и 234:

$$A^* = \frac{1}{2}\det\begin{vmatrix} u_1^1 & a_0+u_1^2 & u_1^4 \\ u_2^1 & u_2^2 & b_0+u_2^4 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} + \frac{1}{2}\det\begin{vmatrix} a_0+u_1^2 & a_0+u_1^1 & u_1^4 \\ u_2^2 & b_0+u_2^3 & b_0+u_2^4 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}. \tag{18.41}$$

Поскольку $\lambda d_0 = d$, условие несжимаемости принимает простой вид

$$A_0^* = a_0 b_0 = \lambda A^*. \tag{18.42}$$

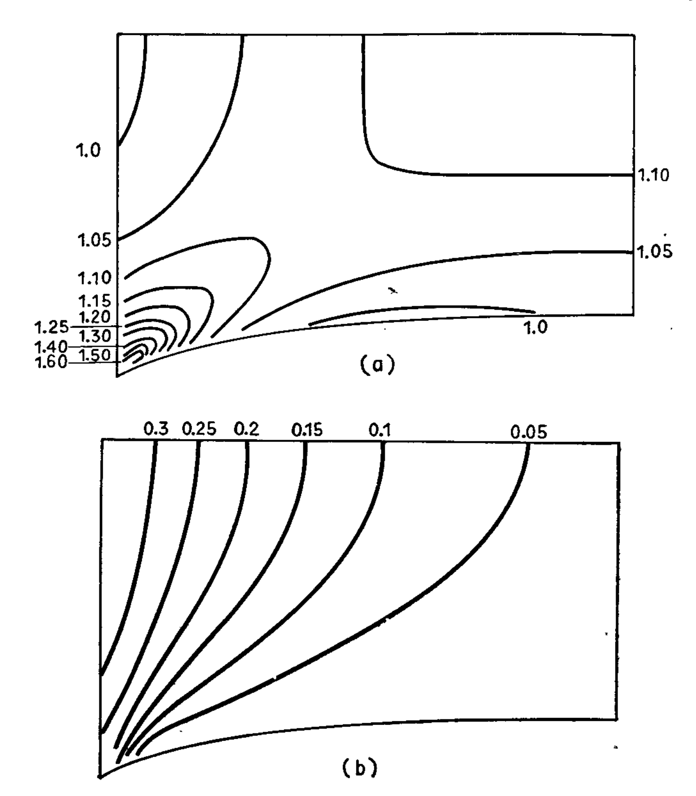


Рис. 18.7. Линии равных напряжений в деформированном упругом листе: (a) осевые нормальные напряжения; (b) поперечные нормальные напряжения; $\varepsilon = 1.5$ и $a_0/b_0 = 1.0$.

Следовательно, вместо (18.35) можно взять

$$\lambda = a_0 b_0 / A^*. \tag{18.43}$$

Остальные члены в (18.34) при локальном определении u_α по формуле (18.40) представляют собой полиномы относительно x^1 и x^2.

Вместо того чтобы получать в явном виде жесткостные соотношения для таких четырехугольных элементов, Беккер предпочел свести задачу к задаче нахождения значений узловых перемещений, минимизирующих полную потенциальную энергию $\Pi(U^\Delta)$, которая вычислялась с использованием аппроксимации (18.40). Этот подход, описанный в п. 17.1, можно использовать в сочетании с любым из рассмотренных в § 17 методов минимизации функционала. Приводимые здесь решения получены с помощью модифицированного метода покоординатной релаксации (см. п. 17.3). Численные результаты Беккера представлены на рис. 18.6 и 18.7.

На рис. 18.6 показана четверть первоначально квадратного листа из материала Муни, растянутого в $\varepsilon = 2{,}0$ раза при различных конечноэлементных представлениях. Безразмерные постоянные Муни C_1 и C_2 были приняты равными соответственно 8 и 1, что позволило получить результаты, хорошо согласующиеся с экспериментами на резиновых листах.

На рис. 18.7 показаны линии уровня осевых и поперечных нормальных напряжений при растяжении квадратного листа в случае увеличения его первоначальной длины в 1,5 раза ($\varepsilon = 1{,}5$). Эти линии уровня значительно отличаются от определенных с помощью теории бесконечно малых деформаций несжимаемых тел [1]), по которой, в отличие от теории конечных деформаций материалов Муни, отношение поперечного напряжения к осевому не зависит от относительного удлинения ε и постоянных материала.

Лист с круговым отверстием. Ривлин и Томас [1951] экспериментально изучили поведение тонкого кругового резинового листа с небольшим центрально расположенным круговым отверстием при осесимметричном растяжении в плоскости листа. Как показывают эксперименты Ривлина и Саундерса [1951] на этом же материале, его свойства можно удовлетворительно охарактеризовать с помощью функции энергии деформации в форме Муни при значениях постоянных $C_1 = C_2/0.08 = 18.35$ фунт/дюйм^2. Эксперименты Ривлина и Томаса проводились на образце, который в недеформированном состоянии имел диаметр 5.0 дюйма, толщину 0.0625 дюйма и отверстие диаметром 1.0 дюйма. По наружному краю листа прикладывались радиальные нагрузки и замерялись перемещения при различных величинах относительного удлинения в радиальном направлении.

Опишем результаты исследования этой же задачи методом конечных элементов [2]) с использованием симплексной модели (18.38). Полная конечноэлементная модель, применявшаяся при исследовании, изображена на рис. 18.8. В силу симметрии фактически рассматривался только один октант. После построения связанной модели обобщенные силы в узлах на внутренней окружности приравнивались нулю, а обобщенные силы, действующие в узловых точках на наружной окружности, задавались таким образом, чтобы они представляли равномерно распределенную радиальную нагрузку. Полученные нелинейные уравнения равновесия решались методом последовательных нагружений, что позволило получить полные сведения о поведении листа в процессе деформирования.

На рис. 18.9 показано вычисленное изменение перемещений узловых точек на внутренней и наружных границах в зависимости от величины силы P, действующей на одной восьмой части наружной границы. Видно, что с увеличением нагрузки материал размягчается: при малых нагрузках он довольно жесток и наклон S кривой, соответствующей внутренней границе, составляет 77 фунт/дюйм, в то время как при больших деформациях поведение почти линейно и $S \approx 22$ фунт/дюйм. Заметим, что по линейной теории получаются перемещения наружной границы, составляющие лишь 28% от даваемых нелинейной теорией.

На рис. 18.10 представлено сравнение рассчитанных перемещений с перемещениями, определенными экспериментально Ривлином и Томасом для различных величин относительного удлинения λ в радиальном направлении при $r = \infty$. В качестве безразмерной ординаты взято отношение радиуса в деформированном состоянии к его величине в недеформированном состоянии, а в качестве абсциссы — безразмерное расстояние r/a от центра отверстия, где r — радиальная координата точки в недеформированном теле и a — недеформированный радиус центрального отверстия. Результаты расчета с использованием конечноэлементной модели очень хорошо согласуются с экспериментом.

Для рассмотренных в этом примере формы листа и условий нагружения линейная теория упругости дает коэффициент концентрации напряжений, равный 2 (т. е. $\sigma^{22}(a)/\sigma^{11}(\infty) = 2$). Однако на самом деле коэффициент концентрации напряжений зависит от величины деформации и свойств материала.

---

[1]) Уильямс и Шейпери [1962].

[2]) Эти результаты получены Оденом и Ки [1971a].

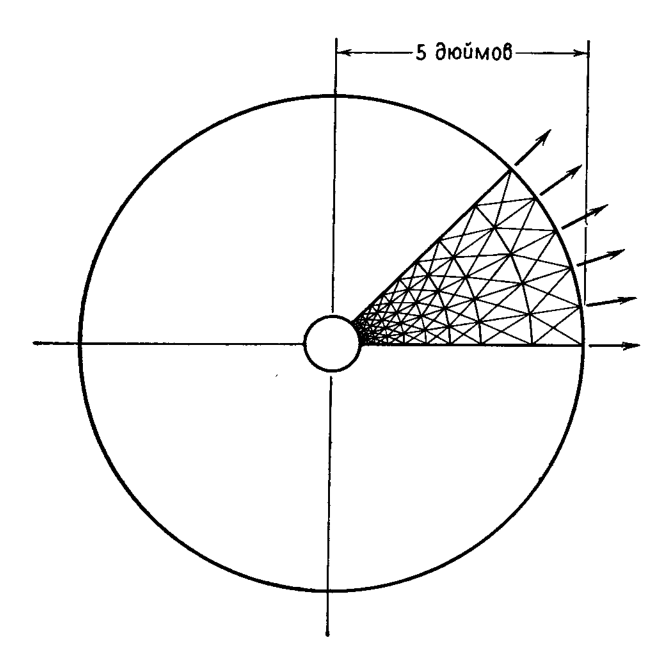


Рис. 18.8. Конечноэлементная модель тонкого листа с круговым отверстием.

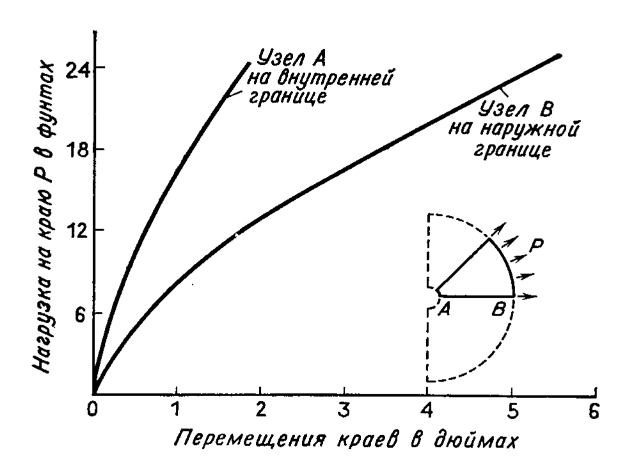


Рис. 18.9. Зависимость узловых перемещений от приложенной на краю нагрузки.

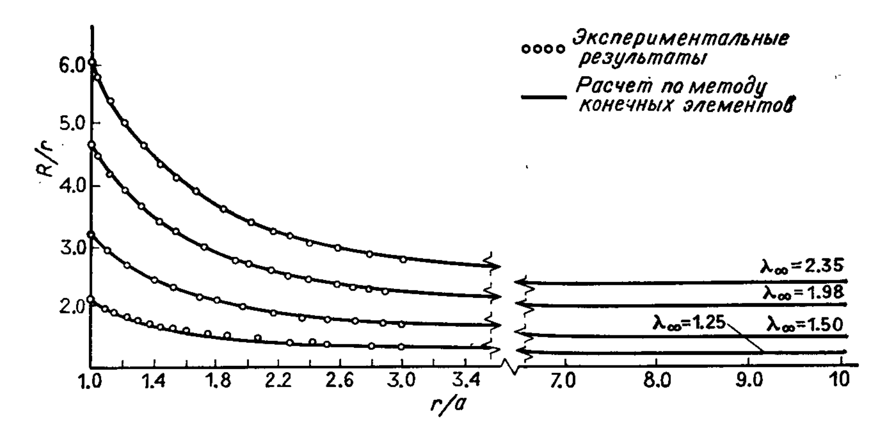


Рис. 18.10. Сравнение рассчитанных полей перемещений с полями, определенными экспериментально Ривлином и Томасом [1951], для различных величин относительного удлинения в радиальном направлении.

Один из факторов, влияющих на изменение величины концентрации напряжений,— это, конечно, значительное уменьшение толщины листа при больших растягивающих деформациях; например, когда радиальные деформации достигают примерно 150%, средняя толщина листа составляет лишь около четверти толщины листа в недеформированном состоянии.

На рис. 18.11 представлена вычисленная величина коэффициента концентрации k в зависимости от величины относительного удлинения в радиальном направлении для рассмотренного нами радиально нагруженного листа из материала Муни. При малых деформациях $k = 2$, в соответствии с линейной теорией. Однако при увеличении относительных удлинений величина k

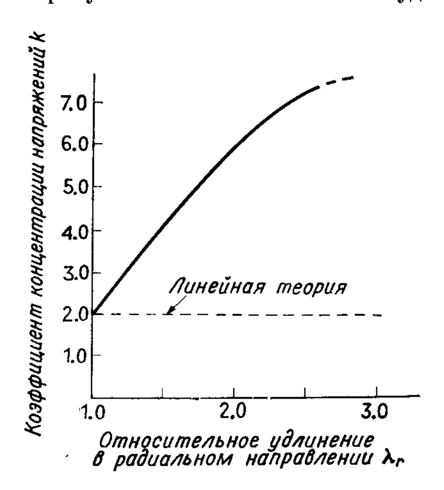


Рис. 18.11. Зависимость коэффициента концентрации напряжений от деформации.

также увеличивается и достигаст примерно 6 при $\lambda_\infty = 2.0$. Этот результат согласуется с выводами Янга [1967] о концентрации напряжений в материалах Муни.

Одноосное растяжение листа с круговым отверстием. Рассмотрим задачу об однородном растяжении тонкого первоначального квадратного однородного листа с центрально расположенным круговым отвер-

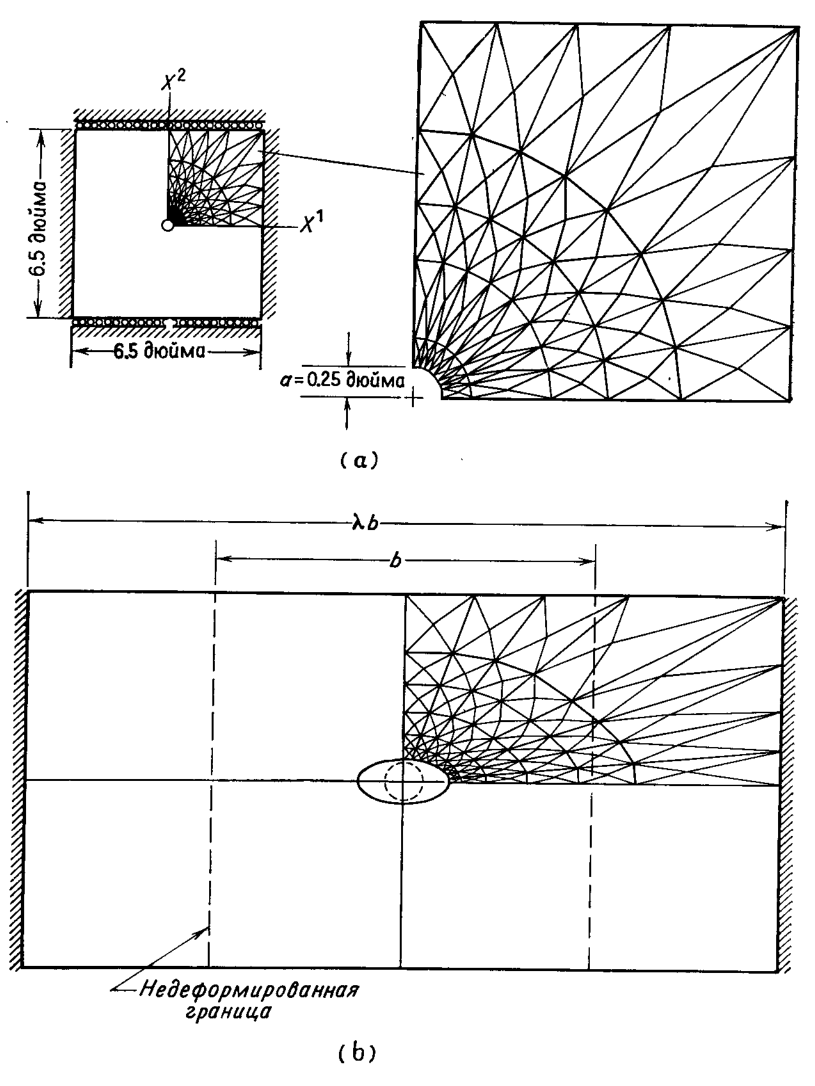


Рис. 18.12. Недеформированная и деформированная конечноэлементная модель одноосно растягиваемого квадратного листа с круговым отверстием.

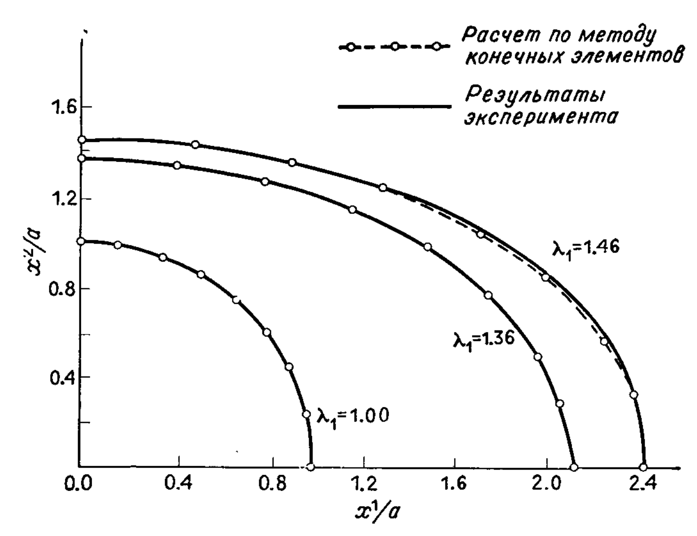


Рис. 18.13. Сравнение результатов расчета с экспериментальными результатами Сегала и Клоснера [1970] по определению формы деформированного отверстия.

стием. Начало материальной системы координат x^1, x^2 расположим в центре отверстия, а оси x^1 и x^2 направим параллельно сторонам листа. Лист растягивается в направлении x^1, а его ширина в направлении x^2 поддерживается постоянной.

Эта задача возникла в связи с экспериментами Сегала и Клоснера [1970] на листах из эластичной резины, функция энергии деформации для которой имеет вид, существенно отличный от формы Муни. После ряда испытаний на образцах из некоторых несжимаемых эластичных резин [1]) они предложили кубичную по I_2 функцию энергии деформации, определяемую выражением (15.65). Таким образом, функция энергии деформации содержит четыре постоянные материала. Из опытов на образцах из натурального каучука были определены приближенные значения этих постоянных: $C_1 = 20.28$ фунт/дюйм^2, $C_2 = 5.808$ фунт/дюйм^2, $C_3 = -0.7200$ фунт/дюйм^2 и $C_4 = 0.04596$ фунт/дюйм^2. Затем на квадратном образце из того же материала со стороной 6.5 дюйма толщины 0,079 дюйма и с круговым отверстием диаметра 0.5 дюйма были проведены опыты, в которых определялись перемещения и форма листа после деформирования. Образец испытывался по описанной выше программе при одноосном растяжении.

Кратко рассмотрим результаты конечноэлементного исследования этой задачи [2]). На рис. 18.12а показана конечноэлементная модель четверти листа, состоящая из 192 симплексных элементов. Уравнения (18.38) с учетом соответствующих краевых условий приводят к системе 198 уравнений относительно компонент перемещений узловых точек. Присутствие члена $(I_2 - 3)^3$ в выражении для функции энергии деформации обусловливает появление в уравнениях равновесия каждого элемента членов, содержащих двенадцатую степень перемещений узловых точек. Коэффициент поперечной

[1]) Клоснер и Сегал [1969].
[2]) Оден и Ки [1971а].

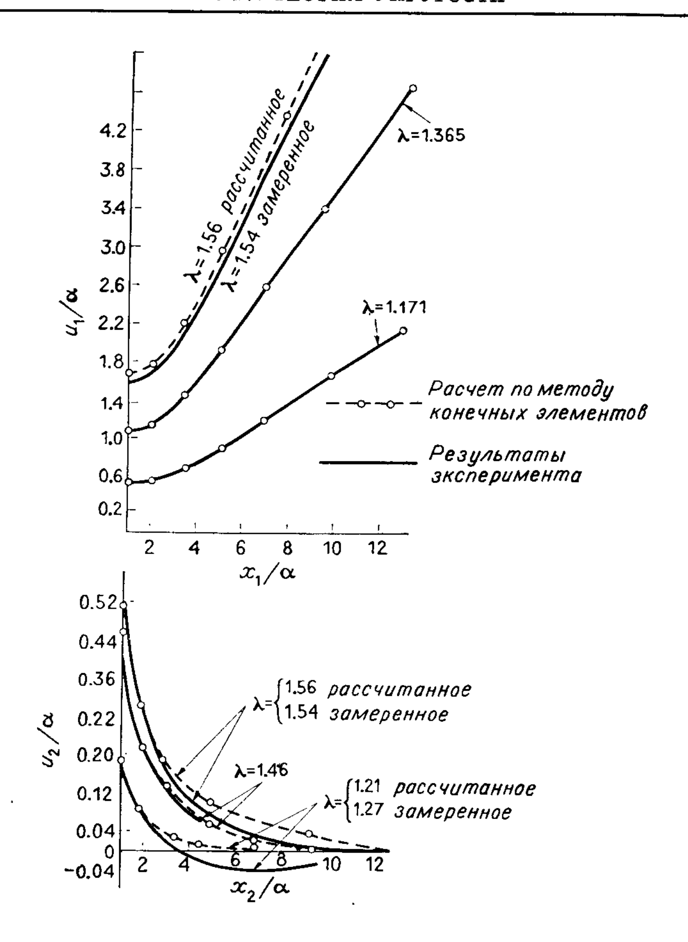


Рис. 18.14. Сравнение рассчитанных перемещений с экспериментально определенными Сегалом и Клоснером.

деформации λ, входящий в уравнения равновесия в четвертой степени, дает перемещения в степени —4. Перемещения узловых точек в направлении оси x^1 при $x^1 = \pm 3.25$ полагались равными друг другу и растяжение листа осуществлялось за счет задания приращений равномерной нагрузки в узловых точках на границе в направлении оси x^1. Таким образом, система нелинейных уравнений равновесия решалась методом последовательных нагружений, описанным в п. 17.5.

На рис. 18.12b показана деформированная система конечных элементов при $\lambda_1 = 2$. Мы видим, что круговое отверстие вытягивается и становится эллиптическим, а радиальные лучи приобретают заметную кривизну. На рис. 18.13 показана в большем масштабе четверть отверстия после деформации. Для сравнения приводятся два профиля отверстия: полученный в результате расчета и определенный экспериментально Сегалом и Клосне-

ром — при значениях относительного удлинения $\lambda x_1 = \lambda_1$, равных 1.0, 1.36 и 1.46. Соответствие между рассчитанными и замеренными в опытах перемещениями очень хорошее.

На рис. 18.14 произведено сравнение перемещений вдоль осей x^1 и x^2, определенных расчетным путем и полученных в опытах Сегала и Клоснера, при различных величинах относительного удлинения λ_1. Опять соответствие очень хорошее. Лишь при малых значениях λ_1 наблюдается различие в рассчитанных и замеренных вертикальных перемещениях узловых точек, расположенных на оси x^2. Это в основном обусловлено тем, что использованные в расчетах приращения нагрузки приводили не в точности к тем же самым относительным удлинениям, которые замерялись в опыте. Кроме того, можно думать, что при малых относительных удлинениях точность экспериментального определения перемещений снижается.

Влияние вида функции энергии деформации. Интересно сравнить численные решения одной и той же задачи, полученные при использовании различных видов функции энергии деформации W. Для примера рассмотрим задачу об одноосном растяжении квадратного листа с круговым отверстием (рис. 18.12) для следующих семи различных видов функции энергии деформации: 1) неогукова форма (15.63), 2) форма Муни (15.62), 3) форма Клоснера — Сегала (15.65) (использованная в предыдущем примере), 4) форма Исихары — Хасицумэ — Татибаны (15.66), 5) форма Бидермана (15.67), 6) экспоненциальная форма Харт-Смита (15.68) и 7) экспоненциальная форма Александера (15.70).

При проведении сравнения постоянные материала определялись по экспериментальным данным Трилора [1]), полученным для восьмипроцентной сернистой резины. Они дают такие значения постоянных для материалов первых пяти типов: $C = C_1 = 27.02$ фунт/дюйм², $C_2 = 1.42$ фунт/дюйм², $C_3 = -0.959$ фунт/дюйм², $C_4 = 0.0612$ фунт/дюйм², $B_1 = -0.27$ фунт/дюйм², $B_2 = 0.00654$ фунт/дюйм². Таким образом, коэффициенты при одинаковых членах во всех полиномиальных формах функции энергии деформации совпадают между собой. Для харт-смитовой формы (15.68) данные Трилора приводят к следующим значениям коэффициентов: $G = 22.75$ фунт/дюйм², $k_1 = 0.00028$, $k_2 = 1.20$. Наконец, если потребовать совпадения одинаковых членов в (15.68) и (15.70) и воспользоваться, после соответствующего пересчета, экспериментальными результатами Александера [2]), то можно получить значения постоянных, входящих в (15.70): $C_2 = 1.34$ фунт/дюйм², $C_3 = 26.55$ фунт/дюйм².

Результаты расчета величины силы, приложенной в направлении оси x_1 к границам $x_1 = \pm a/2$, в зависимости от относительного удлинения λ при $x_1 = \pm\infty$ (см. рис. 18.12) для различных видов функции энергии деформации представлены на рис. 18.15 [3]). Недостаточность экспериментальных данных не позволила точно определить постоянные, входящие в форму Александера, для резины, на которой проводил эксперименты Трилор. Этим, по-видимому, объясняется разница в начальном наклоне кривых для материала Александера и других материалов. Для относительных удлинений λ от 1.0 до 2.0 поведение материала Александера заметно отличается от поведения других рассматриваемых материалов. Однако для бо́льших значений относительного удлинения, как видно из рис. 18.16, это отличие не так заметно. При $2.0 \leqslant \lambda < 5.5$ одноосное поведение неогукова материала и материала Муни практически линейно, в то время как экспоненциальные формы Харт-Смита и Александера и квадратичная форма Исихары — Хасицумэ — Татибаны

---

1) Трилор [1944, 1958].

2) Александер [1968].

3) Численные результаты, представленные на рис. 18.15—18.18, и их анализ принадлежат Одену и Ки [1972].

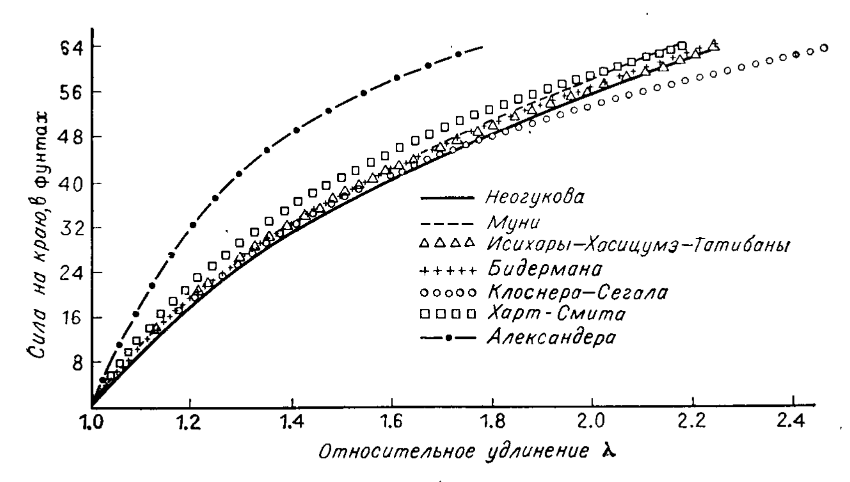


Рис. 18.15. Зависимость силы в направлении оси x^1 на границах $x_1 = \pm a$ от относительного удлинения λ при $x_1 = \pm \infty$ для различных видов функции энергии деформации.

описывают ужесточение материала. Поведение материалов Клоснера — Сегала и Исихары — Хасицумэ — Татибаны при $\lambda > 2.0$ не исследовалось.

Существенно, что одноосное поведение, характеризуемое рис. 18.15 и 18.16, почти нечувствительно к виду функции энергии деформации. Следовательно, экспериментов при одноосном нагружении описанного типа недостаточно для точного описания свойств материала. Подобные же выводы были сделаны Александером [1968] в связи с одноосными испытаниями тонких полос.

Однако деформированная форма центрального отверстия более чувствительна к виду функции энергии деформации. На рис. 18.17 и 18.18 показаны

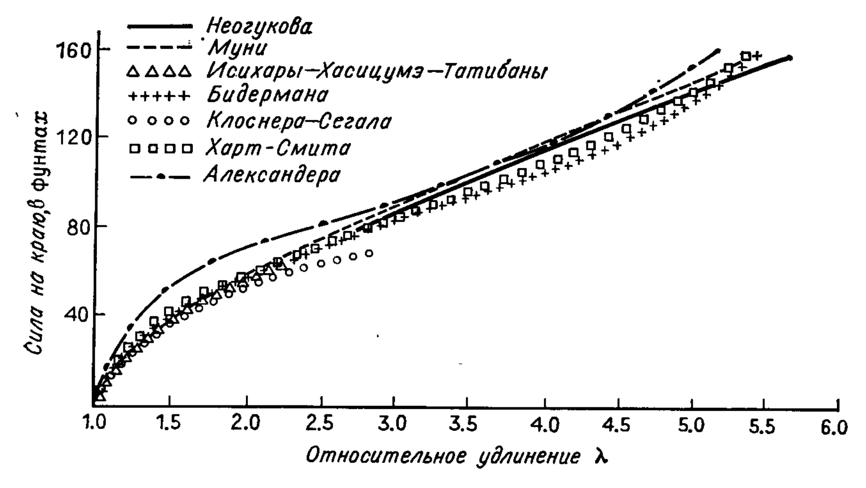


Рис. 18.16. Зависимость силы на краю от относительного удлинения λ.

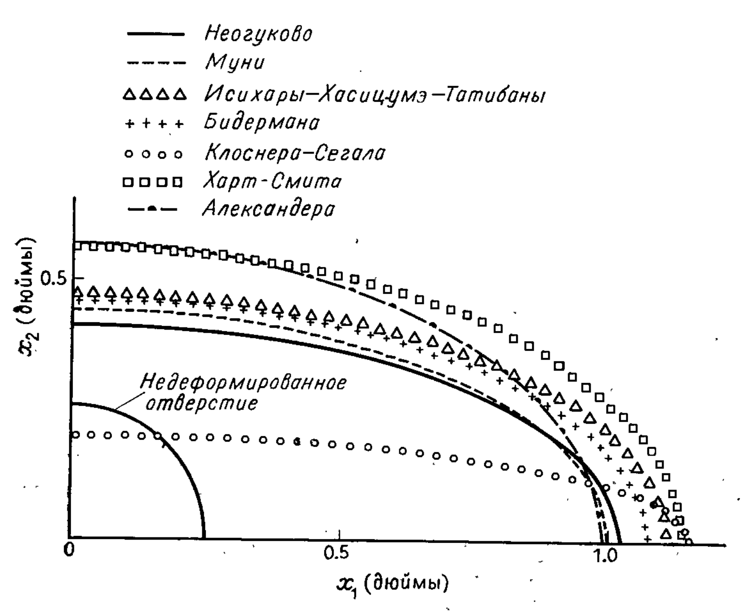


Рис. 18.17. Деформированная форма четверти центрального отверстия при одноосном растяжений силой 64.0 фунта.

рассчитанные профили четверти деформированного отверстия для сил P величиной 64 и 160 фунтов соответственно. Понятно, что при этом величина относительного удлинения λ при $x_1 = \pm\infty$ для разных материалов различна. При $P = 64$ ф. центральное отверстие для материала Клоснёра — Сегала имеет гораздо более уплощенную форму, чем для других материалов. При меньших нагрузках (соответствующих величинам относительно удлинения λ от 1 примерно до 2) профили, определенные расчетным путем, прекрасно

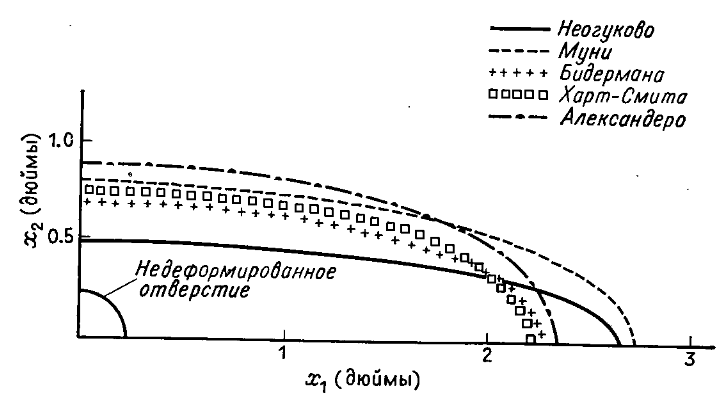


Рис. 18.18. Деформированная форма четверти центрального отверстия при одноосном растяжении силой 160.0 фунта.

согласуются с результатами измерений Клоснера и Сегала [1969]; однако в этой работе нет экспериментальных данных для бо́льших значений λ.

При $P = 64$ ф. (рис. 18.17) формы отверстий для неогукова материала и материала Муни очень близки, но при бо́льших нагрузках (рис. 18.18) наблюдается значительное отличие поперечных перемещений при $x_2 = d/2$. Напротив, для материалов Харт-Смита и Бидермана различие профилей при $P = 160$ ф. менее выражено, чем при $P = 64$ ф. Хотя материал Александера несколько жестче, чем материал Харт-Смита, профили отверстия для них близки по форме в довольно широком диапазоне изменения относительного удлинения. Профиль отверстия для материала Бидермана близок к профилю для материала Исихары — Хасицумэ — Татибаны при $P = 64$ ф. и материала Харт-Смита при $P = 160$ ф.

Раздувание упругих мембран[1]. Применим теперь уравнения (18.34) к более общей задаче о раздувании мембран под действием нормального к срединной поверхности давления. Используя опять симплексное представление, приходим к локальным соотношениям

$$u_i = a_N u_i^N + b_{N\beta} x^\beta u_i^N, \tag{18.44}$$

где a_N и $b_{N\beta}$ — те же самые массивы, что и в (18.37) [и (10.106)]. Теперь, однако, u_i и u_i^N отличны от нуля, и вместо (18.38а) имеем локально

$$2v_{0(e)} \left((\delta^{\alpha\beta} - \lambda^4 f^{\alpha\beta}) \frac{\partial \hat{W}}{\partial I_1} + \left\{ \lambda^2 \delta^{\alpha\beta} + f^{\alpha\beta} \left[1 - 2\lambda^4 - \right.\right.\right.$$
$$\left.\left.\left. - 2\lambda^4 b_{R\mu} \left(\delta_{\mu k} + \frac{1}{2} b_{M\mu} u_k^M \right) u_k^R \right] \right\} \frac{\partial \hat{W}}{\partial I_2} \right) b_{N\alpha} (\delta_{\beta i} + b_{P\beta} u_i^P) = p_{N_i}, \tag{18.45}$$

где α, β, $\mu = 1, 2$; N, M, R, P, i, $k = 1, 2, 3$. Рассмотрим случай, когда каждый элемент нагружен равномерным давлением q_0, так что, согласно (16.113),

$$p_{Nk} = \frac{1}{6} q_0 \varepsilon_{ijk} (x_i^2 + u_i^2 - x_i^1 - u_i^1)(x_j^3 + u_j^3 - x_j^1 - u_j^1), \tag{18.46}$$

где, по крайней мере локально, $x_3^N = 0$.

Харт-Смитом и Криспом [1967] приведены экспериментальные и теоретические данные о поведении первоначально плоской круглой резиновой мембраны диаметром 50.8 мм и толщиной 0.2 мм под действием равномерного давления 0.097 кг/мм². Исходя из этих экспериментальных данных и молекулярной теории Джента и Томаса [1958][2], Харт-Смит и Крисп предложили для функции свободной энергии формулу (15.68), в соответствии с которой

$$\frac{\partial \hat{W}}{\partial I_1} = C \exp [k_1 (I_1 - 3)^2] \quad \text{и} \quad \frac{\partial \hat{W}}{\partial I_2} = \frac{C k_2}{I_2}. \tag{18.47}$$

Здесь C, k_1 и k_2 — постоянные материала. Поскольку для резиноподобных материалов k_1 лежит в диапазоне от 0 до 0.0004, а k_2 — в диапазоне от 0 до 1.5, функции в (18.47) приближенно равны постоянным Муни C_1 и C_2, в предположении, что I_1 и I_2 постоянны в каждом элементе, так что постоянные Муни для элементов могут быть вычислены с помощью (18.47) и экспе-

---

[1]) Конечноэлементные решения ряда задач о раздувании и конечных деформациях тонких упругих мембран получены Оденом [1966а], Оденом и Сато [1967а, 1967б], Оденом и Кубицей [1967]. См. также Оден [1971в].

[2]) См. также Харт-Смит [1966].

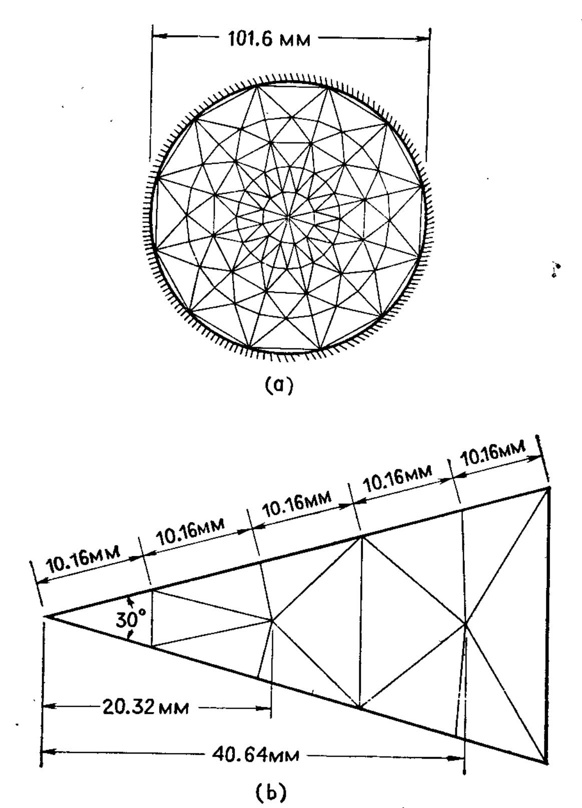


Рис. 18.19. (a) Конечноэлементная модель круговой мембраны. (b) Типичный сектор с углом 30°.

риментальных данных Харт-Смита и Криспа. На рис. 18.19 показана использованная конечноэлементная модель, а на рис. 18.20 приведен профиль раздутой мембраны, отвечающий численным результатам, полученным при решении соответствующей системы нелинейных уравнений методом Ньютона — Рафсона [1]). Для сравнения на том же рисунке приведены профили по Харт-Смиту и Криспу. Заметим, что довольно грубая сетка элементов приводит к результатам, хорошо согласующимся с экспериментальными данными: максимальная разница между вычисленными и замеренными перемещениями составляет около 6%. За исключением незначительного изменения вертикального перемещения центрального узла, по существу такие же результаты получаются при использовании средних значений постоянных Муни $C_1 = 9.5$ $C_2 = 1.75$ кг/см^2 во всей модели.

Следует указать на сильную нелинейность задач этого типа. На рис. 18.21 показана зависимость величины относительного удлинения λ_p в вершине раздутого листа от внутреннего давления. Эти результаты были получены Оденом и Кубицей [1967] в испытаниях круговых дисков из чистого натураль-

[1]) Эти результаты принадлежат Одену и Кубице [1967].

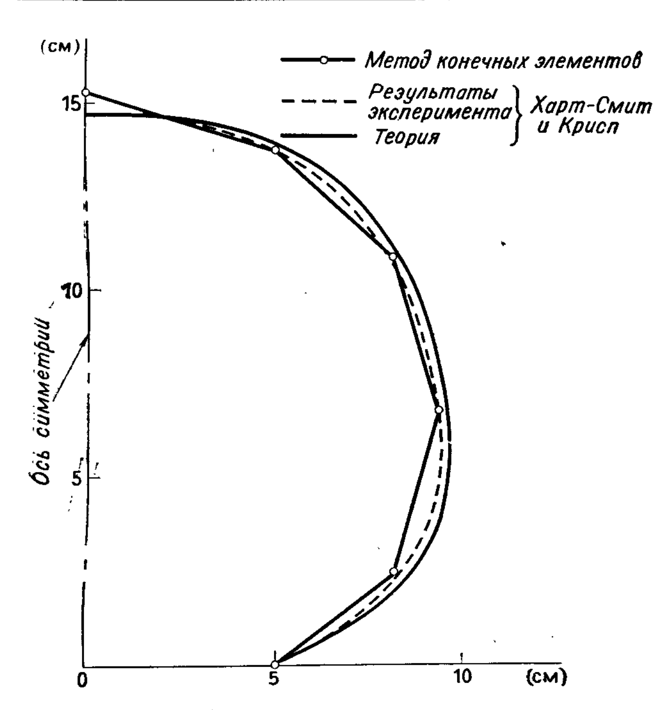


Рис. 18.20. Сравнение профиля раздутой мембраны, рассчитанного методом конечных элементов, с профилями, определенными экспериментально и теоретически.

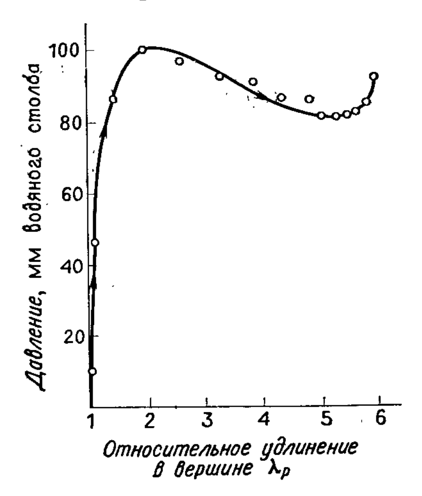


Рис. 18.21. Зависимость величины относительного удлинения от внутреннего давления.

ного каучука толщиной 0.0173 см и 38.1 см в диаметре. Диски нагружались последовательно в несколько этапов внутренним давлением приблизительно до 100 мм водяного столба. Исследование поведения диска методом конечных элементов при предположении, что материал диска является материалом Муни с постоянными $C_1 = 1.14$ кг/см^2 и $C_2 = 0{,}14$ кг/см^2, позволило получить профили, хорошо согласующиеся с результатами эксперимента. Из рисунка видно, что при давлении приблизительно 90 мм водяного столба относительное удлинение в центре неоднозначно. Это указывает на неустойчивость (при растяжении). Такая особенность поведения обычно вызывает значительные затруднения при проведении расчетов. Однако, используя метод Ньютона — Рафсона и разумно выбирая пробные значения (начальные точки), удалось успешно решить эту задачу при заданной величине внутреннего давления [1].

18.2. НЕСЖИМАЕМЫЕ УПРУГИЕ ТЕЛА ВРАЩЕНИЯ [2]

Рассмотрим упругое тело вращения с поперечным сечением произвольной формы. Будем предполагать, что положения материальных частиц в начальной конфигурации тела характеризуются конвективными (внутренними) цилиндрическими координатами $\xi^1 = r$, $\xi^2 = z$ и $\xi^3 = \theta$. Деформация тела определяется полем перемещений $\mathbf{u} = \mathbf{u}(r, z, \theta)$ и его градиентом $\mathbf{u}_{,i} \equiv \partial\mathbf{u}/\partial\xi^i$. Ниже мы ограничиваемся рассмотрением лишь осесимметричных деформаций, для которых $\mathbf{u} = \mathbf{u}(r, z)$ и поле перемещений определяется радиальной и осевой компонентами u_1 и u_2. В этом случае соотношения между деформациями и перемещениями сводятся к следующим:

$$2\gamma_{\alpha\beta} = u_{\alpha,\beta} + u_{\beta,\alpha} + u_{\mu,\alpha}u^{\mu}_{,\beta}, \tag{18.48а}$$

$$\gamma_{\alpha 3} = 0, \tag{18.48б}$$

$$\gamma_{33} = \frac{r^2}{2}(\lambda^2 - 1), \tag{18.48в}$$

где $\gamma_{\alpha\beta}(\alpha,\ \beta,\ \mu = 1,\ 2)$ — ковариантные компоненты тензора деформаций, $u_\mu = u^\mu$ и

$$\lambda = 1 + \frac{u_1}{r}. \tag{18.49}$$

Функция $\lambda = \lambda(r, z)$ представляет собой относительное удлинение в окружном направлении, т. е. λ — отношение длины окружного

[1] Оден [1971в].

[2] Применениям метода конечных элементов к линейным задачам о симметричных бесконечно малых деформациях гуковых тел вращения посвящены работы Рашида [1964, 1966] и Клафа и Рашида [1965]. Вильсон [1965] рассмотрел линейную задачу о произвольных бесконечно малых деформациях осесимметричных упругих тел, а Беккер и Брисбейн [1965] построили конечноэлементные модели для исследования бесконечно малых деформаций несжимаемых тел вращения. Приложения к общей задаче о конечных осесимметричных деформациях несжимаемых тел вращения даны в статье Одена и Ки [1970], на основе которой и написан этот пункт.

волокна в деформированном теле к его первоначальной длине в начальной конфигурации.

Если, как и раньше, мы предположим, что тело изотропно и гиперупруго, то функцию энергии деформации W можно представить как функцию от главных инвариантов тензора меры деформации. Для рассматриваемого типа деформаций

$$\begin{aligned} I_1 &= 2(1+\gamma_\alpha^\alpha)+\lambda^2, \\ I_2 &= 2\lambda^2(1+\gamma_\alpha^\alpha)+\varphi, \\ I_3 &= \lambda^2\varphi, \end{aligned} \tag{18.50}$$

где

$$\varphi = 1+2\gamma_\alpha^\alpha+2\varepsilon^{\alpha\beta}\varepsilon^{\lambda\mu}\gamma_{\alpha\lambda}\gamma_{\beta\mu} \tag{18.51}$$

и, как обычно, $\varepsilon^{\alpha\beta}$ — двумерный перестановочный символ. Следовательно,

$$t^{\alpha\beta} = 2\frac{\partial W}{\partial I_1}\delta^{\alpha\beta}+2\frac{\partial W}{\partial I_2}[\delta^{\alpha\beta}(1+\lambda^2)+2\varepsilon^{\alpha\lambda}\varepsilon^{\beta\mu}\gamma_{\lambda\mu}]+ \\ +2\frac{\partial W}{\partial I_3}\lambda^2(\delta^{\alpha\beta}+2\varepsilon^{\alpha\lambda}\varepsilon^{\beta\mu}\gamma_{\lambda\mu}), \tag{18.52а}$$

$$t^{\alpha 3}=0, \tag{18.52б}$$

$$r^2t^{33} = 2\frac{\partial W}{\partial I_1}+4(1+\gamma_\alpha^\alpha)\frac{\partial W}{\partial I_2}+2\frac{\partial W}{\partial I_3}\varphi. \tag{18.52в}$$

Для несжимаемых материалов $W=\hat{W}(I_1, I_2)$, $I_3=1$ и

$$t^{\alpha\beta} = 2\frac{\partial \hat{W}}{\partial I_1}\delta^{\alpha\beta}+2\frac{\partial \hat{W}}{\partial I_2}[\delta^{\alpha\beta}(1+\lambda^2)+2\varepsilon^{\alpha\lambda}\varepsilon^{\beta\mu}\gamma_{\lambda\mu}]+ \\ +2h\lambda^2(\delta^{\alpha\beta}+2\varepsilon^{\alpha\lambda}\varepsilon^{\beta\mu}\gamma_{\lambda\mu}), \tag{18.53а}$$

$$t^{\alpha 3}=0, \tag{18.53б}$$

$$r^2t^{33} = 2\frac{\partial \hat{W}}{\partial I_1}+4(1+\gamma_\alpha^\alpha)\frac{\partial \hat{W}}{\partial I_2}+2h\varphi, \tag{18.53в}$$

где h — гидростатическое давление.

Конечноэлементные аппроксимации. Построим дискретную модель нашего тела вращения, представив его в виде совокупности E конечных элементов вращения (см. рис. 18.22). Следуя обычной процедуре, выделяем типичный конечный элемент e и аппроксимируем локальное поле перемещений u_α (ξ^1, ξ^2) на этом элементе следующим образом: $u_\alpha = \psi_N(\xi^1, \xi^2)\,u_\alpha^N$, где $\xi^1 = r$ и $\xi^2 = z$. Ковариантные компоненты метрического тензора в недеформированном теле имеют простой вид: $g_{11} = g_{22} = 1$, $g_{33} = r^2$ и $g_{ij} = 0$ $(i \neq j)$; символы Римана — Кристоффеля таковы: $\Gamma_{13}^3 = \Gamma_{31}^3 =$

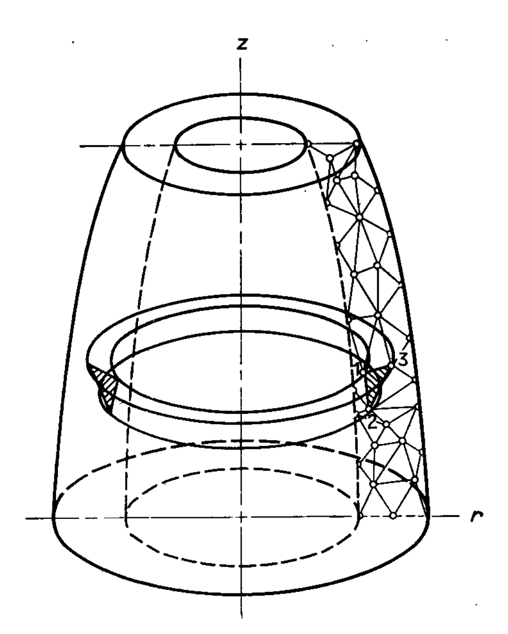


Рис. 18.22. Конечноэлементная модель тела вращения.

$= 1/r$, $\Gamma^1_{33} = -r$, а все остальные $\Gamma^i_{jk} = 0$. Поскольку $u_3 = \partial u_i/\partial \xi^3 = 0$, имеем $u^{\alpha}_{;\beta} = u^{\alpha}_{,\beta} = u_{\alpha,\beta}$. Подставляя все это вместе с (18.53) в (16.192) и производя упрощения, получаем следующие уравнения равновесия для изотропного несжимаемого конечного элемента вращения:

$$\int\limits_{v_{0(e)}} \left\{ 2\frac{\partial \hat{W}}{\partial I_1}\frac{\partial \gamma^{\beta}_{\beta}}{\partial u^N_{\alpha}} + \frac{\partial \hat{W}}{\partial I_2}\frac{\partial \varphi}{\partial u^N_{\alpha}} + \left[\frac{\partial \hat{W}}{\partial I_1} + 2(1+\gamma^{\beta}_{\beta})\frac{\partial \hat{W}}{\partial I_2}\right]\frac{\partial \lambda^2}{\partial u^N_{\alpha}} + \right.$$
$$\left. + 2\frac{\partial \hat{W}}{\partial I_2}\frac{\partial \gamma^{\beta}_{\beta}}{\partial u^N_{\alpha}}\lambda^2 + h\left(\lambda^2\frac{\partial \varphi}{\partial u^N_{\alpha}} + \varphi\frac{\partial \lambda^2}{\partial u^N_{\alpha}}\right)\right\} dv_0 = p_{N\alpha}, \qquad (18.54)$$

где $h = \psi_N h^N$ — гидростатическое давление в конечном элементе и $dv_0 = 2\pi r\, dr\, dz$. Сюда надо еще добавить условия несжимаемости типа (16.54) или (16.62).

Упрощенные формы. В различных рассматриваемых далее приложениях будет использоваться упрощенная форма уравнений (18.54), получаемая при использовании симплексных элементов и соответствующей аппроксимации для λ^2. В случае симплексных элементов $N_e = 3$; гидростатическое давление считается постоянным в каждом элементе, и, как обычно, $u_\alpha = a_N u^N_\alpha + b_{N1} r u^N_\alpha +$

$+ b_{N2}zu_\alpha^N$, где a_N и $b_{N\alpha}$ определяются соотношениями (10.106). Тогда

$$2\gamma_{\alpha\beta} = b_{N\alpha}u_\beta^N + b_{N\beta}u_\alpha^N + b_{N\beta}b_{M\alpha}u^{N\lambda}u_\lambda^M, \tag{18.55а}$$

$$2\gamma_{33} = r^2(\lambda^2 - 1), \tag{18.55б}$$

$$\lambda = 1 + \frac{1}{r}(a_N u_1^N + b_{N\beta}x^\beta u_1^N) \tag{18.55в}$$

и

$$\frac{\partial\gamma_\beta^\beta}{\partial u_\alpha^N} = b_{N\beta}(\delta_\alpha^\beta + b_{M\beta}u_\alpha^M), \tag{18.56а}$$

$$\frac{\partial\lambda^2}{\partial u_\alpha^N} = 2\,\frac{\lambda}{r}\,\delta_{1\alpha}(a_N + b_{N\beta}x^\beta), \tag{18.56б}$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial u_\alpha^N} = 2b_{N\lambda}(\delta_\alpha^\beta + b_{M\beta}u_\alpha^M)[\delta_\lambda^\beta + \gamma_{\rho\mu}(\varepsilon^{\beta\rho}\varepsilon^{\lambda\mu} + \varepsilon^{\rho\lambda}\varepsilon^{\mu\beta})]. \tag{18.56в}$$

К сожалению, интегрирование тех членов в (18.54), которые содержат определяемое формулой (18.55в) относительное окружное удлинение λ, приводит к очень сложным логарифмическим выражениям. Для того чтобы избежать этих сложностей, будем использовать вместо (18.55в) аппроксимацию λ, вычисленную исходя из среднего радиального перемещения по элементу и стремящуюся с уменьшением размеров элемента к точному значению λ:

$$\lambda = 1 + \frac{\bar{u}_1}{\bar{r}}. \tag{18.57}$$

Здесь $\bar{u}_1$ и $\bar{r}$ — среднее радиальное перемещение узлов и средняя радиальная координата узлов:

$$\bar{u}_1 = \frac{1}{3}(u_1^1 + u_1^2 + u_1^3), \quad \bar{r} = \frac{1}{3}(r^1 + r^2 + r^3). \tag{18.58}$$

Относительное удлинение λ считается при этом постоянным в элементе, и вместо (18.56в) мы используем соотношение

$$\frac{\partial\lambda^2}{\partial u_\alpha^N} = 2\,\frac{\lambda}{\bar{r}}(\delta^{N1} + \delta^{N2} + \delta^{N3})\,\delta^{1\alpha}. \tag{18.59}$$

После этих упрощений (18.54) принимает вид

$$2v_0\left\{\left(\frac{\partial\hat{W}}{\partial I_1} + \lambda^2\frac{\partial\hat{W}}{\partial I_2}\right)b_{N\beta}(\delta_\alpha^\beta + b_{M\beta}u_\alpha^M) + \right.$$
$$+\left[\frac{\partial\hat{W}}{\partial I_1} + 2\frac{\partial\hat{W}}{\partial I_2}(1+\gamma_\beta^\beta) + h\varphi\right]\frac{\lambda}{\bar{r}}(\delta^{N1} + \delta^{N2} + \delta^{N3})\,\delta^{1\alpha} +$$
$$\left.+\left(\frac{\partial\hat{W}}{\partial I_2} + h\lambda^2\right)b_{N\lambda}(\delta_\alpha^\beta + b_{M\beta}u_\alpha^M)[\delta_\lambda^\beta + \gamma_{\rho\mu}(\varepsilon^{\beta\rho}\varepsilon^{\lambda\mu} + \varepsilon^{\rho\lambda}\varepsilon^{\mu\beta})]\right\} = p_{N\alpha}, \tag{18.60}$$

где $v_0 = 2\pi\bar{r}A_0$, а A_0 — площадь недеформированного поперечного сечения элемента. Узловые силы вычисляются с помощью способов, описанных в п. 16.3. Например, при действии на границу элемента равномерных нормальных усилий интенсивности q мы в соответствии с (16.118) используем

$$p_{1\alpha} = p_{2\alpha} = (-1)^{(\alpha)}\,\varepsilon_{\beta\alpha}\frac{1}{2}\,q\pi\,(\xi_1^2 + \xi_1^1 + u_1^1 + u_1^2)\,\varepsilon_{\alpha\beta}L_*^\beta, \tag{18.61}$$

где $L_*^\beta = L_\beta^*$ — проекции линии, соединяющей узлы 1 и 2 на оси ξ_β после деформации ($\xi_1 = r$, $\xi_2 = z$).

Поскольку (18.60) представляет собой систему шести уравнений относительно семи неизвестных $h_{(e)}$ и u_α^N, надо еще записать условие несжимаемости для элемента. Оно получается простым приравниванием друг другу объемов деформированного и недеформированного элементов:

$$v(\mathbf{u}^N) - v_0 = 0. \tag{18.62}$$

Здесь

$$v_0 = 2\pi\bar{r}A_0 \qquad \text{и} \qquad v = 2\pi(\bar{r} + \bar{u}_1)\,A; \tag{18.63}$$

$\bar{u}_1$ и $\bar{r}$ определяются по формулам (18.58), а A и A_0 суть площади деформированного и недеформированного поперечных сечений кольцевых элементов:

$$A_0 = \left|\frac{1}{2}\sum_{P=1}^{3}\varepsilon_{MNP}\varepsilon^{\alpha\beta 3}x_\alpha^M x_\beta^N\right|, \tag{18.64а}$$

$$A = \left|\frac{1}{2}\sum_{P=1}^{3}\varepsilon_{MNP}\varepsilon^{\alpha\beta 3}(x_\alpha^M + u_\alpha^M)(x_\beta^N + u_\beta^N)\right|. \tag{18.64б}$$

Задача о бесконечном цилиндре. Сначала рассмотрим конечные осесимметричные деформации бесконечно длинного толстостенного цилиндра, нагруженного внутренним давлением. Эта задача представляет особый интерес, поскольку здесь мы имеем один из немногих случаев, когда результаты можно сравнить с известными точными решениями [1]), и, кроме того, эта задача одномерна, что позволяет записать нелинейные жесткостные соотношения в особенно простой форме.

Для описания осесимметричных (радиальных) деформаций можно построить конечноэлементную модель тонкого диска, используя рассмотренные ранее треугольные конечные элементы вращения, как показано на рис. 18.23а. Хотя задачу можно существенно упростить, если приравнять радиальные перемещения расположенных на одной вертикали друг против друга узлов I и I', метод конечных элементов подвергнется гораздо более суровому испытанию, если допустить независимые перемещения всех узлов в радиальных направлениях. При этом модель из E конечных элементов приводит к $2E + 2$ нелинейным уравнениям относительно $E + 2$ неизвестных узловых перемещений и E гидростатических давлений в элементах.

---

[1]) Грин и Зерна [1968].

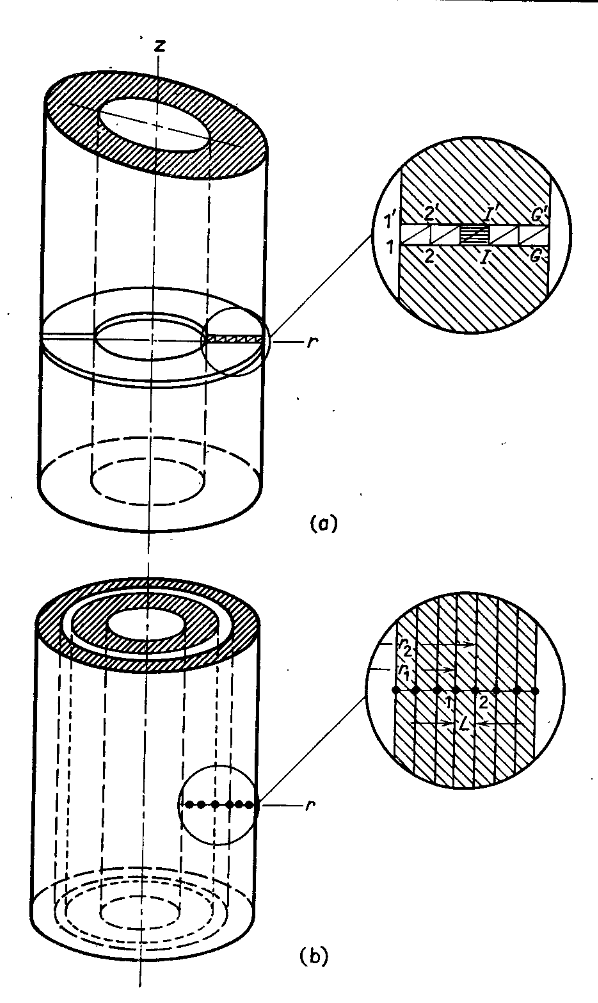


Рис. 18.23. Конечноэлементные представления бесконечного цилиндра.

В качестве первого примера рассмотрим полый цилиндр из материала Муни с $C_1 = 80$ фунт/дюйм², $C_2 = 20$ фунт/дюйм², внутренний радиус которого 7.00 дюйма, а наружный — 18.625 дюйма. Цилиндр нагружен внутренним давлением $p = 128.2$ фунт/дюйм² [1]). Эпюры перемещений и гидростатического давления для случая $E = 10$ (22 неизвестных) представлены на рис. 18.24. Видно, что при таком довольно грубом представлении есть незначительная разница в величине узловых радиальных перемещений вертикально противолежащих узлов. А именно, в случае 10 элементов эта разница

[1]) Точное решение для такого цилиндра получено Балтруконисом и Вайшнавом [1965].

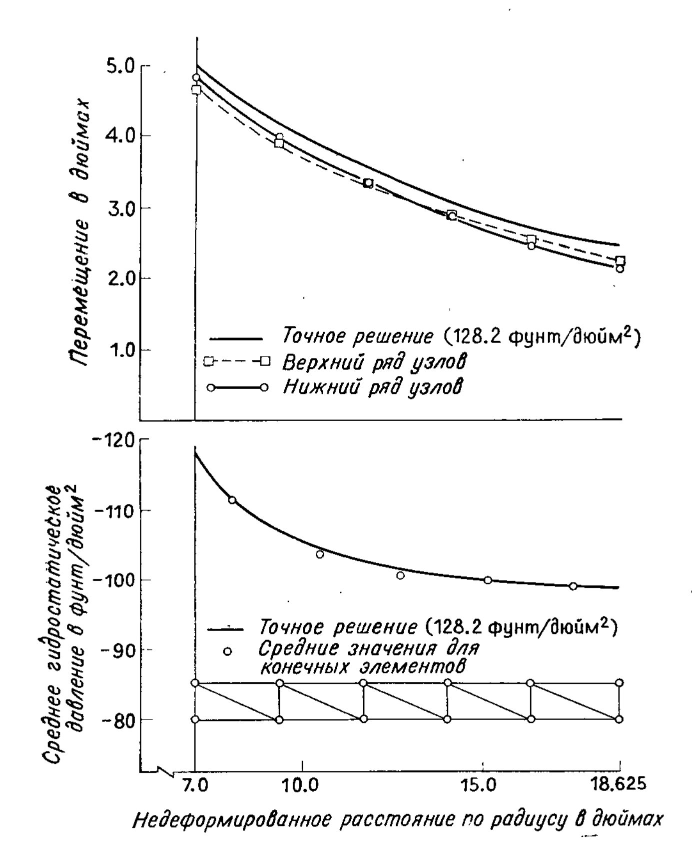


Рис. 18.24. Эпюры перемещения и гидростатического давления.

достигает 5%, но средние значения перемещений верхних и нижних узлов отличаются от точных лишь на 1%. При такой крупной конечноэлементной сетке гидростатические давления в элементах являются лишь весьма грубыми средними значениями. Значения, отмеченные на рисунке, получены осреднением гидростатических давлений в соседних (верхних и нижних) элементах, причем предполагается, что эти значения гидростатическое давление принимает в средних по радиусу точках между узлами. Для решения системы нелинейных уравнений, полученных в этом примере, использовался метод последовательных нагружений, описанный в п. 17.5. На рис. 18.25 представлены напряжения в элементах, полученные осреднением главных напряжений в соседних по вертикали элементах, для модели, состоящей из 20 элементов. Видно, что результаты очень хорошо согласуются с точным решением.

Другая конечноэлементная модель задачи о бесконечном цилиндре получается при использовании тонких цилиндрических конечных элементов, показанных на рис. 18.23, *b*. Хотя численные результаты для этой новой модели практически совпадают с результатами для моделей типа показанной на рис. 18.23, *a*, жесткостные соотношения, выведенные из одномерных кине-

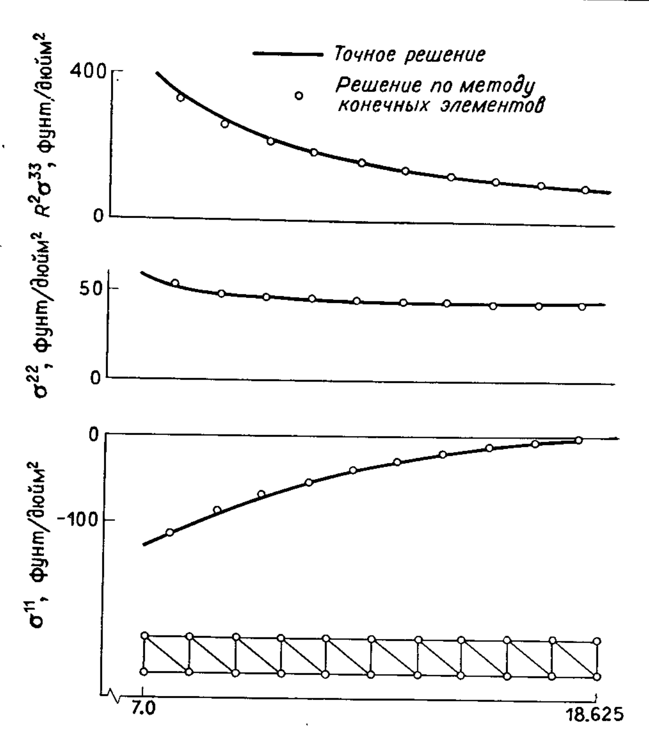


Рис. 18.25. Напряжения в цилиндре.

матических соотношений, гораздо проще соотношений, соответствующих двумерным элементам.

Для одномерного элемента единичной высоты из материала Муни нелинейные жесткостные соотношения таковы:

$$p_N^1 = 2\pi (r_2^2 - r_1^2) \left\{ \frac{\Delta}{L_0} (\varepsilon^{1N} + \varepsilon^{2N}) [C_1 + C_2 (1 + \lambda^2) + \lambda^2 h] + \right.$$
$$\left. + \frac{\lambda}{\bar{r}} [C_1 + C_2 (1 + \Delta^2) + \Delta^2 h] \right\}, \qquad (18.65)$$

где

$$\bar{r} = \frac{1}{2}(r_1 + r_2), \qquad L_0 = r_2 - r_1 \qquad (18.66)$$

и

$$\Delta = \frac{L}{L_0} = 1 + \frac{u_1^2 - u_1^1}{L_0}, \qquad \lambda \approx 1 + \frac{u_1^1 + u_1^2}{2\bar{r}}. \qquad (18.67)$$

Условие несжимаемости для этого случая записывается так:

$$1 = \lambda^2 \Delta^2, \qquad (18.68)$$

а обобщенная сила в узле на внутренней или внешней границе, обусловленная соответственно внутренним или внешним давлением p, равна

$$p_N^1 = \pm 2\pi (r_N + u_1^N)\, p, \qquad (18.69)$$

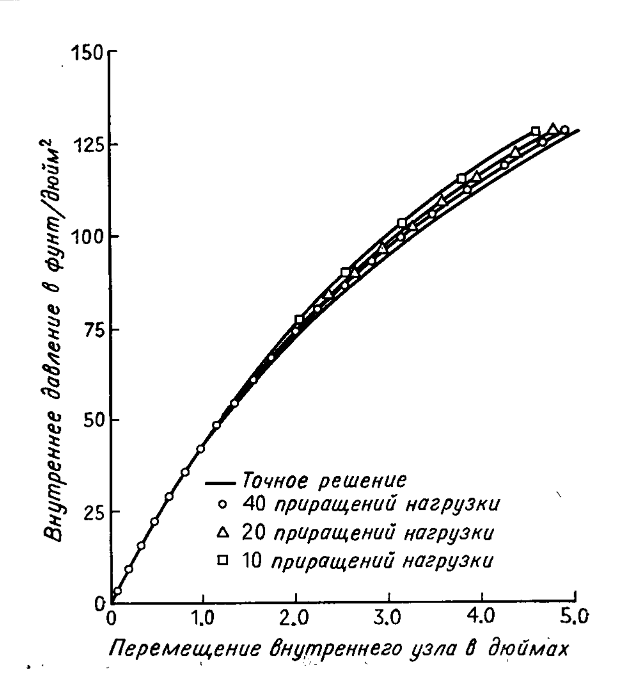


Рис. 18.26. Кривые зависимости между давлением и перемещением, полученные методом последовательных нагружений.

где положительный знак отвечает случаю, когда p — внутреннее давление (N — узел на внутренней границе), а отрицательный знак отвечает внешнему давлению (N — узел на наружной границе).

На рис. 18.26—18.30 представлены численные результаты, полученные при решении приведенной выше задачи для толстостенного цилиндра ($r_{\text{внутр}} = 7.00$ дюйма, $r_{\text{нар}} = 18.625$ дюйма, $C_1 = 80$ фунт/дюйм², $C_2 = 20$ фунт/дюйм²) с помощью уравнений (18.65) — (18.69). Решения получены для различных значений внутреннего давления в диапазоне от 0 до 150 фунт/дюйм². Для этого материала при внутреннем давлении 150 фунт/дюйм² возникают деформации порядка 150%, так что поведение цилиндра не может быть описано в рамках классической теории малых деформаций.

Система нелинейных уравнений решалась описанным в п. 17.5 методом последовательных нагружений. На рис. 18.26 изображена зависимость внутреннего давления от радиального перемещения внутреннего узла, полученная при нагружении соответственно в 10, 20 и 40 этапов для девяти конечных элементов. Для давлений менее 100 фунт/дюйм² при 40 этапах нагружения ошибка накапливается сравнительно малая.

Чтобы читатель мог составить представление о скорости сходимости конечноэлементных решений, на рис. 18.27 показаны отношение перемещения внутренней поверхности цилиндра к его точному значению и отношение гидростатического давления в примыкающем к внутренней границе элементе к среднему на элементе точному значению гидростатического давления в зависимости от числа элементов. Как и следовало ожидать, конечноэлементная

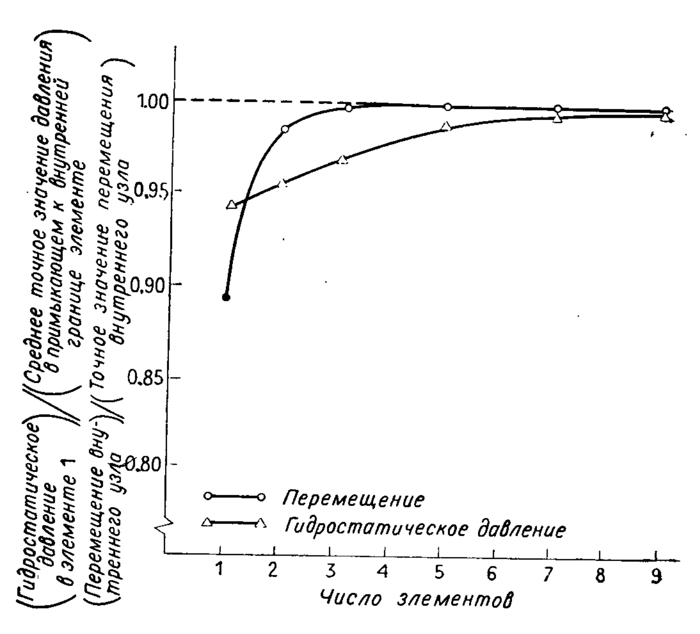


Рис. 18.27. Сходимость конечноэлементных решений.

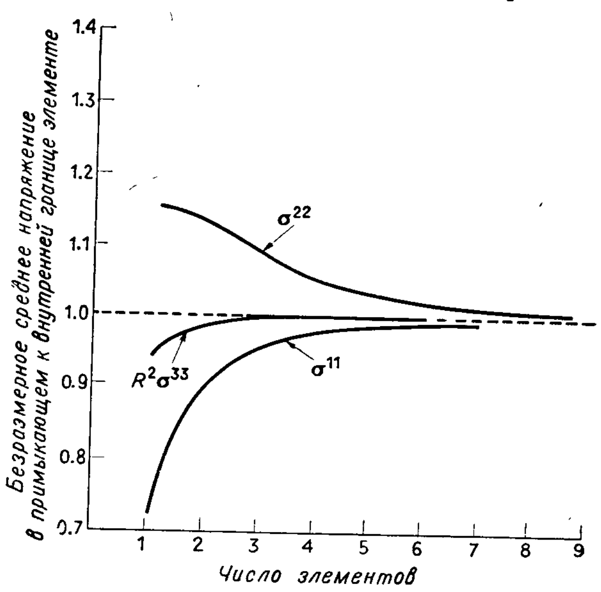


Рис. 18.28. Сходимость напряжений в элементе, примыкающем к внутренней границе.

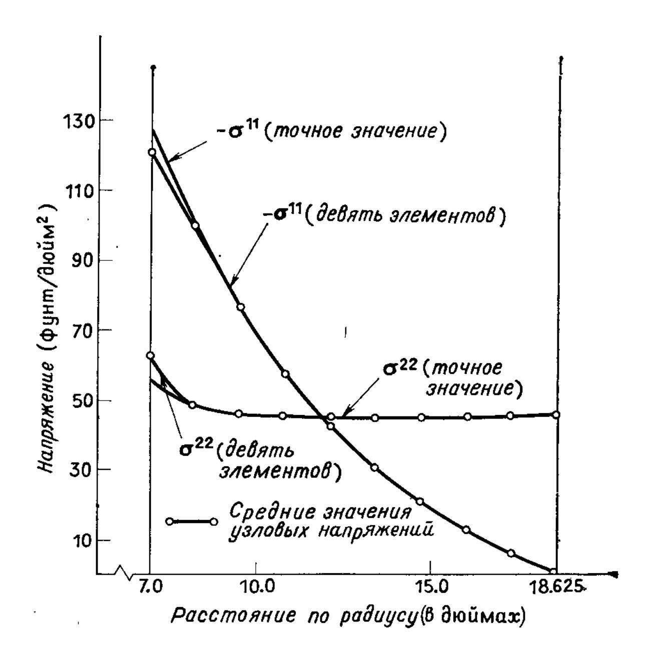


Рис. 18.29. Эпюры напряжений σ^{11} и σ^{22}.

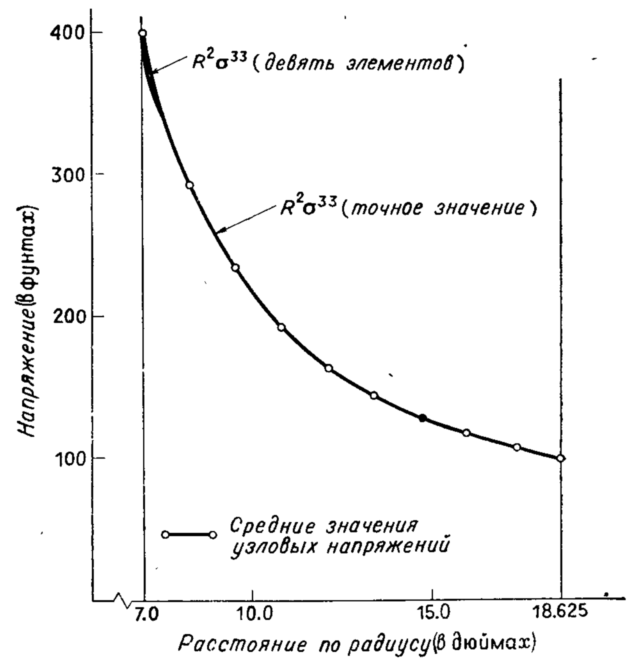


Рис. 18.30. Эпюры величины, пропорциональной напряжению σ^{33}.

модель цилиндра жестче самого цилиндра. Перемещение внутреннего узла быстро и монотонно сходится снизу к точному значению. Гидростатические давления сходятся, конечно, медленнее, но уже для пяти элементов они отличаются от точных значений всего на 1.5%.

Довольно быстрая монотонная сходимость гидростатического давления на рис. 18.27 не может, однако, служить указанием на сходимость напряжений в элементах, даже несмотря на то что доля гидростатического давления в окончательных значениях напряжений может быть весьма значительной. Максимальная разница между точными значениями напряжений и вычисленными по методу конечных элементов имеет место в первом (ближайшем к внутренней границе) элементе. На рис. 18.28 представлено отношение напряжений в этом элементе к точным средним по элементу значениям в зависимости от числа элементов. Мы видим, что сходимость не для всех компонент является монотонной снизу, и не для всех компонент она такая же быстрая, как для гидростатического давления. Тем не менее для девятиэлементного приближения, как видно из рис. 18.29 и 18.30, эпюры напряжений, подсчитанные методом конечных элементов, хорошо согласуются с точными эпюрами.

Толстостенный сосуд. Рассмотрим осесимметричные деформации толстостенного несжимаемого упругого сосуда, изображенного на рис. 18.31. Материал опять считаем материалом типа Муни с постоянными $C_1 = 80$ фунт/дюйм^2 и $C_2 = 20$ фунт/дюйм^2. Сосуд нагружен внутренним давлением 190 фунт/дюйм^2 по границе BC. Часть границы AB свободна от нагрузок. Размеры недеформированного тела указаны на рисунке.

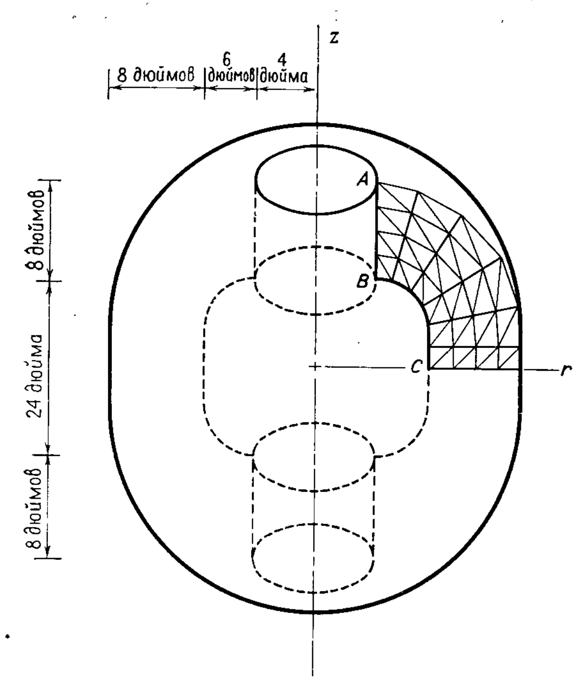


Рис. 18.31. Толстостенный высокоэластичный сосуд, нагружаемый внутренним давлением.

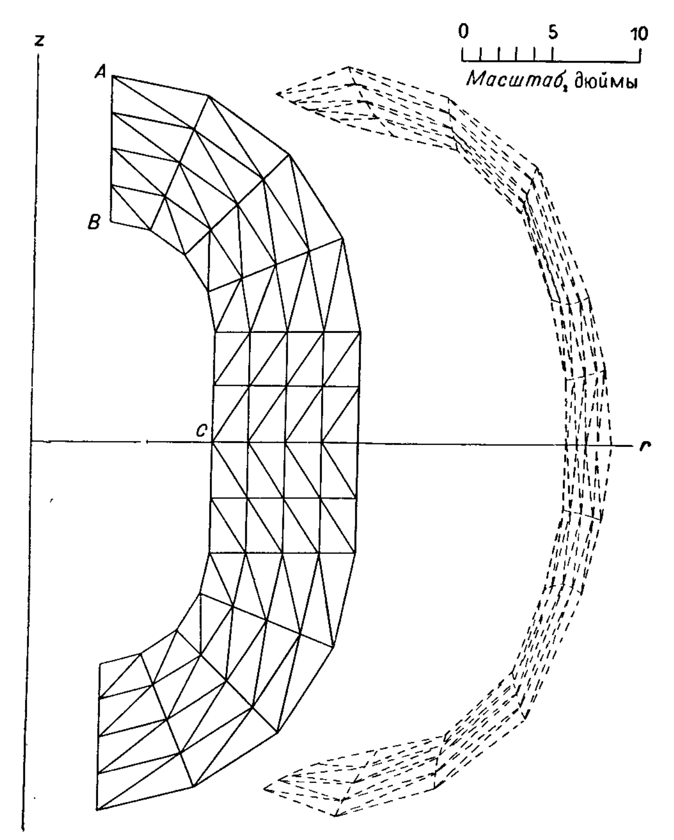


Рис. 18.32. Недеформированное и деформированное сечения сосуда (в масштабе).

Вследствие симметрии достаточно рассмотреть только один квадрант. Конечноэлементная модель состоит из 48 элементов, соединенных друг с другом в 35 узловых точках. При заданных краевых условиях имеем 113 неизвестных: 48 гидростатических давлений в элементах и 65 компонент узловых перемещений. При использовании этой конечноэлементной модели для каждого элемента получаем нелинейные жесткостные соотношения полиномиального вида, содержащие шестые степени неизвестных узловых перемещений и гидростатических давлений.

Для решения системы нелинейных уравнений использовался метод последовательных нагружений, причем нагрузка задавалась в девятнадцать этапов приращениями по 10 фунтов. В рекуррентных формулах использовались приближенные значения градиентов, вычисленные по конечноразностным формулам с шагом $\Delta X_i = 0.0001$.

Деформированная и недеформированная совокупности конечных элементов показаны в масштабе на рис. 18.32. Поскольку объемы конечных элементов не изменяются, большое увеличение радиуса приводит к значительному уменьшению площади поперечного сечения. Видно, что прямые

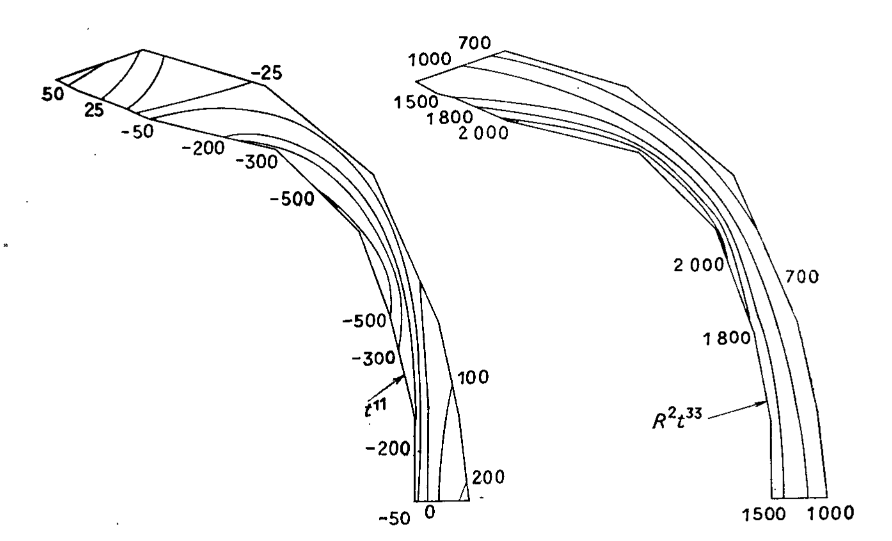


Рис. 18.33. Линии уровня радиальных напряжений t^{11} и окружных «напряжений» R^2t^{33} (в фунт/дюйм^2 и фунтах соответственно).

радиальные линии в недеформированном теле существенно искривляются в процессе деформации. Как и следовало ожидать, максимальные деформации и напряжения возникают в прилежащих к внутренней границе элементах вблизи соединения цилиндрической и тороидальной частей сосуда. Максимальные окружные деформации имеют порядок 400%. Величины напряжений в элементах получены способом, описаниым в п. 16.3. Линии уровня для компонент напряжений t^{11} и R^2t^{33} представлены на рис. 18.33.

На рис. 18.34 показано деформированное тело после 14, 17 и 19 этапов нагружения (соответствующие величины внутренних давлений: 140, 170

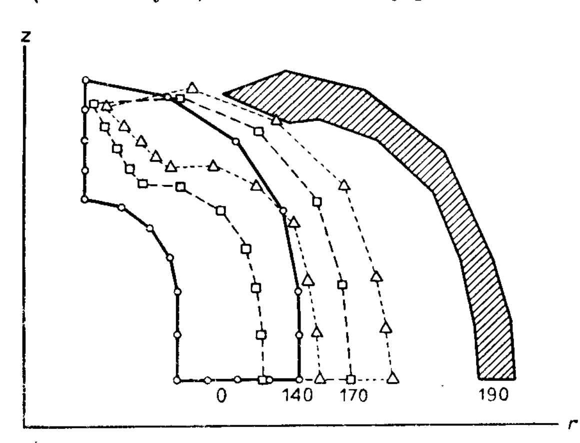


Рис. 18.34. Деформированные сечения сосуда для величин внутреннего давления 0, 140, 170 и 190 фунт/дюйм^2.

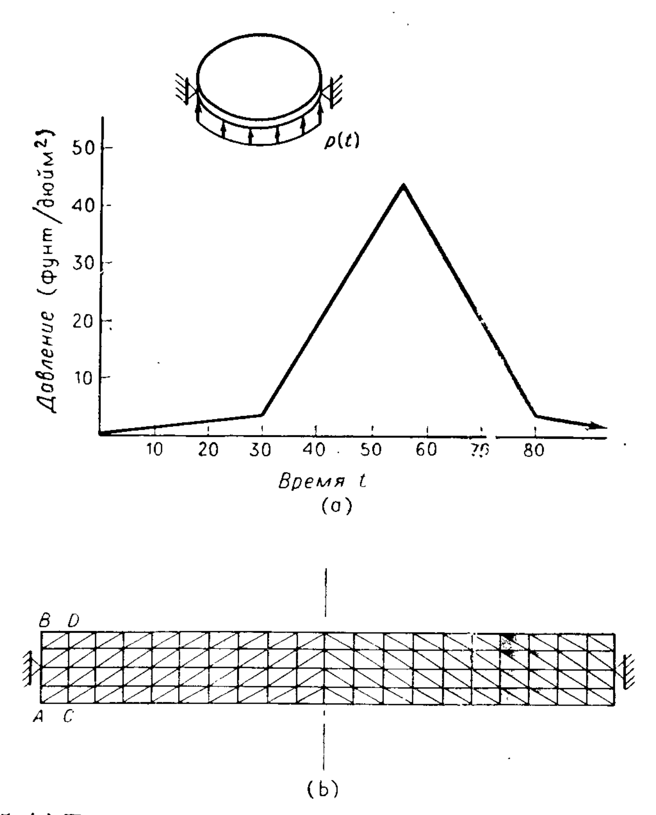


Рис. 18.35. (a) Процесс нагружения первоначально плоской круговой пластины. (b) Конечноэлементная модель пластины.

и 190 фунт/дюйм²). Для исследования поведения при более высоких давлениях было осуществлено 11 дополнительных нагружений по 10 фунт/дюйм² с доведением давления до 300 фунт/дюйм². Наблюдалось радикальное изменение формы на каждом таком этапе после 190 фунт/дюйм², что указывает на ярко выраженное уменьшение жесткости при увеличении нагрузки. При давлении 300 фунт/дюйм² деформации получились совершенно нереально большими, а площади поперечного сечения некоторых элементов почти обратились в нуль. Это означает, что для получения правдоподобных деформаций при давлениях выше 190 фунт/дюйм² надо давать меньшие приращения нагрузки.

Изгиб и раздувание круговой пластины[1]. Одно из интересных приложений метода конечных элементов к исследованию осесимметричных тел связано с изучением квазистатического поведения свободно опертой круговой пластины под действием меняющегося по кусочно-линейному закону внешнего давления (см. рис. 18.35a). Недеформированная пластина диаметром 15 дюймов и толщиной 0.5 дюйма изготовлена из изотропного несжи-

[1]) Здесь воспроизводятся результаты, полученные Оденом и Ки [1971a].

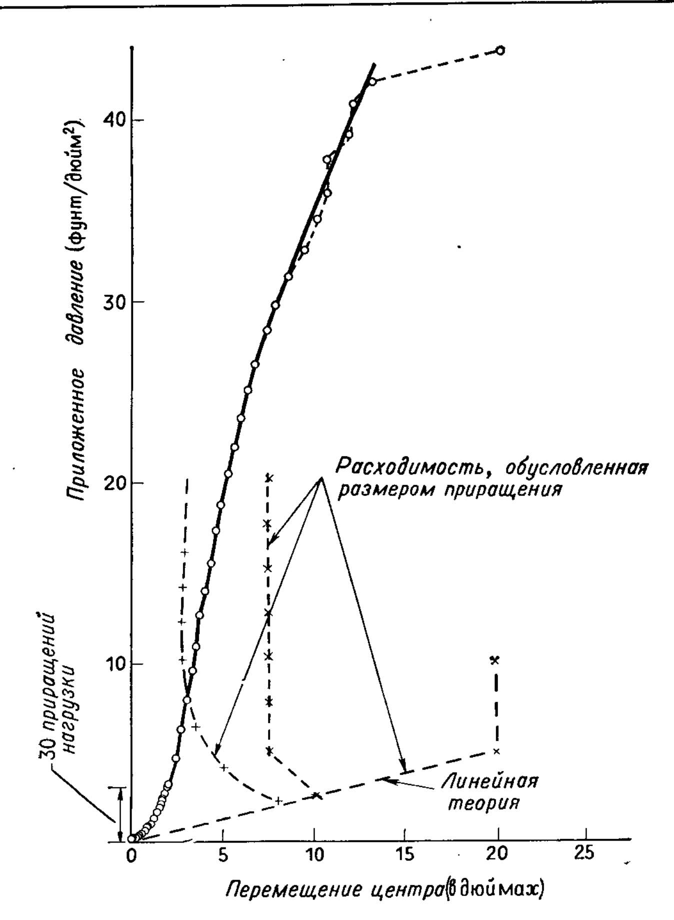


Рис. 18.36. Зависимость поперечного перемещения центра пластины от величины приложенного давления.

маемого материала типа Муни с постоянными $C_1 = 80$ фунт/дюйм^2 и $C_2 = 20$ фунт/дюйм^2. Конечноэлементная модель пластины изображена на рис. 18.35, *b*; отметим, что для наглядности на этом рисунке толщина преувеличена. Исследование проводилось описанным ранее методом последовательных нагружений. Внешнее давление прилагалось в виде отдельных приращений (один этап нагружения соответствует единице времени на рис. 18.35,*а*) от 0 фунт/дюйм^2 до максимального значения 43.7 фунт/дюйм^2. Разгрузка пластины осуществлялась по тому же закону в обратном порядке. Заметим, что внешние нагрузки в этой задаче неконсервативны; поверхность нагружаемых элементов при увеличении давления существенно меняется и по площади, и по ориентации.

Предварительные исследования задачи вскрыли чрезвычайную зависимость предсказываемого поведения от выбора размеров приращения нагрузки. Это иллюстрируется рис. 18.36, где показана зависимость поперечного перемещения центра пластины от величины давления. Видно, что поведение

быстро отклоняется от пресказываемого линейной теорией после достижения давления всего лишь 1 фунт/дюйм^2. Далее кривая идет вверх почти линейно при изменении давления от 3 до 28 фунт/дюйм^2, а при дальнейшем повышении давления наклон постепенно снижается. Поскольку трудно, если вообще возможно, предвидеть такое поведение до выбора размера приращения, вначале было получено несколько пробных решений с помощью грубых конечноэлементных моделей для различных постоянных приращений. Эти решения изображены на рисунке пунктирными линиями. Характерным для слишком большой величины приращения является большое перемещение на начальном этапе без последующего увеличения перемещений некоторых узлов при неограниченном возрастании давления. Кроме того, нарушается локальное равновесие сил в элементах и конечноэлементная модель претерпевает нереалистичные искажения. В рассматриваемой задаче для описания поведения пластины при давлении всего лишь 3 фунт/дюйм^2 пришлось использовать 30 приращений нагрузки; дальнейшее же повышение давления до 40 фунт/дюйм^2 было осуществлено за 25 этапов.

Рассчитать поведение пластины при давлении, превышающем 42 фунт/дюйм^2, оказалось невозможным без модификации конечноэлементной модели. Это связано с численной неустойчивостью процесса последовательных нагружений и с несжимаемостью элементов; при деформациях порядка 500% площади поперечных сечений некоторых конечных элементов почти обращаются в нуль, поскольку объем кольцевых элементов не меняется, и это приводит к плохой обусловленности матриц Якоби. Для того чтобы преодолеть это затруднение, необходимо до наступления неустойчивости приостановить процесс последовательных нагружений и построить новую, улучшенную конечноэлементную модель деформированного тела. Начальные значения узловых перемещений для новой модели можно получить линейной или квадратичной интерполяцией результатов, вычисленных по первоначальной модели. При этом целесообразно перед возобновлением процесса последовательных нагружений осуществить несколько итерационных циклов Ньютона — Рафсона для дальнейшего уточнения узловых перемещений и гидростатических давлений.

Предположение о несжимаемости материала в задачах такого типа может приводить и к другим трудностям при проведении расчетов. Предположим, например, что край AB (см. рис. 18.35b) защемлен, а не свободно оперт и что пластина нагружается внешним давлением по изображенной на рис. 18.35а программе. При малом увеличении давления узловые точки, расположенные, скажем, на CD, будут перемещаться приблизительно вертикально, так что все элементы в прямоугольнике $ABCD$ будут приближенно, в состоянии однородного чистого сдвига. Поэтому любые величины вертикальных перемещений лежащих на CD узлов приведут к изохорическим (сохраняющим объем) деформациям. Следовательно система нелинейных уравнений (уравнения равновесия и условия несжимаемости) не будет иметь единственного решения. Если возможно в таких случаях переписать исходные уравнения так, чтобы получить «детерминированную» систему, то указанных неприятностей можно избежать, используя другие конечноэлементные модели, как правило с элементами неправильной формы на границах.

Результаты расчета деформированной конечноэлементной модели пластины для различных значений действующего давления представлены на рис. 18.37. Видно, что в рассмотренном примере линейная теория дает удовлетворительные результаты только примерно до восьми приращений нагрузки по 0.1 фунт/дюйм^2. При давлениях приблизительно от 0.8 до 1.0 фунт/дюйм^2 растягивающие деформации все еще малы, но повороты уже становятся ощутимыми. Деформации остаются малыми (менее 5%) вплоть до того, как давление достигает величины примерно 4.0 фунт/дюйм^2. При этом уровне давления повороты некоторых элементов достигают 50°. Сдвиговые и поперечные деформации при нагрузке такого уровня малы; первоначально нор-

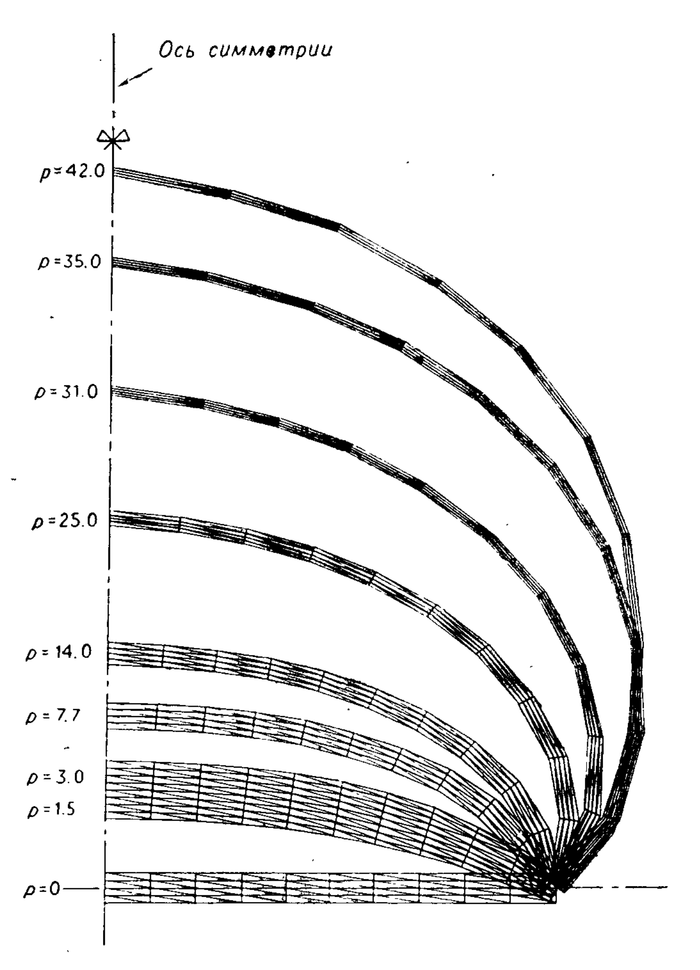


Рис. 18.37. Деформированные конечноэлементные модели круговой пластины при различных значениях внешнего давления.

мальные к недеформированной срединной поверхности прямые линии все еще остаются почти прямыми и нормальными к деформированной срединной поверхности, т. е. гипотезы Кирхгофа — Лява справедливы при относительно больших перемещениях.

Эти результаты показывают, что нелинейные теории пластин типа теории Фёппля — Кармана (т. е. основанные на гипотезах Кирхгофа нелинейные теории, в которых деформации считаются бесконечно малыми при поворотах средней величины) в нашем случае можно было бы считать удовлетворительными для давлений примерно до 4.0 фунт/дюйм^2. После 4.0 фунт/дюйм^2 повороты становятся совсем большими, а при 6.0—8.0 фунт/дюйм^2 растягивающие деформации срединной поверхности достигают величины около 20%. При этом уровне нагрузки в поведении пластины начинает преобла-

дать мембранный характер, т. е. она больше раздувается, чем изгибается. При 25 фунт/дюйм² поперечные деформации достигают 20%, а повороты некоторых элементов превышают 90°. При максимальном давлении в 43.7 фунт/дюйм² возникают деформации порядка 500%, элементы вблизи опоры поворачиваются на 128°, толщина пластины уменьшается с 0.5 дюйма до примерно 0.15 дюйма и пластина принимает сильно искаженную форму, показанную на рисунке.

18.3. КОНЕЧНАЯ ПЛОСКАЯ ДЕФОРМАЦИЯ

Теорию конечной плоской деформации изотропных гиперупругих тел можно трактовать как частный случай обсуждавшейся в предыдущем пункте теории для осесимметричных тел. Рассмотрим однородное твердое тело в условиях плоской деформации, параллельной плоскости x^1, x^2. Кроме того, тело может быть подвергнуто равномерному растяжению в направлении оси x^3, характеризуемому относительным удлинением λ. Тогда $\gamma_{\alpha\beta}$ определяются формулами (18.48а), $\gamma_{\alpha 3} = 0$ и $\gamma_{33} = \frac{1}{2}(\lambda^2 - 1)$, где теперь λ — известная постоянная. Главные инварианты тензора меры деформации имеют вид

$$I_1 = 2(1 + \gamma_\alpha^\alpha) + \lambda^2,$$
$$I_2 = 1 + 2\lambda^2 + 2(1 + \lambda^2)\gamma_\alpha^\alpha + \hat{\varphi}, \tag{18.70}$$
$$I_3 = \lambda^2(1 + 2\gamma_\alpha^\alpha + \hat{\varphi}),$$

где $\gamma_\alpha^\alpha = \gamma_{\alpha\alpha} = \gamma_{11} + \gamma_{22}$ и

$$\hat{\varphi} = 4(\gamma_{11}\gamma_{22} - \gamma_{12}\gamma_{21}) = 2\varepsilon^{\alpha\lambda}\varepsilon^{\beta\mu}\gamma_{\alpha\beta}\gamma_{\lambda\mu}. \tag{18.71}$$

При изохорических деформациях $I_3 = 1$ и (18.70) можно переписать так:

$$I_1 = c - \hat{\varphi},$$
$$I_2 = c - \lambda^2\hat{\varphi}, \tag{18.72}$$

где

$$c = 1 + \lambda^2 + \frac{1}{\lambda^2} = \text{const}. \tag{18.73}$$

Следовательно, для изотропных несжимаемых тел при конечной плоской деформации

$$t^{\alpha\beta} = 2\frac{\partial\hat{W}}{\partial I_1}\delta^{\alpha\beta} + 2\frac{\partial\hat{W}}{\partial I_2}\left[\delta^{\alpha\beta}\left(\lambda^2 + \frac{1}{\lambda^2}\right) + \frac{1}{2}\frac{\partial\hat{\varphi}}{\partial\gamma_{\alpha\beta}}\right] + h\left(\delta^{\alpha\beta} + \frac{1}{2}\frac{\partial\hat{\varphi}}{\partial\gamma_{\alpha\beta}}\right), \tag{18.74а}$$

$$t^{\alpha 3} = 0, \tag{18.74б}$$

$$t^{33} = 2\lambda^2\frac{\partial\hat{W}}{\partial I_1} + 4\lambda^2\frac{\partial\hat{W}}{\partial I_2}(1 + \gamma_\alpha^\alpha) + h. \tag{18.74в}$$

Конечноэлементные приближения [1]). Следуя обычной процедуре, получаем уравнения равновесия изотропного несжимаемого конечного элемента при плоской деформации в виде

$$2\int\limits_{v_{0(e)}} (\delta_{\beta\alpha}+\psi_{M,\beta}u_\alpha^M)\left\{\psi_{N,\beta}\left[\frac{\partial\hat{W}}{\partial I_1}+(1+\lambda^2)\frac{\partial\hat{W}}{\partial I_2}+\lambda^2 h\right]+\right.$$
$$\left.+2\left(\frac{\partial\hat{W}}{\partial I_2}+\lambda^2 h\right)\varepsilon^{\nu\mu}\varepsilon^{\lambda\beta}\psi_{N,\mu}\gamma_{\mu\lambda}\right\}dv_0=p_{N\alpha}. \quad (18.75)$$

Для симплексных аппроксимаций (18.75) сводится к

$$2v_{0(e)}(\delta_{\beta\alpha}+b_{M\beta}u_\alpha^M)\left\{b_{N\beta}\left[\frac{\partial\hat{W}}{\partial I_1}+(1+\lambda^2)\frac{\partial\hat{W}}{\partial I_2}+\lambda^2 h\right]+\right.$$
$$\left.+2\left(\frac{\partial\hat{W}}{\partial I_2}+\lambda^2 h\right)\varepsilon^{\nu\mu}\varepsilon^{\lambda\beta}b_{N\mu}\gamma_{\nu\lambda}\right\}=p_{N\alpha}. \quad (18.76)$$

Условие несжимаемости имеет простой вид

$$A_0=A, \quad (18.77)$$

где A_0 и A определяются по формулам (18.64). Предполагается, что величина λ задана заранее. Обобщенные силы определяются с помощью методики, описанной в п. 16.3. Для равномерно распределенных нормальных усилий $p_{N\alpha}$ задается формулой (18.61).

Чистый и обобщенный сдвиг. Сначала рассмотрим примеры применения уравнений (18.76) к ряду довольно простых задач о конечной плоской деформации, для которых известны точные решения.

Для удобства будем считать, что функция энергии деформации материала имеет вид Муни. Классическая задача о чистом сдвиге представляет собой задачу о конечных плоских деформациях прямоугольного блока, в котором прямые линии, параллельные, скажем, оси x_1, перемещаются относительно друг друга в направлении оси y_1, оставаясь при этом прямыми и параллельными в деформированном теле. Образец в форме куба, претерпевающий чистый сдвиг, показан на рис. 18.38.

Пусть A, B, C и D — угловые точки образца, и пусть Δ — полное горизонтальное перемещение точек A и B относительно точек C и D. Предполагая, что $\lambda=1$, и используя конечноэлементную модель, изображенную на рис. 18.38b, найдем, что для k-го элемента на прямой AC (заштрихованного на вынесенной увеличенной части модели)

$$[b_{N\alpha}]=n\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & -1\\ 1 & 0\end{bmatrix} \quad (18.78)$$

и

$$u^1_{1(k)}=\frac{k\Delta}{n}, \qquad u^2_{1(k)}=u^3_{1(k)}=\frac{(k-1)\Delta}{n},$$
$$u^1_{2(k)}=u^2_{2(k)}=u^3_{3(k)}=0. \quad (18.79)$$

Нетрудно подсчитать, что $\gamma_{11}=\gamma_{23}=\gamma_{33}=0$, $\gamma_{12}=\gamma_{21}=\Delta/2$ и $\gamma_{22}=$ $=\Delta^2/2$. Таким образом, компоненты деформации не зависят от n (и k) и для

[1]) См. Оден [1968б].

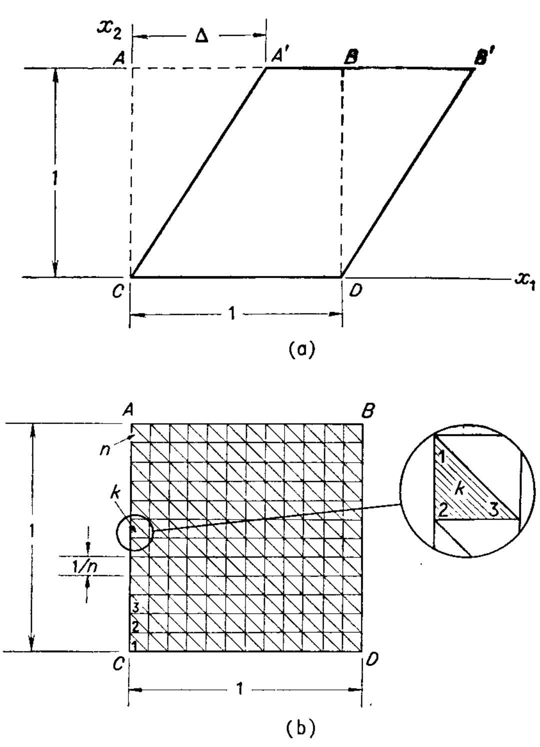


Рис. 18.38. (a) Деформация чистого сдвига. (b) Конечноэлементная модель квадратного образца.

всех элементов модели получаются одни и те же результаты, какое бы число элементов ни использовалось. Это, конечно, немедленно следует из того, что при чистом сдвиге все элементы находятся в условиях однородной деформации, а это тот самый вид деформации, который был принят при выводе жесткостных соотношений для конечных элементов. Итак, *симплексное конечноэлементное решение в случае чистого сдвига является точным.*

Для материала Муни находим

$$
\begin{aligned}
t^{11} &= 2C_1 + 2C_2(2 + \Delta^2) + p(1 + \Delta^2),\\
t^{12} &= -(2C_2 + p)\,\Delta,\\
t^{33} &= 2C_1 + 4C_2 + p.
\end{aligned}
\tag{18.80}
$$

Условие несжимаемости удовлетворяется автоматически (деформация изохорична), и значения напряжений совпадают с точными значениями[1]).

При обобщенном сдвиге стороны AC и BD нашего образца могут деформироваться произвольным образом (рис. 18.39). Как показали Грин и Адкинс [1960, стр. 142], для несжимаемого изотропного тела с функцией энергии деформации Муни кривая AC (и BD) в деформированном состоянии является

[1]) Грин и Адкинс [1960].

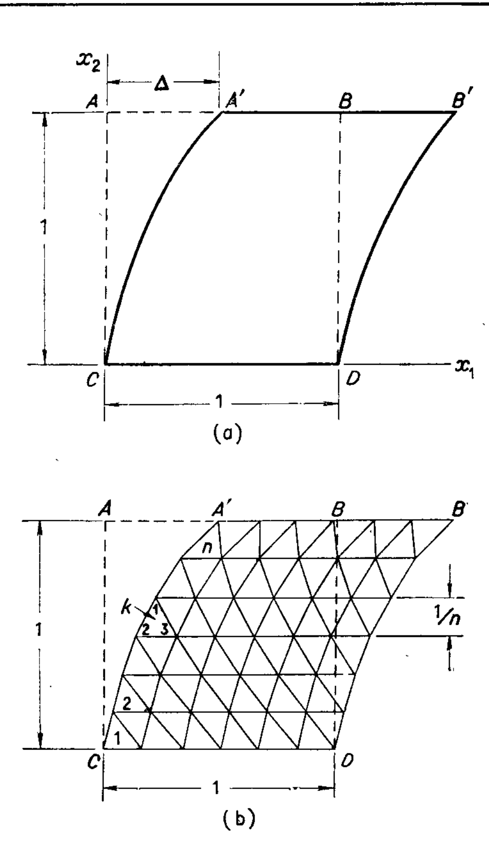


Рис. 18.39. (а) Деформация обобщенного сдвига. (b) Деформированная конечноэлементная модель.

квадратичной параболой. Интересные результаты получаются при решении этой задачи методом конечных элементов, если перемещения узловых точек на линиях, параллельных AC, задать так, чтобы они лежали на параболе. Деформированная конечноэлементная модель из $2n^2$ элементов (n точек разбиения вдоль каждой стороны) изображена на рис. 18.39b.

Для k-го элемента

$$u^1_{1(k)}=\Delta\left(\frac{k}{n}\right)^2,\qquad u^2_{1(k)}=u^3_{1(k)}=\Delta\left(\frac{k-1}{n}\right)^2,$$
$$\gamma_{12}=\frac{\Delta}{2}\left(\frac{2k}{n}-\frac{1}{n}\right),\qquad \gamma_{22}=\frac{\Delta^2}{2}\left[\left(\frac{2k}{n}\right)^2-\frac{2k}{n^2}+\frac{1}{n^2}\right]. \tag{18.81}$$

Остальные компоненты равны нулю. Напряжения вычисляются так же, как и ранее. Например, для компоненты t^{11} в элементе k находим

$$t^{11}=2C_1+4C_2+p+(2C_2+p)\frac{\Delta^2}{n^2}(2k-1)^2. \tag{18.82}$$

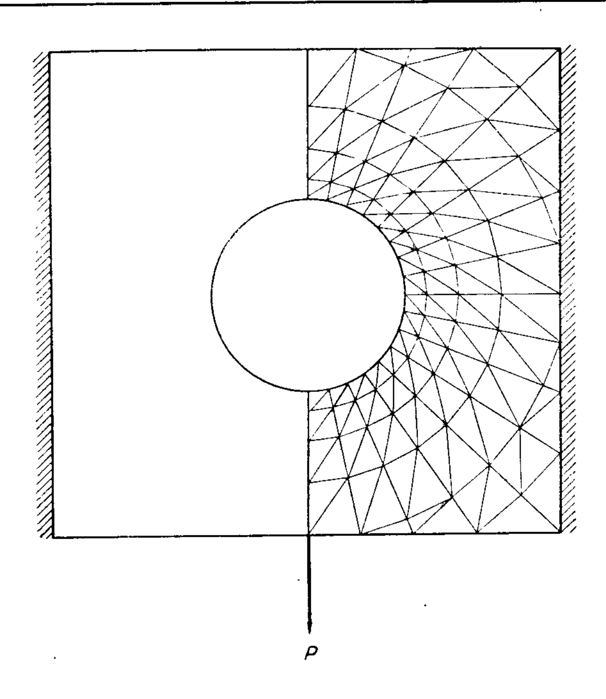


Рис. 18.40. Несжимаемое плоское тело с центральным отверстием под действием приложенной на границе сосредоточенной силы P и конечноэлементная модель этого тела.

Плоское тело с круговым отверстием. В качестве последнего примера кратко опишем численные результаты конечноэлементного решения задачи о конечной плоской деформации несжимаемого квадратного образца из резины типа Муни с центрально расположенным круговым отверстием [1]). Образец защемлен по двум противоположным сторонам (другие стороны свободны), и на него действует сосредоточенная сила, приложенная в середине стороны под отверстием, как показано на рис. 18.40. Размеры недеформированного тела в плане 10 × 10 дюймов, первоначальный диаметр центрального отверстия 4.0 дюйма, а постоянные Муни приняты равными $C_1 = 80$ фунт/дюйм^2, $C_2 = 20$ фунт/дюйм^2. Использованная при решении конечноэлементная модель показана на рис. 18.42. Внешняя нагрузка P величиной в 2000 фунтов прикладывалась в 20 этапов, по 100 фунтов на каждом.

Рассчитанный деформированный контур тела при различных уровнях внешней нагрузки показан на рис. 18.41, а на рис. 18.42 представлена деформированная конечноэлементная модель при $P = 2000$ фунтов. Как и следовало ожидать, в точке приложения нагрузки деформация сингулярна. Деформации достигают порядка 50%, и главный «диаметр» искаженного сердцевидного отверстия увеличивается до 5 дюймов.

---

[1]) См. Оден и Ки [1971a].

$P = 2\,000$
$P = 1500$
$P = 1000$
$P = 500$
$P = 0$

Рис. 18.41. Деформированные контуры плоского тела при различных значениях приложенной силы.

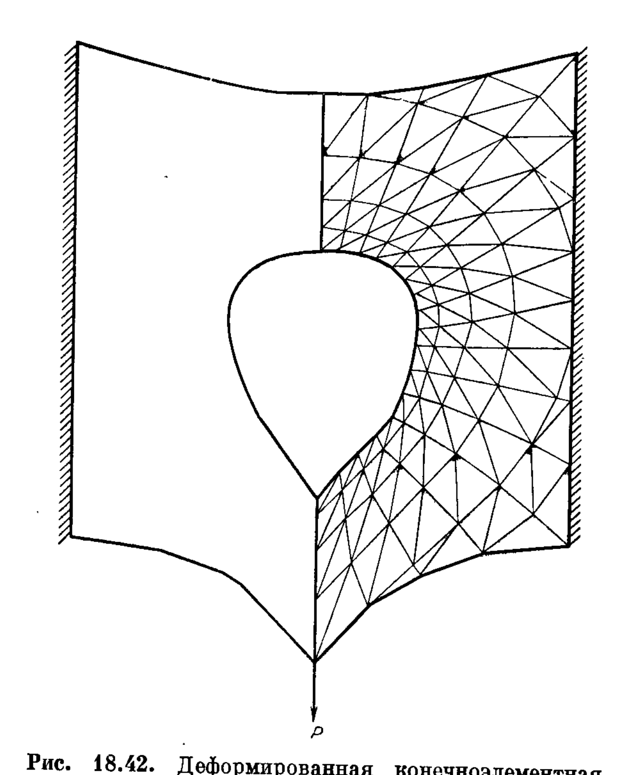


Рис. 18.42. Деформированная конечноэлементная модель при нагрузке $P = 2000$ фунтов.

Глава V

Нелинейное термомеханическое поведение сплошных сред

В этой главе мы применим общие уравнения движения и теплопроводности, выведенные в гл. III для конечных элементов сплошной среды, к нелинейным задачам о термомеханическом поведении твердых тел. Хотя в принципе все дело сводится к простой подстановке в эти общие уравнения определяющих уравнений рассматриваемого материала, характер и сложность получаемых систем уравнений, а также методы их численного решения могут быть должным образом оценены лишь при изучении конкретных примеров. На последующих страницах сначала излагается теория простых материалов с памятью, а затем рассматриваются частные виды определяющих функционалов, согласующиеся с этой теорией. В заключение строятся конечноэлементные модели таких материалов и описывается их применение к ряду характерных нелинейных задач.

19. ТЕРМОМЕХАНИКА МАТЕРИАЛОВ С ПАМЯТЬЮ

Общеизвестно, что механическая работа сопровождается выделением тепла, и обратно, нагревая тело, можно производить механическую работу. Известно, далее, что свойства многих материалов могут меняться со временем и могут зависеть от температуры и скорости деформирования. Например, пластмассы, полимеры, биологические ткани и многие металлы могут продолжать деформироваться при неизменных приложенных нагрузках, и скорость этого деформирования может быть очень чувствительной к изменениям температуры. Поведение материалов такого типа может зависеть не только от текущих значений деформации и температуры, но и от их предысторий. В общем случае поведение таких материалов характеризуется также диссипацией энергии, что отличает их от рассмотренных ранее гиперупругих материалов. Термомеханическое поведение большого класса диссипативных материалов описывается термодинамической теорией простых материалов; основные положения этой теории и будут изложены в последующих пунктах.

19.1. ТЕРМОДИНАМИКА ПРОСТЫХ МАТЕРИАЛОВ [1])

Напомним [см. § 14, в частности (14.27)], что термомеханически простые материалы характеризуются четырьмя определяющими уравнениями, представляющими напряжение, тепловой поток, плотность энтропии и свободную энергию в виде функционалов от предысторий деформации, температуры и, возможно, градиентов температуры. Для удобства мы предполагаем, что материал однороден, т. е. что за начальную конфигурацию принята некоторая однородная конфигурация C_0. В этом случае определяющие функционалы и плотность $\rho = \rho_0$ не зависят от частицы материала $\mathbf{x}$. Используя тот факт, что $\gamma_{ij} = \frac{1}{2}(z_{m,i} z_{m,j} - \delta_{ij})$, и принцип локального действия, в качестве независимых переменных состояния выбираем предысторию деформации $\boldsymbol{\gamma}^t(\mathbf{x}, s) = \boldsymbol{\gamma}(\mathbf{x}, t-s)$, где $\boldsymbol{\gamma}(\mathbf{x}, t)$ — тензор деформации в $\mathbf{x}$ в момент t, предысторию температуры $\theta^t(\mathbf{x}, s) = \theta(\mathbf{x}, t-s)$ и текущий градиент температуры $\mathbf{g}(\mathbf{x}, t) = \nabla\theta(\mathbf{x}, t)$. Таким образом, мы рассматриваем класс простых материалов, описываемых определяющими уравнениями вида

$$\begin{aligned} \psi &= \overset{\infty}{\underset{s=0}{\Psi}} [\boldsymbol{\gamma}^t(s),\ \theta^t(s);\ \mathbf{g}(t)], \\ \mathbf{T} &= \overset{\infty}{\underset{s=0}{\mathfrak{T}}} [\boldsymbol{\gamma}^t(s),\ \theta^t(s);\ \mathbf{g}(t)], \\ \eta &= \overset{\infty}{\underset{s=0}{\mathscr{N}}} [\boldsymbol{\gamma}^t(s),\ \theta^t(s);\ \mathbf{g}(t)], \\ \mathbf{q} &= \overset{\infty}{\underset{s=0}{\mathfrak{Q}}} [\boldsymbol{\gamma}^t(s),\ \theta^t(s);\ \mathbf{g}(t)], \end{aligned} \tag{19.1}$$

где ψ и η — плотности свободной энергии и энтропии, $\mathbf{T} = \sigma^{ij}\mathbf{G}_i \otimes \mathbf{G}_j$ — тензор напряжения, $\mathbf{q}$ — тепловой поток, а $\overset{\infty}{\underset{s=0}{\Psi}}, \ldots, \overset{\infty}{\underset{s=0}{\mathfrak{Q}}}$ — соответствующие определяющие функционалы Пределы у функционалов в (19.1) указаны для того, чтобы подчеркнуть, что параметр, характеризующий прошлое время, изменяется от 0, что отвечает текущему моменту, до ∞. Зависимость ψ, $\mathbf{T}$, η и $\mathbf{q}$ от $\mathbf{x}$ и t, равно как зависимость $\boldsymbol{\gamma}^t(s), \theta^t(s), \mathbf{g}(t)$ от $\mathbf{x}$, явно не указывается.

---

[1]) Механическая теория простых материалов создана Ноллом [1958]; она была распространена на случай термомеханических явлений Колеманом [1964] и получила дальнейшее развитие в совместных работах Колемана и его сотрудников. См., в частности, статьи Колемана, Гуртина и Херреры [1965], Колемана и Гуртина [1965а, 1965б] и Колемана и Мизела [1967], на которых основано наше изложение.

Заметим, что вид функционалов $\overset{\infty}{\underset{s=0}{\Psi}}, \ldots, \overset{\infty}{\underset{s=0}{\mathfrak{Q}}}$ может отличаться от вида функционалов, скажем, в (14.28) вследствие другого выбора меры деформации. Отметим также, что в соответствии с приведенным в п. 14.2 правилом равноприсутствия аргументами всех определяющих функционалов служит одна и та же совокупность переменных.

Для облегчения последующих рассмотрений удобно ввести понятие прошлой предыстории. Суть дела сводится просто к обособлению текущего значения функции от всех ее значений в прошлом. Пусть, например, $u(s)$ — вещественнозначная функция на интервале $s \in [0, \infty)$, и пусть фиксировано некоторое значение t; тогда функция $u^t(s) = u(t - s)$, как и ранее, называется (*полной*) *предысторией* u в момент t. Ограничение полной предыстории $u^t(s)$ на открытый интервал $(0, \infty)$ называется прошлой предысторией для $u^t(s)$ и обозначается через $u_r^t(s)$, т. е.

$$u_r^t(s) = u(t - s), \qquad 0 < s < \infty. \tag{19.2}$$

Таким образом, полную предысторию $u^t(s)$ можно представить в виде пары $[u_r^t(s), u^t(0)]$.

Возвращаясь к (19.1), выразим определяющие функционалы через прошлые предыстории $\gamma_r^t(s)$, $\theta_r^t(s)$, а не через полные предыстории $\gamma^t(s)$, $\theta^t(s)$. Вводя новые функционалы $\overset{\infty}{\underset{s=0}{\bar{\Psi}}}, \ldots, \overset{\infty}{\underset{s=0}{\bar{\mathfrak{Q}}}}$ формулами

$$\overset{\infty}{\underset{s=0}{\bar{\Psi}}} [\gamma_r^t(s), \theta_r^t(s); \gamma, \theta, g] = \overset{\infty}{\underset{s=0}{\Psi}} [\gamma^t(s), \theta^t(s); g] \tag{19.3}$$

и т. д., где γ, θ и g — функции от $\mathbf{x}$ и t, вместо (19.1) получаем:

$$\begin{aligned} \psi &= \overset{\infty}{\underset{s=0}{\bar{\Psi}}} [\gamma_r^t(s), \theta_r^t(s); \gamma, \theta, g], \\ \mathbf{T} &= \overset{\infty}{\underset{s=0}{\bar{\mathfrak{T}}}} [\gamma_r^t(s), \theta_r^t(s); \gamma, \theta, g], \\ \eta &= \overset{\infty}{\underset{s=0}{\bar{\mathcal{N}}}} [\gamma_r^t(s), \theta_r^t(s); \gamma, \theta, g], \\ \mathbf{q} &= \overset{\infty}{\underset{s=0}{\bar{\mathfrak{Q}}}} [\gamma_r^t(s), \theta_r^t(s); \gamma, \theta, g]. \end{aligned} \tag{19.4}$$

Для того чтобы быть физически допустимыми, функционалы (19.4) должны быть такими, чтобы не нарушались основные физические законы, описывающие термомеханическое поведение (правило 1 п. 14.2). В частности, требуется, чтобы удовлетворялись

локальные формы закона сохранения энергии и неравенства Клазиуса — Дюгема [1]):

$$\begin{aligned} \rho\dot{\psi} &= \sigma^{ij}\dot{\gamma}_{ij} - \rho\eta\dot{\theta} - \delta, \\ \rho\theta\dot{\eta} &- \nabla\cdot\mathbf{q} + \frac{1}{\theta}\,\mathbf{q}\cdot\mathbf{g} - \rho r \geqslant 0, \end{aligned} \tag{19.5}$$

где δ — плотность внутренней диссипации.

Для проверки допустимости определяющих соотношений (19.4) путем их подстановки в (19.5) требуется вычислять производные по времени от определяющих функционалов. Это приводит к необходимости использовать дифференцирование по Фреше, описанное в п. 10.1 [см. (10.19)]. В набранном петитом тексте мы воспроизведем в новой форме и разовьем далее нужный математический аппарат.

Свойства гладкости функционалов. Пусть $\mathscr{H}$ — вещественное нормированное линейное пространство, элементами которого являются определенные на $(0, \infty)$ вещественнозначные функции u, с нормой $\| u \|$. Пусть, далее, $\mathscr{H}^\dagger$ — пространство вещественнозначных функций u на $[0, \infty)$, таких, что ограничение u_r функции u на $(0, \infty)$ принадлежит $\mathscr{H}$. Пространство $\mathscr{H}^\dagger$ также можно наделить структурой нормированного линейного пространства, введя норму

$$\| u \|^\dagger = \| u_r(s) \| + | u(0) |. \tag{19.6}$$

Пусть $\underset{s=0}{\overset{\infty}{K}}$ — дифференцируемый по Фреше [см. (10.19)] функционал, определенный для всех $u \in \mathscr{H}^\dagger$. Тогда для произвольной функции $h \in \mathscr{H}^\dagger$

$$\underset{s=0}{\overset{\infty}{K}}(u+h) = \underset{s=0}{\overset{\infty}{K}}(u) + \delta^\dagger \underset{s=0}{\overset{\infty}{K}}(u \mid h) + \omega(u, h), \tag{19.7}$$

где $\delta^\dagger \underset{s=0}{\overset{\infty}{K}}(u \mid h)$ — первый дифференциал Фреше функционала $\underset{s=0}{\overset{\infty}{K}}$ [2]), а остаток $\omega(u, h)$ удовлетворяет условию

$$\lim_{\|h\|^\dagger \to 0} \frac{1}{\| h \|^\dagger} \|\omega(u, h)\|^\dagger = 0. \tag{19.8}$$

Мы предполагаем, что дифференциал $\delta^\dagger \underset{s=0}{\overset{\infty}{K}}(u \mid h)$ непрерывен по совокупности u и h; вертикальная черта в $\delta^\dagger \underset{s=0}{\overset{\infty}{K}}(u \mid h)$ указывает на то, что дифференциал линеен по h.

В случае N-кратной дифференцируемости нашего функционала выполняется соотношение

$$\underset{s=0}{\overset{\infty}{K}}(u+h) = \underset{s=0}{\overset{\infty}{K}}(u) + \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n!}\, \delta^{\dagger n} \underset{s=0}{\overset{\infty}{K}}(u \mid h, h, \ldots, h) + \omega^N(u, h), \tag{19.9}$$

---

[1]) См. (12.31), (12.33) и (12.35).

[2]) В точке u при приращении h.— *Прим. ред.*

где $\delta^{\dagger n} \overset{\infty}{\underset{s=0}{K}} (u \mid h_1, h_2, \ldots, h_n)$ (при фиксированном u) есть симметричная n-линейная форма на $\mathscr{H}^\dagger$ (т. е. отображение произведения $\mathscr{H}^\dagger \times \mathscr{H}^\dagger \times \ldots$ $\ldots \times \mathscr{H}^\dagger$ в поле вещественных чисел) и

$$\lim_{\|h\|^\dagger \to 0} \frac{1}{\| h \|^{\dagger N}} \| \omega^N (u, h) \|^\dagger \to 0. \tag{19.10}$$

Число $\delta^{\dagger n} \overset{\infty}{\underset{s=0}{K}} (u \mid h_1, h_2, \ldots, h_n)$ называется N-дифференциалом Фреше функционала $\overset{\infty}{\underset{s=0}{K}}$ в точке u [1]).

Удобно переписать $\delta^\dagger \overset{\infty}{\underset{s=0}{K}} (u \mid h)$ в форме, в которой подчеркивается различие между функцией u и ее ограничением u_r на $(0, \infty)$. Это достигается введением вместо $\overset{\infty}{\underset{s=0}{K}} (u)$ другого функционала $\overset{\infty}{\underset{s=0}{\overline{\overline{K}}}}$, определяемого соотношением

$$\overset{\infty}{\underset{s=0}{\overline{\overline{K}}}} [v(s); w] = \overset{\infty}{\underset{s=0}{K}} (u), \tag{19.11}$$

где $v(s) = u_r(s)$ — ограничение функции u на $(0, \infty)$ и $w = u(0)$. Тогда наш «полный» дифференциал Фреше функционала $\overset{\infty}{\underset{s=0}{K}} (u)$ примет вид

$$\delta^\dagger \overset{\infty}{\underset{s=0}{K}} (u \mid h) = \delta \overset{\infty}{\underset{s=0}{\overline{\overline{K}}}} [v(s); w \mid h_r(s)] + D \overset{\infty}{\underset{s=0}{\overline{\overline{K}}}} [v(s); w]\, h(0), \tag{19.12}$$

где

$$\delta \overset{\infty}{\underset{s=0}{\overline{\overline{K}}}} [v(s); w \mid h_r(s)] = \overset{\infty}{\underset{s=0}{\overline{\overline{K}}}} [v + h_r; w] - \overset{\infty}{\underset{s=0}{\overline{\overline{K}}}} (v; w) - \omega(v, h_r), \tag{19.13а}$$

$$\omega(v, h_r) = o(\| h_r \|)$$

и

$$D \overset{\infty}{\underset{s=0}{\overline{\overline{K}}}} [v(s); w] = \frac{\partial}{\partial w} \overset{\infty}{\underset{s=0}{\overline{\overline{K}}}} [v(s); w]. \tag{19.13б}$$

Ясно, что $D \overset{\infty}{\underset{s=0}{\overline{\overline{K}}}} [\ ;\ ]\, h(0)$ — линейная функция от $h(0)$, а $\delta \overset{\infty}{\underset{s=0}{\overline{\overline{K}}}} [\ ;\ \mid h_r]$ — линейный функционал от $h_r(s)$.

Нетрудно распространить изложенное на пространства более общего вида. Опишем один важный для нас частный случай. Пусть $\mathbf{\Gamma}$ обозначает упорядоченную пару $(\mathbf{T}, \beta)$, где $\mathbf{T}$ — произвольный тензор второго ранга на $\mathscr{E}^3$ и β — скаляр. Множество таких пар обозначим через $\mathscr{A}$ и введем на этом множестве бинарные операции сложения и умножения на скаляр, положив по определению

$$\mathbf{\Gamma}_1 + \mathbf{\Gamma}_2 = (\mathbf{T}_1 + \mathbf{T}_2, \beta_1 + \beta_2), \quad \alpha \cdot \mathbf{\Gamma} = (\alpha \mathbf{T}, \alpha\beta), \tag{19.14}$$

---

[1]) При приращениях $h_1, \ldots, h_n$.— *Прим. ред.*

где $\mathbf{\Gamma}_1 = (\mathbf{T}_1, \beta_1)$, $\mathbf{\Gamma}_2 = (\mathbf{T}_2, \beta_2) \in \mathscr{A}$ и α — скаляр. Алгебраическая система $(\mathscr{A}, +, \cdot)$ представляет собой 10-мерное линейное пространство $\mathscr{V}^{10}$ с нулевым элементом $\mathbf{0} = (0, 0)$. Далее, в $\mathscr{V}^{10}$ можно ввести скалярное произведение, например по формуле

$$\mathbf{\Gamma}_1 \cdot \mathbf{\Gamma}_2 \equiv \langle \mathbf{\Gamma}_1, \mathbf{\Gamma}_2 \rangle = \operatorname{tr} \mathbf{T}_1 \mathbf{T}_2^{\mathrm{T}} + \beta_1 \beta_2, \tag{19.15}$$

где tr — след, а символ T, как обычно, обозначает транспонирование. Тогда появляется естественная норма:

$$\| \mathbf{\Gamma} \|_0 = \sqrt{\langle \mathbf{\Gamma}, \mathbf{\Gamma} \rangle}. \tag{19.16}$$

Множество C^{10}, состоящее из таких элементов $\mathbf{\Gamma} = (\mathbf{T}, \beta)$, для которых $\det \mathbf{T} \neq 0$ и $\beta > 0$, образует *конус* в $\mathscr{V}^{10}$.

Рассмотрим теперь банахово пространство $\mathscr{H}$ прошлых предысторий, образованное измеримыми по Лебегу отображениями из $(0, \infty)$ в $\mathscr{V}^{10}$, с нормой $\| \mathbf{\Gamma} \|$, называемой *нормой на прошлых предысториях*, которое обладает следующими свойствами [1]):

1. Если $\mathbf{\Gamma}_1 \in \mathscr{H}$, $\mathbf{\Gamma}$: $(0, \infty) \to \mathscr{V}^{10}$ и $\| \mathbf{\Gamma} \|_0 \leqslant \| \mathbf{\Gamma}_1 \|_0$ почти всюду в $(0, \infty)$, то $\| \mathbf{\Gamma} \| \leqslant \| \mathbf{\Gamma}_1 \|$. Кроме того, если $\{\mathbf{\Gamma}_n\} \in \mathscr{H}$, $\| \mathbf{\Gamma}_n \| \leqslant K < \infty$ и $\| \mathbf{\Gamma}_n(s) \|_0 \to \| \mathbf{\Lambda}(s) \|_0$, причем функция $\mathbf{\Lambda}$ измерима, то $\mathbf{\Lambda} \in \mathscr{H}$ и $\lim\limits_{n\to\infty} \| \mathbf{\Gamma}_n \| = \| \mathbf{\Lambda} \| \leqslant K$.
2. Каков бы ни был элемент $\mathbf{\Omega} \in \mathscr{V}^{10}$, в $\mathscr{H}$ существует такая функция $\boldsymbol{\omega}$, что $\boldsymbol{\omega}(s) = \mathbf{\Omega}$ для всех $s \in (0, \infty)$.
3. Пусть $C^{10} \subset \mathscr{V}^{10}$ — упомянутый выше конус: $C^{10} = \{\mathbf{\Gamma} = (\mathbf{T}, \beta) \mid \mathbf{\Gamma} \in \mathscr{V}^{10};\ \det \mathbf{T} \neq 0,\ \beta > 0\}$. Конус C^{10} является образом некоторого конуса $\mathscr{C} \subset \mathscr{H}$, обладающего тем свойством, что принадлежащие ему абсолютно непрерывные функции, чьи производные принадлежат $\mathscr{H}$, плотны в нем.
4. Если $\Gamma \in \mathscr{H}$, то $S^{\varepsilon}\mathbf{\Gamma}(s)$ и $S_{\varepsilon}\mathbf{\Gamma}(s) \in \mathscr{H}$ для каждого $\varepsilon > 0$, где $S^{\varepsilon}\mathbf{\Gamma}(s) = \mathbf{\Gamma}(s - \varepsilon)$ при $s \in (\varepsilon, \infty)$ и $\mathbf{0}$ при $s \in (0, \varepsilon]$, а $S_{\varepsilon}\Gamma(s) = \Gamma(s + \varepsilon)$ при всех $s \in (0, \infty)$.

Помимо $\mathscr{H}$, можно определить банахово пространство $\mathscr{H}^{\dagger}$ полных предысторий, образуемое множеством измеримых по Лебегу функций $\mathbf{\Gamma}^t$, отображающих $[0, \infty)$ в $\mathscr{V}^{10}$ и имеющих конечную норму: $\| \mathbf{\Gamma}_r^t \| < \infty$. Здесь $\mathbf{\Gamma}_r^t$ — класс эквивалентности в $\mathscr{H}^{\dagger}$, отвечающий ограничению функции $\mathbf{\Gamma}^t$ на $(0, \infty)$. Норма в $\mathscr{H}^{\dagger}$, называемая *нормой на полных предысториях*, определяется формулой

$$\| \mathbf{\Gamma}^t \|^{\dagger} = \| \mathbf{\Gamma}_r^t \| + \| \mathbf{\Gamma}^t(0) \|_0. \tag{19.17}$$

Элементы в $\mathscr{H}^{\dagger}$, соответствующие функциям $\mathbf{\Gamma}^t$, отображающим $[0, \infty)$ в конус C^{10}, образуют конус $\mathscr{C}^{\dagger}$ в $\mathscr{H}^{\dagger}$.

Пусть теперь $\overset{\infty}{\underset{s=0}{K}}$ — непрерывный функционал, определенный на $\mathscr{C}^{\dagger} \otimes \mathscr{V}^3$, где $\mathscr{V}^3$ — трехмерное векторное пространство. Тогда

$$\overset{\infty}{\underset{s=0}{K}} [\mathbf{\Gamma}^t; \mathbf{v}] = \overset{\infty}{\underset{s=0}{\overline{K}}} [\mathbf{\Gamma}_r^t; \mathbf{\Gamma}, \mathbf{v}], \tag{19.18}$$

---

[1]) См. Колеман и Мизел [1967].

где $\mathbf{v} \in \mathscr{V}^3$. В предположении, что функционал $\overset{\infty}{\underset{s=0}{\overline{\overline{K}}}}$ непрерывно дифференцируем по Фреше, можно записать

$$\overset{\infty}{\underset{s=0}{\overline{\overline{K}}}}[\mathbf{\Gamma}_r^t+\mathbf{\Phi};\ \mathbf{\Gamma}+\mathbf{\Omega},\ \mathbf{v}+\mathbf{w}]=\overset{\infty}{\underset{s=0}{\overline{\overline{K}}}}[\mathbf{\Gamma}_r^t;\ \mathbf{\Gamma},\ \mathbf{v}]+\delta\overset{\infty}{\underset{s=0}{\overline{\overline{K}}}}[\mathbf{\Gamma}_r^t;\ \mathbf{\Gamma},\ \mathbf{v}\mid\mathbf{\Phi}]+$$

$$+D_{\mathbf{\Gamma}}\overset{\infty}{\underset{s=0}{\overline{\overline{K}}}}[\mathbf{\Gamma}_r^t;\ \mathbf{\Gamma},\ \mathbf{v}]\cdot\mathbf{\Omega}+\partial_{\mathbf{v}}\overset{\infty}{\underset{s=0}{\overline{\overline{K}}}}[\mathbf{\Gamma}_r^t;\mathbf{\Gamma},\ \mathbf{v}]\cdot\mathbf{w}+\omega(\mathbf{\Gamma}_r^t;\ \mathbf{\Gamma},\ \mathbf{v},\ \mathbf{\Phi},\ \mathbf{\Omega},\ \mathbf{w}), \qquad (19.19)$$

где $\mathbf{\Phi} \in \mathscr{H}$, $\mathbf{w} \in \mathscr{V}^3$, каждый «частный» дифференциал Фреше непрерывен по совокупности своих аргументов, $\delta\overset{\infty}{\underset{s=0}{\overline{\overline{K}}}}[\ ;\ ,\ \mid\ ]$ обозначает дифференциал Фреше по $\mathscr{H}$, $\partial_{\mathbf{v}}$ — обыкновенное частное дифференцирование по $\mathbf{v}$,

$$D_{\mathbf{\Gamma}}\overset{\infty}{\underset{s=0}{\overline{\overline{K}}}}[\mathbf{\Gamma}_r^t;\ \mathbf{\Gamma},\ \mathbf{v}]\cdot\mathbf{\Omega}=\overset{\infty}{\underset{s=0}{\overline{\overline{K}}}}[\mathbf{\Gamma}_r^t;\ \mathbf{\Gamma}+\mathbf{\Omega},\ \mathbf{v}]-\overset{\infty}{\underset{s=0}{\overline{\overline{K}}}}[\mathbf{\Gamma}_r^t;\ \mathbf{\Gamma},\ \mathbf{v}]-$$

$$-\overline{\omega}(\mathbf{\Gamma}_r^t;\ \mathbf{\Gamma},\ \mathbf{v},\ \mathbf{\Omega}), \qquad (19.20)$$

где $\overline{\omega}=o(\|\mathbf{\Omega}\|_0)$, и

$$\lim_{\|\mathbf{\Phi}\|+\|\mathbf{\Omega}\|_0+|\mathbf{w}|\to 0}\left[\frac{\|\omega(\mathbf{\Gamma}_r^t;\ \mathbf{\Gamma},\ \mathbf{v},\ \mathbf{\Phi},\ \mathbf{\Omega},\ \mathbf{w})\|}{\|\mathbf{\Phi}\|+\|\mathbf{\Omega}\|_0+|\mathbf{w}|}\right]=0, \qquad (19.21)$$

т. е. $\omega = o(\|\mathbf{\Phi}\| + \|\mathbf{\Omega}\|_0 + |\mathbf{w}|)$. Если $\overset{\infty}{\underset{s=0}{\overline{\overline{K}}}}[\ ;\ ,\ ]$ рассматривать как функцию параметра t, то скорость изменения $\overset{\infty}{\underset{s=0}{\overline{\overline{K}}}}[\ ;\ ,\ ]$ по t можно вычислить, используя (19.19) и свойство 4 пространства $\mathscr{H}$. Обозначая $d\overset{\infty}{\underset{s=0}{\overline{\overline{K}}}}/dt$ через $\dot{\overline{\overline{K}}}(t)$, получаем[1])

$$\dot{\overline{\overline{K}}}(t)=\delta\overset{\infty}{\underset{s=0}{\overline{\overline{K}}}}[\mathbf{\Gamma}_r^t;\ \mathbf{\Gamma},\ \mathbf{v}\mid\dot{\mathbf{\Gamma}}_r^t]+D_{\mathbf{\Gamma}}\overset{\infty}{\underset{s=0}{\overline{\overline{K}}}}[\mathbf{\Gamma}_r^t;\ \mathbf{\Gamma},\ \mathbf{v}]\cdot\dot{\mathbf{\Gamma}}(t)+$$

$$+\partial_{\mathbf{v}}\overset{\infty}{\underset{s=0}{\overline{\overline{K}}}}[\mathbf{\Gamma}_r^t;\ \mathbf{\Gamma},\ \mathbf{v}]\cdot\dot{\mathbf{v}}(t), \qquad (19.22)$$

где

$$\dot{\mathbf{\Gamma}}_r^t=\frac{d}{d\tau}\mathbf{\Gamma}(\tau)\Big|_{\tau=t-s}=-\frac{d}{ds}\mathbf{\Gamma}_r^t(s) \qquad (19.23)$$

для почти всех $s \in (0,\ \infty)$.

Затухающая память. Хотя в большей части последующих рассмотрений нам не потребуется конкретизировать вид нормы $\|\cdot\|$, входящей в соотношение (19.6) и последующие соотношения,

---

[1]) Колеман и Мизел [1967, стр. 262].

для многих важных приложений целесообразно ввести норму в $\mathscr{H}$, характеризующую затухание памяти. В физическом понимании материал имеет затухающую память, если на его текущее поведение не оказывает существенного влияния его поведение в отдаленном прошлом. Математически это свойство можно описать, рассматривая описанное ранее нормированное линейное пространство $\mathscr{H}$ как гильбертово пространство $\mathscr{H}_{(i)}$, для чего вводится некоторая фиксированная монотонно убывающая квадратично интегрируемая *функция влияния* $i(s)$ [1]), которая непрерывна на $[0, \infty)$ и удовлетворяет условию $\lim\limits_{s\to 0} i(s) = 0$. Скалярное произведение двух элементов $u, v \in \mathscr{H}_{(i)}$ определяется при этом формулой

$$\langle u, v\rangle = \int\limits_0^\infty u(s)\, v(s)\, i^2(s)\, ds, \tag{19.24}$$

и нормой, входящей в (19.6), будет

$$\| u \| = \left[\int\limits_0^\infty u^2(s)\, i^2(s)\, ds\right]^{1/2}. \tag{19.25}$$

В случае пространства $\mathscr{H}$ более общего вида, состоящего из элементов $\boldsymbol{\Gamma} = (\mathbf{T}, \beta)$, можно использовать в качестве нормы, характеризующей затухание памяти, например, такую норму:

$$\| \boldsymbol{\Gamma} \| = \left[\int\limits_0^\infty \operatorname{tr} \mathbf{T}(s)\, \mathbf{T}^{\mathrm{T}}(s)\, i^2(s)\, ds\right]^{1/2} + \left[\int\limits_0^\infty \beta^2(s)\, i^2(s)\, ds\right]^{1/2} + \\ + [\operatorname{tr} \mathbf{T}(0)\, \mathbf{T}^{\mathrm{T}}(0)]^{1/2} + |\beta(0)|. \tag{19.26}$$

Некоторые основные свойства термомеханически простых материалов. Для того чтобы применить изложенную выше теорию дифференцирования в нормированных пространствах к определяющим функционалам (19.4), необходимо выяснить структуру соответствующих нормированных пространств. С этой целью временно будем использовать другие обозначения. Пусть $\boldsymbol{\Lambda}(t)$ — упорядоченная пара $[\boldsymbol{\gamma}(t), \theta(t)]$, т. е. первый член $\boldsymbol{\Lambda}$ — это деформация, тензор второго ранга, а второй — абсолютная температура θ, скаляр. Таким образом, $\boldsymbol{\Lambda}$ является элементом рассмотренного ранее пространства $\mathscr{V}^{10}$. Тогда $\boldsymbol{\Lambda}^t(s)$ обозначает пару предысторий $[\boldsymbol{\gamma}^t(s), \theta^t(s)]$ и $\boldsymbol{\Lambda}^t_r(s)$ — ограничение $\boldsymbol{\Lambda}^t(s)$ на $(0, \infty)$. Уравнения (19.4) в этих обозначениях

[1]) i — от английского influence (влияние). — *Прим. ред.*

можно переписать так:

$$\psi = \overset{\infty}{\underset{s=0}{\overline{\overline{\Psi}}}} [\Lambda_r^t(s);\ \Lambda,\ g], \qquad \mathbf{T} = \overset{\infty}{\underset{s=0}{\overline{\overline{\mathfrak{T}}}}} [\Lambda_r^t(s);\ \Lambda,\ g],$$
$$\eta = \overset{\infty}{\underset{s=0}{\overline{\overline{\mathscr{N}}}}} [\Lambda_r^t(s);\ \Lambda,\ g], \qquad \mathbf{q} = \overset{\infty}{\underset{s=0}{\overline{\overline{\mathfrak{Q}}}}} [\Lambda_r^t(s);\ \Lambda,\ g]. \tag{19.27}$$

Из (19.18) ясно, что $\overset{\infty}{\underset{s=0}{\overline{\overline{\Psi}}}}, \ldots, \overset{\infty}{\underset{s=0}{\overline{\overline{\mathfrak{Q}}}}}$ являются функционалами, определенными на прямой сумме пространства полных предысторий $\mathscr{H}^{\dagger}$ и пространства $\mathscr{V}^3$, которому принадлежит $g\ (t)$. Таким образом, по формуле (19.22) можно определить скорость изменения, скажем, функционала $\overset{\infty}{\underset{s=0}{\overline{\overline{\Psi}}}}$:

$$\dot{\psi} = \delta \overset{\infty}{\underset{s=0}{\overline{\overline{\Psi}}}} [\Lambda_r^t;\ \Lambda,\ g\,|\,\dot{\Lambda}_r^t] + D_{\Lambda} \overset{\infty}{\underset{s=0}{\overline{\overline{\Psi}}}} [\Lambda_r;\ \Lambda,\ g]\cdot\dot{\Lambda}\,(t) + \partial_g \overset{\infty}{\underset{s=0}{\overline{\overline{\Psi}}}} [\Lambda_r^t;\ \Lambda,\ g]\cdot\dot{g}\,(t). \tag{19.28}$$

Здесь $\delta \overset{\infty}{\underset{s=0}{\overline{\overline{\Psi}}}} [\ ;\ ,]$ — дифференциал Фреше, D_{Λ} — оператор, определенный соотношением (19.20), и ∂_g — обычный оператор частного дифференцирования. Расписывая Λ через компоненты γ и θ, (19.28) можно представить в виде

$$\dot{\psi} = \delta_{\gamma} \overset{\infty}{\underset{s=0}{\overline{\overline{\Psi}}}} [-\,|\,\dot{\gamma}_r^t] + \delta_{\theta} \overset{\infty}{\underset{s=0}{\overline{\overline{\Psi}}}} [-\,|\,\dot{\theta}_r^t] + D_{\gamma} \overset{\infty}{\underset{s=0}{\overline{\overline{\Psi}}}} [-]\cdot\dot{\gamma} + D_{\theta} \overset{\infty}{\underset{s=0}{\overline{\overline{\Psi}}}} [-]\,\dot{\theta} + \partial_g \overset{\infty}{\underset{s=0}{\overline{\overline{\Psi}}}} [-]\cdot\dot{g}, \tag{19.29}$$

где для простоты записи введено обозначение $[-] = [\gamma_r^t,\ \theta_r^t;\ \gamma,\ \theta,\ g]$. Операции δ_{γ}, δ_{θ}, D_{γ} и D_{θ} определяются очевидным образом, аналогично операциям δ и D_{Λ}, введенным в (19.28). При вычислениях бывает удобно использовать эти определения в следующей форме:

$$\delta_{\gamma} \overset{\infty}{\underset{s=0}{\overline{\overline{\Psi}}}} [-\,|\,\mathbf{h}_r] = \lim_{\alpha\to 0} \frac{\partial}{\partial\alpha} \{ \overset{\infty}{\underset{s=0}{\overline{\overline{\Psi}}}} [\gamma_r^t + \alpha\mathbf{h}_r,\ \theta_r^t;\ \gamma,\ \theta,\ g] \}, \tag{19.30а}$$

$$\delta_{\theta} \overset{\infty}{\underset{s=0}{\overline{\overline{\Psi}}}} [-\,|\,\beta_r] = \lim_{\alpha\to 0} \frac{\partial}{\partial\alpha} \{ \overset{\infty}{\underset{s=0}{\overline{\overline{\Psi}}}} [\gamma_r^t,\ \theta_r^t + \alpha\beta_r;\ \gamma,\ \theta,\ g] \}, \tag{19.30б}$$

$$D_{\gamma} \overset{\infty}{\underset{s=0}{\overline{\overline{\Psi}}}} [-]\cdot\mathbf{h} = \lim_{\alpha\to 0} \frac{\partial}{\partial\alpha} \{ \overset{\infty}{\underset{s=0}{\overline{\overline{\Psi}}}} [\gamma_r^t,\ \theta_r^t;\ \gamma + \alpha\mathbf{h},\ \theta,\ g] \}, \tag{19.30в}$$

$$D_{\theta} \overset{\infty}{\underset{s=0}{\overline{\overline{\Psi}}}} [-]\cdot\beta = \lim_{\alpha\to 0} \frac{\partial}{\partial\alpha} \{ \overset{\infty}{\underset{s=0}{\overline{\overline{\Psi}}}} [\gamma_r^t,\ \theta_r^t;\ \gamma,\ \theta + \alpha\beta,\ g] \}. \tag{19.30г}$$

Таким образом, частное дифференцирование по γ_{ij} и θ обычно осуществляется по формулам (19.30в) и (19.30г).

Возвращаясь к первому соотношению (19.5) и вспоминая (12.35), переписываем неравенство Клаузиуса — Дюгема в виде

$$\sigma^{ij}\dot{\gamma}_{ij}-\rho(\dot{\psi}+\eta\dot{\theta})+\frac{1}{\theta}\mathbf{q}\cdot\mathbf{g}\geqslant 0. \qquad (19.31)$$

Определяющие функционалы (19.27) должны быть такими, чтобы ни при каких термодинамических процессах, происходящих в материалах, неравенство (19.31) не нарушалось.

Обращаясь к индексным обозначениям и подставляя (19.27) и (19.29) в (19.31), приходим к условию

$$\Big(\overset{\infty}{\underset{s=0}{\bar{\bar{\mathfrak{T}}}}}{}^{ij}[-]-\rho D_{\gamma_{ij}}\overset{\infty}{\underset{s=0}{\bar{\bar{\Psi}}}}[-]\Big)\dot{\gamma}_{ij}-\rho\Big(D_\theta\overset{\infty}{\underset{s=0}{\bar{\bar{\Psi}}}}[-]+\overset{\infty}{\underset{s=0}{\bar{\bar{\mathscr{N}}}}}[-]\Big)\dot{\theta}-$$
$$-\rho\delta_{\gamma_{ij}}\overset{\infty}{\underset{s=0}{\bar{\bar{\Psi}}}}[-\,|\,\dot{\gamma}^t_{ij(r)}]-\rho\delta_\theta\overset{\infty}{\underset{s=0}{\bar{\bar{\Psi}}}}[-\,|\,\dot{\theta}^t_r]-$$
$$-\rho\partial_{g_i}\overset{\infty}{\underset{s=0}{\bar{\bar{\Psi}}}}[-]\dot{g}_i+\frac{1}{\theta}\overset{\infty}{\underset{s=0}{\bar{\bar{\mathfrak{Q}}}}}{}^i[-]g_i\geqslant 0. \qquad (19.32)$$

При фиксированных прошлых предысториях $\gamma^t_{ij(r)}$, θ^t_r и фиксированных значениях γ_{ij}, θ и g_i величины $\dot{\gamma}_{ij}$, $\dot{\theta}$ и $\dot{g}_i$ могут меняться произвольно. Для того чтобы (19.32) выполнялось при любых значениях $\dot{\gamma}_{ij}$, $\dot{\theta}$ и $\dot{g}_i$, необходимо, чтобы коэффициенты при них обращались в нуль, а остальные члены были положительными при всех значениях t:

$$\partial_{g_i}\overset{\infty}{\underset{s=0}{\bar{\bar{\Psi}}}}[-]=0, \qquad (19.33а)$$

$$\overset{\infty}{\underset{s=0}{\bar{\bar{\mathfrak{T}}}}}{}^{ij}[-]=\rho D_{\gamma_{ij}}\overset{\infty}{\underset{s=0}{\bar{\bar{\Psi}}}}[-], \qquad (19.33б)$$

$$\overset{\infty}{\underset{s=0}{\bar{\bar{\mathscr{N}}}}}[-]=-D_\theta\overset{\infty}{\underset{s=0}{\bar{\bar{\Psi}}}}[-], \qquad (19.33в)$$

$$-\rho\Big\{\delta_{\gamma_{ij}}\overset{\infty}{\underset{s=0}{\bar{\bar{\Psi}}}}[-\,|\,\dot{\gamma}^t_{ij(r)}]+\delta_\theta\overset{\infty}{\underset{s=0}{\bar{\bar{\Psi}}}}[-\,|\,\dot{\theta}^t_r]\Big\}+\frac{1}{\theta}\overset{\infty}{\underset{s=0}{\bar{\bar{\mathfrak{Q}}}}}{}^i[-]g_i\geqslant 0. \qquad (19.33г)$$

С учетом этих результатов и соотношения (12.33) внутренняя диссипация задается формулой

$$\delta=-\rho\Big\{\delta_{\gamma_{ij}}\overset{\infty}{\underset{s=0}{\bar{\bar{\Psi}}}}[-\,|\,\dot{\gamma}^t_{ij(r)}]+\delta_\theta\overset{\infty}{\underset{s=0}{\bar{\bar{\Psi}}}}[-\,|\,\dot{\theta}^t_r]\Big\}. \qquad (19.34)$$

На основании (19.33) и (19.34) можно установить следующие *фундаментальные свойства термомеханически простых материалов* [1]):

1. *Функционал свободной энергии* $\overset{\infty}{\underset{s=0}{\overline{\overline{\Psi}}}}[\,-\,]$ *не зависит от градиента температуры* g [это следует из (19.33а)].
2. *Определяющие функционалы* $\overset{\infty}{\underset{s=0}{\overline{\overline{\mathfrak{T}}}}}{}^{ij}[\,-\,]$ *и* $\overset{\infty}{\underset{s=0}{\overline{\overline{\mathcal{N}}}}}[\,-\,]$ *для напряжений и энтропии определяются по функционалу свободной энергии; следовательно, они тоже не зависят от* g [это следует из (19.33б) и (19.33в)].
3. *Внутренняя диссипация определяется по функционалу свободной энергии соотношением* (19.34); *она удовлетворяет общему диссипационному неравенству* (19.33г).

Из свойств 1 и 2 следует, что *простой материал характеризуется только двумя определяющими функционалами, один из которых описывает свободную энергию, а другой — тепловой поток*; например:

$$\psi=\overset{\infty}{\underset{s=0}{\hat{\Psi}}}[\gamma_r^t,\ \theta_r^t;\ \gamma,\ \theta],$$
$$Q^i=\overset{\infty}{\underset{s=0}{\hat{\mathfrak{Q}}}}{}^i[\gamma_r^t,\ \theta_r^t;\ \gamma,\ \theta,\ g]. \tag{19.35}$$

Напряжение, энтропия, внутренняя диссипация и внутренняя энергия определяются функционалами

$$\sigma^{ij}=\overset{\infty}{\underset{s=0}{\hat{\mathfrak{T}}}}{}^{ij}[\gamma_r^t,\ \theta_r^t;\ \gamma,\ \theta]\equiv\rho D_{\gamma_{ij}}\overset{\infty}{\underset{s=0}{\hat{\Psi}}}[\gamma_r^t,\ \theta_r^t;\ \gamma,\ \theta], \tag{19.36а}$$

$$\eta=\overset{\infty}{\underset{s=0}{\hat{\mathcal{N}}}}[\gamma_r^t,\ \theta_r^t;\ \gamma,\ \theta]\equiv-D_\theta\overset{\infty}{\underset{s=0}{\hat{\Psi}}}[\gamma_r^t,\ \theta_r^t;\ \gamma,\ 0], \tag{19.36б}$$

$$\delta=\overset{\infty}{\underset{s=0}{\hat{\mathcal{D}}}}[\gamma_r^t,\ \theta_r^t;\ \gamma,\ \theta]\equiv-\rho\{\delta_{\gamma_{ij}}\overset{\infty}{\underset{s=0}{\hat{\Psi}}}[\gamma_r^t,\ \theta_r^t;\ \gamma,\ \theta\,|\,\dot{\gamma}_{ij(r)}^t]+$$
$$+\delta_\theta\overset{\infty}{\underset{s=0}{\hat{\Psi}}}[\gamma_r^t,\ \theta_r^t;\ \gamma,\ \theta\,|\,\dot{\theta}_r^t]\}, \tag{13.36в}$$

$$\varepsilon=\psi+\eta\theta=\overset{\infty}{\underset{s=0}{\mathrm{e}}}[\gamma_r^t,\ \theta_r^t;\ \gamma,\ \theta]\equiv(1-\theta D_\theta)\overset{\infty}{\underset{s=0}{\hat{\Psi}}}[\gamma_r^t,\theta_r^t;\gamma,\theta]. \tag{19.36г}$$

Кроме (19.36), определяющие функционалы должны удовлетворять принципу материальной независимости от системы координат,

[1]) Колеман [1964].

рассмотренному в п. 14.4, и должны иметь форму, инвариантную относительно принадлежащих группе изотропии материала унимодулярных преобразований. Отметим, что в большинстве приложений этой теории к однородным телам вместо ψ, σ^{ij}, η, Q^i и δ мы предпочитаем использовать величины $\varphi = \rho_0\psi$, $t^{ij} = \sqrt{G}\sigma^{ij}$, $\xi = \rho_0\eta$, $q_i = \delta_{im}\sqrt{G}Q^m$ и $\sigma = \delta\sqrt{G}$. Конечно, все основные выводы и, за исключением незначительных видоизменений, форма уравнений при этом сохраняются. В следующем пункте мы кратко рассмотрим формы определяющих функционалов для некоторых материалов.

19.2. ЧАСТНЫЕ ФОРМЫ УРАВНЕНИЙ СОСТОЯНИЯ ДЛЯ ПРОСТЫХ МАТЕРИАЛОВ

При получении частных форм определяющих функционалов для различных материалов естественно прежде всего попытаться использовать разложения функционала свободной энергии [1]), подобно тому как в § 15 использовались разложения функции энергии деформации. Хотя экспериментальных данных, подтверждающих возможность использования таких разложений для конкретных нелинейных материалов, недостаточно, линеаризации определяющих функционалов, полученные таким образом, согласуются с классическими теориями линейной термо-вязко-упругости и термоупругости. Для наших настоящих целей достаточно рассмотреть один типичный пример возможной формы этих функционалов.

Тензорнозначную и скалярнозначную функции $\mathbf{0}^t(s)$ и $0^t(s)$, определенные формулами

$$\mathbf{0}^t(s) = \mathbf{0}, \qquad 0^t(s) = 0, \qquad 0 \leqslant s \leqslant \infty, \tag{19.37}$$

будем называть нулевыми предысториями. Если $\overset{\infty}{\underset{s=0}{\mathscr{F}}}[\boldsymbol{\gamma}^t, \theta^t]$ — функционал от полных предысторий $\boldsymbol{\gamma}^t(s)$, $\theta^t(s)$ то, используя (19.9) и накладывая соответствующие условия гладкости на

[1]) Идея представления различных определяющих функционалов в виде разложений типа разложения Тэйлора (с производными Фреше), члены которых, вообще говоря, представляют собой многократные интегралы от предысторий деформации и/или температуры, использовалась целым рядом авторов. Например, различные изотермические случаи рассматривались Грином и Ривлином [1957, 1960], Грином, Ривлином и Спенсером [1959], Колеманом и Ноллом [1960], Чэконом и Ривлином [1964], Пипкином [1964, 1966] и другими. Некоторые авторы (в их числе Уорд и Онат [1963]) пытались использовать усеченные разложения при экспериментальном исследовании некоторых вязко-упругих и термо-вязко-упругих материалов, хотя в этом направлении сделано еще очень мало. Иной подход к определению свободной энергии предложил Шейпери [1968]. См. также Лианис [1965] и Мак-Гуирт и Лианис [1969].

$\overset{\infty}{\underset{s=0}{\mathscr{F}}}[\,-\,]$, можно построить обобщенное разложение Тэйлора для функционала $\overset{\infty}{\underset{s=0}{\mathscr{F}}}[\,-\,]$ в окрестности нулевых предысторий (19.37):

$$\overset{\infty}{\underset{s=0}{\mathscr{F}}}[\mathbf{0}^t(s)+\boldsymbol{\gamma}^t(s),\ 0^t(s)+\theta^t(s)] = \overset{\infty}{\underset{s=0}{\mathscr{F}}}[\mathbf{0}^*] + \delta_\gamma \overset{\infty}{\underset{s=0}{\mathscr{F}}}[\mathbf{0}^* \mid \boldsymbol{\gamma}^t(s)] + \delta_\theta \overset{\infty}{\underset{s=0}{\mathscr{F}}}[\mathbf{0}^* \mid \theta^t(s)] + \frac{1}{2!}\delta_\gamma^2 \overset{\infty}{\underset{s=0}{\mathscr{F}}}[\mathbf{0}^* \mid \boldsymbol{\gamma}^t(s),\ \boldsymbol{\gamma}^t(s)] + \delta_\gamma\delta_\theta \overset{\infty}{\underset{s=0}{\mathscr{F}}}[\mathbf{0}^* \mid \boldsymbol{\gamma}^t(s),\ \theta^t(s)] + \frac{1}{2!}\delta_\theta^2 \overset{\infty}{\underset{s=0}{\mathscr{F}}}[\mathbf{0}^* \mid \theta^t(s),\ \theta^t(s)] + \ldots, \tag{19.38}$$

где $\mathbf{0}^* = [\mathbf{0}^t(s),\ 0^t(s)]$. С другой стороны, $\overset{\infty}{\underset{s=0}{\mathscr{F}}}[\,-\,]$ можно выразить через прошлые предыстории $\boldsymbol{\gamma}_r^t(s)$, $\theta_r^t(s)$ с помощью нового функционала

$$\overset{\infty}{\underset{s=0}{\bar{\bar{\mathscr{F}}}}}[\gamma_r^t,\ \theta_r^t;\ \boldsymbol{\gamma},\ \theta] = \overset{\infty}{\underset{s=0}{\mathscr{F}}}[\boldsymbol{\gamma}^t,\ \theta^t] \tag{19.39}$$

и вместо (19.38) записать

$$\overset{\infty}{\underset{s=0}{\bar{\bar{\mathscr{F}}}}}[\mathbf{0}_r^t+\boldsymbol{\gamma}_r^t,\ 0_r^t+\theta_r^t,\ \mathbf{0}+\boldsymbol{\gamma},\ 0+\theta] = \overset{\infty}{\underset{s=0}{\bar{\bar{\mathscr{F}}}}}[\bar{\mathbf{0}}^*] + \delta_\gamma \overset{\infty}{\underset{s=0}{\bar{\bar{\mathscr{F}}}}}[\bar{\mathbf{0}}^* \mid \gamma_r^t] + \delta_\theta \overset{\infty}{\underset{s=0}{\bar{\bar{\mathscr{F}}}}}[\bar{\mathbf{0}}^* \mid \theta_r^t] + D_\gamma \overset{\infty}{\underset{s=0}{\bar{\bar{\mathscr{F}}}}}[\bar{\mathbf{0}}^*]\cdot\gamma + D_\theta \overset{\infty}{\underset{s=0}{\bar{\bar{\mathscr{F}}}}}[\bar{\mathbf{0}}^*]\,\theta + \frac{1}{2!}\delta_\gamma^2 \overset{\infty}{\underset{s=0}{\bar{\bar{\mathscr{F}}}}}[\bar{\mathbf{0}}^* \mid \gamma_r^t,\ \gamma_r^t] + \delta_\gamma\delta_\theta \overset{\infty}{\underset{s=0}{\bar{\bar{\mathscr{F}}}}}[\bar{\mathbf{0}}^* \mid \gamma_r^t,\ \theta_r^t] + \delta_\gamma D_\gamma \overset{\infty}{\underset{s=0}{\bar{\bar{\mathscr{F}}}}}[\bar{\mathbf{0}}^* \mid \boldsymbol{\gamma}_r^t]\cdot\boldsymbol{\gamma} + \delta_\gamma D_\theta \overset{\infty}{\underset{s=0}{\bar{\bar{\mathscr{F}}}}}[\bar{\mathbf{0}}^* \mid \gamma_r^t]\,\theta + \frac{1}{2!}D_\gamma^2 \overset{\infty}{\underset{s=0}{\bar{\bar{\mathscr{F}}}}}[\bar{\mathbf{0}}^*]\cdot\boldsymbol{\gamma}^2 + \frac{1}{2!}D_\theta^2 \overset{\infty}{\underset{s=0}{\bar{\bar{\mathscr{F}}}}}[\bar{\mathbf{0}}^*]\,\theta^2 + \frac{1}{2!}\delta_\theta^2 \overset{\infty}{\underset{s=0}{\bar{\bar{\mathscr{F}}}}}[\bar{\mathbf{0}}^* \mid \theta_r^t,\ \theta_r^t] + \ldots, \tag{19.40}$$

где $\bar{\mathbf{0}}^* = (\mathbf{0}_r^t,\ 0_r^t;\ \mathbf{0},\ 0)$.

Если положить $\overset{\infty}{\underset{s=0}{\bar{\bar{\mathscr{F}}}}}[\,-\,] = \overset{\infty}{\underset{s=0}{\bar{\bar{\Psi}}}}[\,-\,]$, где $\overset{\infty}{\underset{s=0}{\bar{\bar{\Psi}}}}[\,-\,]$ — функционал свободной энергии, то, обрывая разложение (19.40) на том

или ином члене, можно получить определяющие функционалы для различных материалов. Ахенбах, Фогель и Геррманн [1968, стр. 13] [1]) предложили следующую форму функционала свободной энергии, получаемую из (18.40) при сохранении только членов не выше третьей степени по γ, θ и их предысториям:

$$\overset{\infty}{\underset{s=0}{\Phi}} = A_0 + A_1^{ij}\gamma_{ij} + A_2^{ij}\gamma_{ij}T + A_3^{ij}\gamma_{ij}T^2 + A_4^{ijmn}\gamma_{ij}\gamma_{mn} + A_5^{ijmn}\gamma_{ij}\gamma_{mn}T + \\ + B_1T + B_2T^2 + B_3T^3. \quad (19.41)$$

Здесь $\overset{\infty}{\underset{s=0}{\Phi}}$ — функционал свободной энергии на единицу недеформированного объема, $T = \theta - T_0$ — отклонение от некоторой постоянной отсчетной температуры T_0 и [2])

$$A_0 = \overset{\infty}{\underset{s=0}{\Phi}}[-] + \frac{1}{2}\delta_T^2 \overset{\infty}{\underset{s=0}{\Phi}}[-\,|\,T_r^t,\ T_r^t] + \frac{1}{2}\delta_\gamma^2 \overset{\infty}{\underset{s=0}{\Phi}}[-\,|\,\gamma_r^t,\ \gamma_r^t] + \\ + \delta_\gamma\delta_T \overset{\infty}{\underset{s=0}{\Phi}}[-\,|\,\gamma_r^t,\ T_r^t] + \frac{1}{6}\delta_T^3 \overset{\infty}{\underset{s=0}{\Phi}}[-\,|\,T_r^t,\ T_r^t,\ T_r^t] + \\ + \frac{1}{2}\delta_\gamma^2\delta_T \overset{\infty}{\underset{s=0}{\Phi}}[-\,|\,\gamma_r^t,\ \gamma_r^t,\ T_r^t] + \frac{1}{2}\delta_\gamma\delta_T^2 \overset{\infty}{\underset{s=0}{\Phi}}[-\,|\,\gamma_r^t,\ T_r^t,\ T_r^t], \quad (19.42а)$$

$$A_1^{ij} = D_{\gamma_{ij}}\{\overset{\infty}{\underset{s=0}{\Phi}}[-] + \delta_\gamma \overset{\infty}{\underset{s=0}{\Phi}}[-\,|\,\gamma_r^t] + \delta_T \overset{\infty}{\underset{s=0}{\Phi}}[-\,|\,T_r^t] + \\ + \frac{1}{2}\delta_T^2 \overset{\infty}{\underset{s=0}{\Phi}}[-\,|\,T_r^t,\ T_r^t] + \delta_\gamma\delta_T \overset{\infty}{\underset{s=0}{\Phi}}[-\,|\,\gamma_r^t,\ T_r^t]\}, \quad (19.42б)$$

$$A_2^{ij} = D_{\gamma_{ij}}D_T\{\overset{\infty}{\underset{s=0}{\Phi}}[-] + \delta_T \overset{\infty}{\underset{s=0}{\Phi}}[-\,|\,T_r^t] + \delta_\gamma \overset{\infty}{\underset{s=0}{\Phi}}[-\,|\,\gamma_r^t]\}, \quad (19.42в)$$

$$A_3^{ij} = \frac{1}{2}D_{\gamma_{ij}}D_T^2 \overset{\infty}{\underset{s=0}{\Phi}}[-], \quad (19.42г)$$

$$A_4^{ijmn} = \frac{1}{2}D_{\gamma_{ij}}D_{\gamma_{mn}}\{\overset{\infty}{\underset{s=0}{\Phi}}[-] + \delta_T \overset{\infty}{\underset{s=0}{\Phi}}[-\,|\,T_r^t]\}, \quad (19.42д)$$

$$A_5^{ijmn} = \frac{1}{2}D_{\gamma_{ij}}D_{\gamma_{mn}}D_T \overset{\infty}{\underset{s=0}{\Phi}}[-], \quad (19.42е)$$

---

[1]) В этой работе рассматривается лишь одномерный случай.

[2]) Заметим, что члены $\delta_\gamma\Phi[-\,|\,\gamma_r^t]$ и $\delta_\theta\Phi[-\,|\,\theta_r^t]$ не входят в (19.42), поскольку эти функционалы обращаются в нуль при постоянных предысториях деформации и температуры.

$$B_1 = D_T \{ \overset{\infty}{\underset{s=0}{\Phi}} [-] + \delta_T \overset{\infty}{\underset{s=0}{\Phi}} [- | T_r^t] + \delta_\gamma \overset{\infty}{\underset{s=0}{\Phi}} [- | \gamma_r^t] + $$
$$+ \frac{1}{2} \delta_T^2 \overset{\infty}{\underset{s=0}{\Phi}} [- | T_r^t, T_r^t] + \frac{1}{2} \delta_\gamma^2 \overset{\infty}{\underset{s=0}{\Phi}} [- | \gamma_r^t, \gamma_r^t] +$$
$$+ \delta_\gamma \delta_T \overset{\infty}{\underset{s=0}{\Phi}} [- | \gamma_r^t, T_r^t] \Big\}, \qquad (19.42ё)$$

$$B_2 = \frac{1}{2} D_T^2 \{ \overset{\infty}{\underset{s=0}{\Phi}} [-] + \delta_T \overset{\infty}{\underset{s=0}{\Phi}} [- | T_r^t] + \delta_\gamma \overset{\infty}{\underset{s=0}{\Phi}} [- | \gamma_r^t] \}, \qquad (19.42ж)$$

$$B_3 = \frac{1}{6} D_T^3 \overset{\infty}{\underset{s=0}{\Phi}} [-], \qquad (19.42з)$$

где $\overset{\infty}{\underset{s=0}{\Phi}} [- | \cdot\cdot] \equiv \overset{\infty}{\underset{s=0}{\Phi}} [\mathbf{0}_r^t, 0_r^t; \mathbf{0}, 0 | \cdot\cdot]$, $\delta_T = \delta_{\theta - T_0} = \delta_\theta$ и $D_T = D_{\theta - T_0} = D_\theta$. Более конкретно, можно ввести такие зависящие от деформации и температуры интегральные коэффициенты[1]):

$$A_0 = a + \mathbf{R}_{11} * \gamma * \gamma' + \mathbf{R}_{12} * \gamma * T' + \mathbf{R}_{22} * T * T' + \mathbf{R}_{112} * \gamma * \gamma' * T' +$$
$$+ \mathbf{R}_{222} * T * T' * T' + \mathbf{R}_{122} * \gamma * T' * T', \qquad (19.43а)$$

$$A_1^{ij} = E^{ij} + G_1'^{ijmn} * \gamma_{mn} + M_1'^{ij} * T + M_2'^{ij} * T * T' + G_2'^{ijmn} * \gamma_{mn} * T', \qquad (19.43б)$$

$$A_2^{ij} = M_1^{ij}(0) + K_1'^{ijmn} * \gamma_{mn} + K_2'^{ij} * T, \qquad (19.43в)$$

$$A_3^{ij} = K_2^{ij}(0), \qquad (19.43г)$$

$$A_4^{ijmn} = \frac{1}{2} G_1^{ijmn}(0) + N'^{ijmn} * T, \qquad (19.43д)$$

$$A_5^{ijmn} = K_1^{ijmn}(0), \qquad (19.43е)$$

$$B_1 = H + L_1' * T + L_2'^{ij} * \gamma_{ij} + L_{11}' * T * T' +$$
$$+ L_{22}'^{ijmn} * \gamma_{ij} * \gamma_{mn}' + L_{12}'^{ij} * \gamma_{ij} * T', \qquad (19.43ё)$$

$$B_2 = \frac{1}{2} [L_1(0) + F_1' * T + F_2'^{ij} * \gamma_{ij}], \qquad (19.43ж)$$

$$B_3 = \frac{1}{3} F_1(0). \qquad (19.43з)$$

Здесь $\mathbf{R}_{11}$, $\mathbf{R}_{12}$, ..., G^{ijmn}, M_1^{ij}, ..., L_{11}, L_{22}^{ijmn}, ..., F_1 — ядра, характеризующие материал, а $*$ означает оператор свертки, действующий (при соответствующей замене переменных) следующим

[1]) Ахенбах, Фогель и Геррманн [1968, стр. 5].

образом:

$$\mathbf{R}_{11} * \boldsymbol{\gamma} * \boldsymbol{\gamma}' = \int_0^t \int_0^t R_{11}^{ijmn}(t-s_1, t-s_2)\, \gamma_{ij}(s_1) \frac{d\gamma_{mn}(s_2)}{ds_2}\, ds_1\, ds_2, \qquad (19.44\text{а})$$

$$\mathbf{R}_{112} * \boldsymbol{\gamma} * \boldsymbol{\gamma}' * T' = \int_0^t \int_0^t \int_0^t R_{112}^{ijmn}(t-s_1, t-s_2, t-s_3)\, \gamma_{ij}(s_1) \times$$

$$\times \frac{d\gamma_{mn}(s_2)}{ds_2} \frac{dT(s_3)}{ds_3}\, ds_1\, ds_2\, ds_3, \qquad (19.44\text{б})$$

. . . .

$$M_1'^{ij} * T = \int_0^t \frac{dM^{ij}(t-s)}{d(t-s)}\, T(s)\, ds, \qquad (19.44\text{в})$$

. . . .

Предполагается, что нижний предел интегрирования — это тот момент времени, когда начинается деформирование тела. Подставляя (19.41) в (19.36а) и (19.36б) и вспоминая, что $t^{ij} = \sqrt{G}\,\sigma^{ij} = \rho\sqrt{G}\, D_\gamma \overset{\infty}{\underset{s=0}{\overline{\Psi}}}[\,-\,] = \rho_0 D_\gamma \overset{\infty}{\underset{s=0}{\overline{\Psi}}}[\,-\,] = D_\gamma \overset{\infty}{\underset{s=0}{\Phi}}[\,-\,]$ и $\xi = \rho_0\eta = -\rho_0 D_\theta \overset{\infty}{\underset{s=0}{\overline{\Psi}}}[\,-\,] = -D_T \overset{\infty}{\underset{s=0}{\Phi}}[\,-\,]$, приходим к следующим определяющим уравнениям для напряжений и энтропии:

$$t^{ij} = A_1^{ij} + A_2^{ij}T + A_3^{ij}T^2 + 2A_4^{ijmn}\gamma_{mn} + 2A_5^{ijmn}\gamma_{mn}T, \qquad (19.45\text{а})$$

$$-\xi = B_1 + 2B_2T + 3B_3T^2 + A_2^{ij}\gamma_{ij} + 2A_3^{ij}\gamma_{ij}T + A_5^{ijmn}\gamma_{ij}\gamma_{mn}. \qquad (19.45\text{б})$$

Функционал внутренней диссипации получается точно таким же образом с использованием (19.36в).

Ясно, что, сохраняя большее число членов в разложении (19.40), можно аналогичным образом получить теории высших порядков. Интересно отметить, что приравнивание нулю $\theta_r^t(s)$ и $\theta(t)$ в (19.45а) дает классические определяющие уравнения линейной изотермической вязкоупругости. С другой стороны, если наши интегральные коэффициенты заменить константами, то (19.45а) сводится к уравнению состояния для класса термоупругих материалов с зависящими от температуры свойствами. Ниже мы рассмотрим этот класс материалов подробнее.

Чтобы завершить описание материала, необходимо к (19.45) добавить определяющее уравнение для теплового потока $\mathbf{q}$. Среди множества форм, которые могут быть использованы для функционала $\overset{\infty}{\underset{s=0}{\overline{\mathbf{Q}}}}[\,-\,]$, упомянем предложенный Кристенсеном и Нахди

[1967] линейный закон:

$$Q^i = \int_0^\infty \varkappa^{ij}(t-s)\frac{\partial T,_j(s)}{\partial s}ds, \tag{19.46}$$

где $\varkappa^{ij}(t-s)$ — ядро теплопроводности. Вместо этого закона можно использовать обобщенный закон Фурье:

$$Q^i = \overset{\infty}{\underset{s=0}{\varkappa^{ij}}}[\gamma_r^t, T_r^t; \gamma, T]\,T,_j, \tag{19.47}$$

где $\overset{\infty}{\underset{s=0}{\varkappa^{ij}}}[\,-\,]$ — функционал от указанных аргументов. Если $\overset{\infty}{\underset{s=0}{\varkappa^{ij}}}[\,-\,]$ заменить постоянной $\varkappa^{ij}$, то (19.47) сводится к классическому закону теплопроводности Фурье.

Термореологически простые материалы. Результаты экспериментов на разнообразных вязкоупругих материалах позволяют выделить важный подкласс материалов с памятью, обычно называемых *термореологически простыми материалами* [1]). А именно среди аморфных высокополимеров, которые при заданной постоянной (во времени и в пространстве) температуре приближенно подчиняются законам линейной и нелинейной вязкоупругости, есть группа материалов, свойства которых меняются особенно просто при изменении температуры: кривые, характеризующие зависимость свойств материала от времени при разных постоянных температурах, построенные в логарифмической шкале времени (по оси абсцисс откладывается $\ln t$), получаются друг из друга сдвигом. Это явление представляет собой основную характеристику термореологически простых материалов; она позволяет установить отношение эквивалентности между температурой и $\ln t$.

Чтобы лучше уяснить суть дела, рассмотрим определяющий закон (19.45а). Для случая изотермических деформаций изотропных линейных вязкоупругих тел он сводится к такому закону:

$$t^{ij} = \int_0^t J(t-s)\frac{\partial \gamma'_{ij}}{\partial s}ds + \frac{1}{3}\delta^{ij}\int_0^t K(t-s)\frac{\partial \gamma}{\partial s}ds, \tag{19.48}$$

где γ'_{ij} и γ — девиаторные и дилатационная компоненты γ_{ij}, а $J(t-s)$ и $K(t-s)$ — модули релаксации. Для термореологически простых материалов модули релаксации при постоянной температуре T будем записывать в виде функций от $\ln t$; напри-

---

[1]) См. Шварцл и Стэйвермэн [1952] или Уильямс, Лэндел и Ферри [1955]. Сводное обсуждение вопроса можно найти у Коста [1969], см. также Лианис 1968].

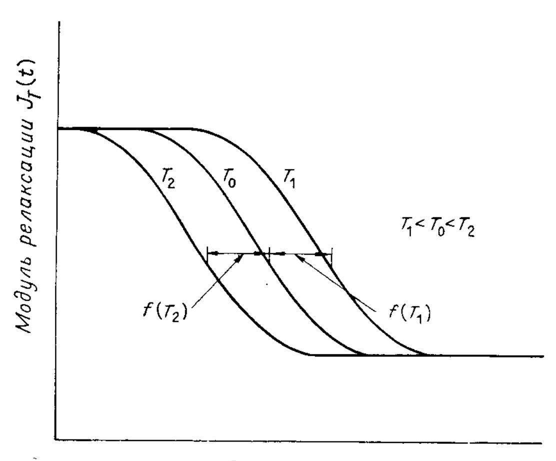


Рис. 19.1. Явление смещения для термореологически простых материалов.

мер, $J(t-s)$ запишем в виде $E_T(\ln t)$. Тогда свойство смещения выражается равенством

$$E_T(\ln t) = E_{T_0}[\ln t + f(T)], \tag{19.49}$$

где $f(T)$ — функция смещения относительно T_0, такая, что $df/dT > 0$ и $f(T_0) = 0$. Оно означает, что кривая модуля релаксации при увеличении T сдвигается к меньшим временам, как показано на рис. 19.1. Если ввести *коэффициент смещения* $b(T)$ формулой

$$b(T) = \exp f(T), \tag{19.50}$$

то модуль релаксации $J_T(t)$ при постоянной температуре T будет удовлетворять условию

$$\begin{aligned} J_T(t) &\equiv E_T(\ln t) = E_{T_0}[\ln t + \ln b(T)] = \\ &= E_{T_0}\{\ln[tb(T)]\} = J_{T_0}(\zeta). \end{aligned} \tag{19.51}$$

Величина

$$\zeta = tb(T) \tag{19.52}$$

называется *приведенным временем*. Если удается обратить (19.52) и получить $t = g(\zeta)$, то (19.48) можно переписать в виде

$$\hat{t}^{ij} = \int_0^\zeta J(\zeta - \hat{s}) \frac{\partial \hat{\gamma}'_{ij}}{\partial \hat{s}} d\hat{s} + \frac{1}{3}\delta^{ij} \int_0^\zeta K(\zeta - \hat{s}) \frac{\partial \hat{\gamma}}{\partial \hat{s}} d\hat{s}, \tag{19.53}$$

где $\hat{t}^{ij}(\mathbf{x}, \zeta) = t^{ij}[\mathbf{x}, g(\zeta)]$, $\hat{\gamma}'_{ij}(\mathbf{x}, \zeta) = \gamma'_{ij}[\mathbf{x}, g(\zeta)]$, $\hat{\gamma}(\mathbf{x}, \zeta) = \gamma[\mathbf{x}, g(\zeta)]$ и $\hat{s} = \hat{f}(s)$. Таким образом, будучи преобразованы к приведенно-

му времени, определяющие уравнения для термореологически простого материала принимают такой же вид, как в изотермическом случае.

Хотя приведенные выше рассуждения относятся лишь к частному случаю линейного поведения тела при различных постоянных температурах, основные идеи можно обобщить на случай конечных деформаций тел при неустановившихся и непостоянных в пространстве температурах [1]). Если, например, предположить, что свойства релаксации в частице x зависят лишь от текущей температуры $T(\mathbf{x}, t)$ в этой частице, то можно постулировать, что приращение приведенного времени $\Delta\zeta$ связано с приращением реального времени Δt соотношением $\Delta\zeta = b[T(\mathbf{x}, t)]\,\Delta t$. Тогда вместо (19.52) получаем

$$\zeta(\mathbf{x}, t) = \int_0^t b[T(\mathbf{x}, s)]\,ds. \tag{19.54}$$

Ясно, что при постоянной (во времени и в пространстве) температуре (19.54) сводится к (19.52). Тэйлор, Пистер и Гудро [1970] предложили другой вариант, согласно которому приведенное время ζ зависит от предысторий как температуры, так и скорости ее изменения:

$$\hat{\zeta}(\mathbf{x}, t) = \int_0^t \hat{b}\left[T(\mathbf{x}, s), \frac{\partial T(\mathbf{x}, s)}{\partial s}\right] ds. \tag{19.55}$$

Возможны и другие обобщения.

В качестве характерного примера определяющего функционала для свободной энергии термореологически простого материала приведем функционал, рассмотренный Костом [1969, стр. 55] [2]):

$$\Phi[-] = \Phi_0 + \int_0^\zeta D^{ij}(\zeta - \hat{s})\frac{\partial\hat{\gamma}_{ij}}{\partial\hat{s}}\,d\hat{s} - \int_0^\zeta f(\zeta - \hat{s})\frac{\partial\hat{T}}{\partial\hat{s}}\,d\hat{s} +$$

$$+ \frac{1}{6}\delta^{ij}\delta^{mn}\int_0^\zeta\int_0^\zeta [3K(\zeta - \hat{s}_1, \zeta - \hat{s}_2) - 2G(\zeta - \hat{s}_1, \zeta - \hat{s}_2)] \times$$

$$\times \frac{\partial\hat{\gamma}_{ij}}{\partial\hat{s}_1}\frac{\partial\hat{\gamma}_{mn}}{\partial\hat{s}_2}\,d\hat{s}_1\,d\hat{s}_2 +$$

---

[1]) Обобщение теории термореологически простых материалов на случай нелинейных сред было осуществлено Лианисом [1968], и эта обобщенная теория была успешно применена при описании конечных деформаций стиролбутадиенового каучука в экспериментах Мак-Гуирта и Лианиса [1969].

[2]) Этот вид функционала является обобщением предложенного Кристенсеном и Нахди [1967].

$$+\frac{1}{4}(\delta^{ij}\delta^{mn}+\delta^{im}\delta^{jn})\int_0^\zeta\int_0^\zeta 2G(\zeta-\hat{s}_1,\ \zeta-\hat{s}_2)\frac{\partial\hat{\gamma}_{ij}}{\partial\hat{s}_1}\frac{\partial\hat{\gamma}_{mn}}{\partial\hat{s}_2}d\hat{s}_1\,d\hat{s}_2-$$

$$-\delta^{ij}\int_0^\zeta\int_0^\zeta 3\alpha K(\zeta-\hat{s}_1,\ \zeta-\hat{s}_2)\frac{\partial\hat{\gamma}_{ij}}{\partial\hat{s}_1}\frac{\partial\hat{T}}{\partial\hat{s}_2}d\hat{s}_1\,d\hat{s}_2-$$

$$-\frac{1}{2}\int_0^\zeta\int_0^\zeta \mathscr{M}(\zeta-\hat{s}_1,\ \zeta-\hat{s}_2)\frac{\partial\hat{T}}{\partial\hat{s}_1}\frac{\partial\hat{T}}{\partial\hat{s}_2}d\hat{s}_1\,d\hat{s}_2, \qquad (19.56)$$

где для компактности записи все величины преобразованы к приведенному времени, т. е. $\hat{\gamma}_{ij}(\mathbf{x},\ \zeta)=\gamma_{ij}[\mathbf{x},\ g(\zeta)]$, $\hat{T}(\mathbf{x},\ \zeta)=T[\mathbf{x},\ g(\zeta)]$, $\hat{\varphi}(\mathbf{x},\ \zeta)=\varphi[\mathbf{x},\ g(\zeta)]$, $t=g(\zeta)$, $\zeta=\hat{f}(t)$ определяется соотношением (19.54), $\hat{s}_1=\hat{f}(s_1)$, $\hat{s}_2=\hat{f}(s_2)$. В (19.56) функции $D^{ij}(\ )$, $K(\ ,\ )$, $G(\ ,\ )$ и $\mathscr{M}(\ ,\ )$ — это ядра, характеризующие материал, а α — постоянная материала. Приводя (19.56) к реальному времени и пренебрегая членами, обусловленными $\partial T(\mathbf{x},\ t)/\partial x_i$, после подстановки (19.56) в (19.36) и выполнения дифференцирования получаем такие выражения для t^{ij}, ξ и σ:

$$t^{ij}=D^{ij}(0)+\delta^{im}\delta^{jn}\int_0^t 2G[f(t)-\hat{s}]\frac{\partial\gamma_{mn}}{\partial\hat{s}}d\hat{s}+$$

$$+\frac{1}{3}\delta^{ij}\int_0^t M[f(t)-\hat{s}]\frac{\partial\gamma_{kk}}{\partial\hat{s}}d\hat{s}-\delta^{ij}\int_0^t \alpha 3K[f(t)-\hat{s}]\frac{\partial T}{\partial\hat{s}}d\hat{s}, \qquad (19.57а)$$

$$\xi=f(0)+3\alpha K(0)\gamma_{ii}+\mathscr{M}(0)T(t)-$$

$$-\int_0^t\frac{\partial}{\partial\hat{s}}[3\alpha K(\hat{s})]\gamma_{ii}(f(t)-\hat{s})d\hat{s}-\int_0^t\frac{\partial}{\partial\hat{s}}[\mathscr{M}(\hat{s})]T(f(t)-\hat{s})d\hat{s}, \qquad (19.57б)$$

$$\sigma=-\frac{1}{6}\int_0^t\int_0^t\frac{\partial}{\partial t}\{M[f(t)-\hat{s}_1,\ f(t)-\hat{s}_2]\}\frac{\partial\gamma_{ii}}{\partial\hat{s}_1}\frac{\partial\gamma_{jj}}{\partial\hat{s}_2}d\hat{s}_1\,d\hat{s}_2-$$

$$-\frac{1}{2}\int_0^t\int_0^t\frac{\partial}{\partial t}\{2G[f(t)-\hat{s}_1,\ f(t)-\hat{s}_2]\}\frac{\partial\gamma_{ij}}{\partial\hat{s}_1}\frac{\partial\gamma_{ij}}{\partial\hat{s}_2}d\hat{s}_1\,d\hat{s}_2+$$

$$+\int_0^t\int_0^t\frac{\partial}{\partial t}\{3\alpha K[f(t)-\hat{s}_1,\ f(t)-\hat{s}_2]\}\frac{\partial\gamma_{ii}}{\partial\hat{s}_1}\frac{\partial T}{\partial\hat{s}_2}d\hat{s}_1\,d\hat{s}_2+$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^t\int_0^t\frac{\partial}{\partial t}\{\mathscr{M}[f(t)-\hat{s}_1,\ f(t)-\hat{s}_2]\}\frac{\partial T}{\partial\hat{s}_1}\frac{\partial T}{\partial\hat{s}_2}\cdot d\hat{s}_1\,d\hat{s}_2. \qquad (19.57в)$$

В этих соотношениях $K(s) = K(0, s)$, $G(s) = G(0, s)$, $M(s) = M(0, s) \equiv 3K(0, s) - 2G(0, s)$ и $\mathscr{M}(s) = \mathscr{M}(0, s)$. Ясно, что $D^{ij}(0)$ — начальные напряжения в материале. Ядра $K(s)$ и $G(s)$ — это объемный и сдвиговый модули релаксации, α — коэффициент линейного температурного расширения, а $\mathscr{M}(0)\,T$ связано с удельной теплоемкостью материала. Заметим, что хотя сами соотношения (19.57) применимы лишь к случаю бесконечно малых деформаций твердых тел при малых градиентах температуры, вводя функцию $\zeta = \hat{f}(t)$, можно получить определяющие уравнения, существенно нелинейные относительно $T(\mathbf{x}, t)$.

Термоупругость. Важный класс простых материалов характеризуется свободной энергией, зависящей лишь от текущих значений γ_{ij} и T, а не от их предысторий. Такие материалы называют *термоупругими* [1]). Рассмотрим, например, случай, когда свободная энергия на единицу недеформированного объема изотропного термоупругого твердого тела является дифференцируемой функцией от текущих деформации $\gamma_{ij}(t)$ и температуры $T(\mathbf{x}, t) = \theta(\mathbf{x}, t)\cdot T_0$:

$$\varphi(\mathbf{x}, t) = \Phi(\gamma_{ij}, T). \tag{19.58}$$

Тогда в соответствии с (19.36а) и (19.36б) [2])

$$t^{ij} = \frac{\partial\Phi(\gamma_{ij}, T)}{\partial\gamma_{ij}}, \qquad \xi = -\frac{\partial\Phi(\gamma_{ij}, T)}{\partial T}, \tag{19.59а, б}$$

а из (19.36в) следует, что для термоупругих тел

$$\sigma = 0. \tag{19.59в}$$

Поступая так же, как при получении соотношений (19.42), рассмотрим однородное изотропное твердое тело, для которого $\Phi(\;)$ есть аналитическая функция от T и некоторых инвариантов тензора γ_{ij}, например

$$\varphi = \Phi(J_1, J_2, J_3, T), \tag{19.60}$$

где

$$J_1 = \gamma_{ii},\quad J_2 = 1/2\,(\gamma_{ii}\gamma_{jj} - \gamma_{ij}\gamma_{ij}),\quad J_3 = \det\gamma_{ij}. \tag{19.61}$$

[1]) См. (15 22) и (15.23). Теория термоупругости возникла более века назад в работе Дюамеля [1837]. Линейная теория подробно изложена в различных книгах и обзорных статьях, например у Боли и Уэйнера [1960], Чэдвика [1960], Новацкого [1962], Паркуса [1964, 1968] и Джонса [1965].

[2]) Поскольку предполагается существование дифференцируемой потенциальной функции $\Phi(\gamma, T)$, было бы более точно называть материал, описываемый соотношениями (19.59), «гипертермоупругим».

Разлагая (19.60) в степенной ряд по T и инвариантам деформаций [1]), получаем

$$\Phi = a_0 + a_1 J_1 + a_2 J_2 + a_3 J_3 + a_4 T + a_5 J_1^2 + a_6 J_1^3 + \\ + a_7 T^2 + a_8 J_1 T + a_9 J_1 J_2 + a_{10} J_1 T^2 + a_{11} J_2 T + \\ + a_{12} T^3 + a_{13} J_1^2 T + a_{14} J_1^4 + a_{15} J_2^2 + a_{16} J_1 J_3 + \ldots, \quad (19.62)$$

где $a_0, a_1, \ldots$ — постоянные материала. Для простоты ограничимся рассмотрением свободных от напряжений в недеформированном состоянии материалов, свободная энергия которых является функцией, не содержащей членов выше четвертого порядка относительно деформаций и третьего относительно приращений температуры. В этом случае a_0 и a_{17}, a_{18}, a_{19}, . . . равны нулю. Отметим, что при определении класса таких материалов не делается никаких предположений относительно величин деформаций и температуры, просто выделяется класс термоупругих материалов, функции свободной энергии которых имеют указанный вид.

В случае термоупругости при конечных деформациях приемлемые теории могут быть построены при использовании относительно простых форм функции свободной энергии. Например, один из несжимаемых термоупругих материалов типа Муни характеризуется функцией свободной энергии вида

$$\Phi = a_1 J_1 + a_2 J_2 + a_7 T^2 + a_8 J_1 T, \quad (19.63)$$

где

$$a_1 = 2(C_1 + 2C_2), \qquad a_2 = 4C_2 \quad (19.64)$$

и C_1, C_2 — обычные постоянные Муни для изотермического случая. Кроме этого, должно удовлетворяться следующее условие несжимаемости:

$$J_3 + \frac{1}{4} J_1 + \frac{1}{2} J_2 = 0. \quad (19.65)$$

В соответствии с (19.59а, б) и (15.58) напряжения и энтропия задаются соотношениями

$$t^{ij} = a_1 \delta^{ij} + a_2 (J_1 \delta^{ij} - \delta^{im}\delta^{jn}\gamma_{mn}) + \delta^{ij} a_8 T + \\ + h [2\delta^{ij}(1 + 4J_2) + 4J_1(\delta^{ij} - 2\delta^{im}\delta^{jn}\gamma_{mn}) + 4\delta^{im}\delta^{jn}\gamma_{mk}(2\gamma_{nk} - \delta_{nk})], \quad (19.66а)$$

$$\xi = -2a_7 T - a_8 \gamma_{ii}, \quad (19.66б)$$

где h — произвольное гидростатическое давление.

Если градиенты перемещений удовлетворяют неравенству $|u_{i,j}| \ll 1$, то справедливы классические соотношения $2\gamma_{ij} =$

[1]) Подобные разложения использовались Диллоном [1962] при формулировании нелинейной теории термоупругости. Другие законы связи напряжений с деформациями для термоупругих тел предложены Рейнером [1958] и Йиндрой [1959]. Данное здесь изложение основано на работе Одена [1969г], см. также Оден и Поу [1970].

$= u_{i,j} + u_{j,i}$ между деформациями и перемещениями и в качестве характеристики физически нелинейного термоупругого твердого тела можно использовать

$$\Phi = a_2 J_2 + a_3 J_3 + a_5 J_1^2 + a_6 J_1^3 + a_7 T^2 + a_8 J_1 T + a_9 J_1 J_2 + \\ + a_{10} J_1 T^2 + a_{11} J_2 T + a_{12} T^3 + a_{13} J_1^2 T + a_{14} J_1^4 + a_{15} J_2^2 + a_{16} J_1 J_3. \tag{19.67}$$

Здесь предположено, что члены выше четвертого порядка не дают существенного вклада в свободную энергию. В этом случае

$$t^{ij} = \delta^{ij} [a_2 J_1 + a_3 J_2 + 2a_5 J_1 + 3a_6 J_1^2 + a_8 T + a_9 J_2 + a_9 J_1^2 + a_{10} T^2 + \\ + a_{11} T J_1 + 2a_{13} J_1 T + 4a_{14} J_1^3 + 2a_{15} J_1 J_2 + a_{16} J_3 + a_{16} J_2 J_1] - \\ - \gamma_{ij} (a_2 + a_3 J_1 + a_9 J_1 + a_{11} T + 2a_{15} J_2 + a_{16} J_1^2) + \gamma_{ik} \gamma_{jk} (a_3 + a_{16} J_1), \tag{19.68а}$$

$$-\xi = 2a_7 T + a_8 J_1 + 2a_{10} J_1 T + a_{11} J_2 + 3a_{12} T^2 + a_{13} J_1^2. \tag{19.68б}$$

Отмечая, что определяющие уравнения (19.68) слишком сложны для практических применений в задачах исследования напряжений, Диллон [1962] [1]) предложил упрощенный вариант представления (19.67), основанный на следующих предположениях и опытных фактах:

1. Предполагается, что линеаризованный вариант соотношений (19.68) совпадает с классическими соотношениями, описывающими линейное изотропное термоупругое твердое тело. Тогда

$$a_2 = -2\mu, \quad a_5 = {}^1/_2 (\lambda + 2\mu), \quad a_8 = -\alpha (3\lambda + 2\mu), \\ -2Ta_7 = c, \tag{19.69}$$

   где λ и μ — постоянные Ламе, α — коэффициент линейного температурного расширения и c — удельная теплоемкость при постоянной деформации. [Заметим, что соотношение $a_7 = -c/2T$ несовместимо с соотношением (19.68б), которое было выведено в предположении независимости a_7 от T, однако это противоречие существует и в линейной теории, где c вводится как постоянная, удовлетворяющая условию $\nabla \cdot \mathbf{q} = cT$ при постоянной деформации.]
2. Удельная теплоемкость дается формулой

$$c_d = c - 2(T + T_0)(3a_{12} T + a_{10} J_1). \tag{19.70}$$

   Предполагается, что $c_d = c = \text{const}$, так что $a_{10} = a_{12} = 0$.
3. Если нагрев материала при сжатии равен по величине охлаждению при растяжении, то требуется, чтобы $a_{13} = 0$.

[1]) Приводимые результаты, а именно (19.71) и (19.72), представляют собой незначительное обобщение результатов Диллона.

4. Эксперименты на многих материалах типа металлов показывают, что соотношение между дилатационными компонентами напряжения и деформации линейно в бо́льшей области, чем соотношение между девиаторными компонентами. На основании этого члены четвертого и более высоких порядков относительно деформации опускаются ($a_{14} = a_{15} = a_{16} = 0$), но член $a_{11}J_2T$ сохраняется, так как он представляет собой нелинейную составляющую девиатора деформации.

При этих упрощающих предположениях выражение для функции Ф ( ) сводится к

$$\Phi = -2\mu J_2 + a_3 J_3 + \frac{1}{2}(\lambda + 2\mu) J_1^2 + a_6 J_1^4 + a_7 T^2 - \\ -\alpha(3\lambda + 2\mu) J_1 T + a_9 J_1 J_2 + a_{11} J_2 T. \qquad (19.71)$$

Таким образом,

$$t^{ij} = \delta^{ij}[\lambda J_1 a_3 J_2 + 3a_6 J_1^2 - \alpha(3\lambda + 2\mu) T + a_9(J_2 + J_1^2) + a_{11} J_1 T] + \\ + \gamma_{ij}(2\mu - a_3 J_1 - a_9 J_1 - a_{11} T) + a_3 \gamma_{ik}\gamma_{jk}, \qquad (19.72а)$$

$$\xi = -2a_7 T + \alpha(3\lambda + 2\mu) J_1 - a_{11} J_2. \qquad (19.72б)$$

Соотношения (19.71) и (19.72) выписаны только как пример одной из возможных упрощенных форм определяющих уравнений для нелинейных термоупругих тел. Отбрасывая или сохраняя те или иные члены в степенном разложении (19.62), можно получить ряд других форм функции свободной энергии, приводящих к нелинейным определяющим уравнениям для напряжений и энтропии. Вопрос о том, какая из форм больше подходит для заданного материала, может быть решен лишь на основе экспериментов. При отбрасывании нелинейных членов уравнения (19.71) и (19.72) сводятся к классическим уравнениям линейной изотропной термоупругости. Полагая $a_3 = a_6 = a_9 = 0$, получаем уравнения для нелинейного относительно девиаторных деформаций материала, описанного Диллоном [1962]. Случай, когда либо a_3, либо a_6, либо $a_9 \neq 0$, соответствует материалу с умеренно нелинейными дилатационными свойствами. При чисто дилатационных деформациях выражение для ξ совпадает с выражением, используемым в классической теории.

20. КОНЕЧНОЭЛЕМЕНТНЫЕ МОДЕЛИ НЕЛИНЕЙНОГО ТЕРМОМЕХАНИЧЕСКОГО ПОВЕДЕНИЯ СПЛОШНЫХ СРЕД

В этом параграфе строятся конечноэлементные модели термомеханического поведения твердых тел и рассматриваются их приложения к характерным задачам нелинейной термо-вязко-упругости и термоупругости.

20.1. КОНЕЧНЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ МАТЕРИАЛОВ С ПАМЯТЬЮ [1])

Пусть $u_i^{(e)}(\mathrm{x},\ t)=\psi_N^{(e)}(\mathrm{x})\,u_{i(e)}^N(t)$ и $T^{(e)}(\mathrm{x},\ t)=\varphi_N^{(e)}(\mathrm{x})\,T_{(e)}^N(t)$ — локальные аппроксимации полей перемещений и приращений температуры на типичном элементе e конечноэлементной модели термомеханически простого тела, и пусть для этого элемента $\overset{\infty}{\underset{s=0}{\varphi^{(e)}}}[\,-\,]$, $\overset{\infty}{\underset{s=0}{\mathfrak{T}^{ij}_{(e)}}}[\,-\,]$, $\overset{\infty}{\underset{s=0}{\mathcal{N}^{(e)}}}[\,-\,]$ и $\overset{\infty}{\underset{s=0}{Q^i_{(e)}}}[\,-\,]$ — определяющие функционалы для соответственно свободной энергии на единицу начального объема, тензора напряжений, энтропии на единицу начального объема и теплового потока. В силу соображений, высказанных в предыдущем параграфе, мы предпочитаем выражать $\overset{\infty}{\underset{s=0}{\varphi^{(e)}}}[\,-\,]$ через прошлые предыстории $\gamma^t_{r(e)}$, $\theta^t_{r(e)}$ деформации и температуры и их текущие значения $\gamma^t_{(e)}(0)$, $\theta^t_{(e)}(0)$. Заметим, что полные предыстории деформации и температуры для нашего конечного элемента можно записать в таком виде (мы временно для простоты опускаем идентификационную метку элемента e):

$$\gamma^t_{ij}(s)=\frac{1}{2}\,[\psi_{N,\,i}u_j^{N(t)}(s)+\psi_{N,\,j}u_i^{N(t)}(s)+\psi_{N,\,i}\psi_{M,\,j}u_k^{N(t)}(s)\,u_k^{M(t)}(s)], \tag{20.1}$$

$$\theta^t(s)=T_0+\varphi_N T^{N(t)}(s), \tag{20.2}$$

[1]) Задачи вязкоупругости, ползучести, термоупругости и термо-вязкоупругости в конечноэлементной подстановке исследовались целым рядом авторов. Среди первых работ по ползучести и термоупругости укажем работы Пэдлога, Хаффа и Холловея [1960], Тэрнера, Дилла, Мартина и Мелоша [1960], Галлагера [1961], Галлагера, Куинна и Пэдлога [1961], Галлагера, Пэдлога и Бейларда [1962], Уоррена [1962]. См. также обзор Уоррена, Кастла и Глории [1962].

Исследованием задач линейной вязкоупругости с помощью метода конечных элементов занимались Кинг [1965], Чанг [1966], Уайт [1969] и другие авторы, а конечноэлементные модели изотермических задач для нелинейных вязкоупругих тел рассматривали Оден [1967а, 1970а] и Донг, Пистер и Данхэм [1968]. Линейную задачу теплопроводности изучали с использованием конечных элементов Вильсон и Никелл [1966] и Беккер и Парр [1967]; одна нелинейная задача теплопроводности была решена Агирре-Рамиресом и Оденом [1969].

Неустановившееся линейное термоупругое поведение твердых тел при заданных температурных полях изучал Виссер [1966], а Фудзино и Осака [1969] исследовали методом конечных элементов теплопроводность и распределение температур в твердых телах; см. также Бесселинг [1966]. Задачи неустановившейся связанной линейной термоупругости рассматривались Никеллом и Сэкмэном [1968] и Оденом и Кроссом [1969], а решения ряда нелинейных задач динамической связанной термоупругости были получены Оденом [1969] и Одевом и Поу [1970]. Построением общих конечноэлементных моделей термомеханического поведения простых материалов занимались Оден и Агирре-Рамирес [1969] и Оден [1970б]. Конечноэлементный анализ вопросов, связанных с теплопроводностью и движением термовязкоупругих материалов, был дан Тэйлором и Чангом [1966], Тэйлором, Пистером и Гудро [1970], Костом [1969], Оденом и Армстронгом [1971], Оденом [1971г].

где подразумевается, что $\gamma_{ij}^t(s)$, $\psi_{N,i}$, $\theta^t(s)$ и φ_N являются функциями от $\mathbf{x}$. В формулах (20.1) и (20.2) $u_i^{N(t)}(s)$ и $T^{N(t)}(s)$ — предыстории узловых значений компонент перемещений и изменения температуры (отклонений от некоторой постоянной во времени и в пространстве отсчетной температуры T_0) в узле N элемента. Следовательно, в соответствии с (19.36) определяющие уравнения для элемента можно записать с помощью функционалов от предысторий u_i^N и T^N:

$$\varphi^{(e)} = \overset{\infty}{\underset{s=0}{\Upsilon^{(e)}}} [\mathbf{u}_r^{N(t)}, T_r^{N(t)}; \mathbf{u}^N, T^N], \tag{20.3а}$$

$$t_{(e)}^{ij} = \overset{\infty}{\underset{s=0}{\mathfrak{S}_{(e)}^{ij}}} [\mathbf{u}_r^{N(t)}, T_r^{N(t)}; \mathbf{u}^N, T^N], \tag{20.3б}$$

$$\xi_{(e)} = \overset{\infty}{\underset{s=0}{\mathfrak{H}_{(e)}}} [\mathbf{u}_r^{N(t)}, T_r^{N(t)}; \mathbf{u}^N, T^N], \tag{20.3в}$$

$$q_{(e)}^i = \overset{\infty}{\underset{s=0}{\mathfrak{Q}_{(e)}^i}} [\mathbf{u}_r^{N(t)}, T_r^{N(t)}; \mathbf{u}^N, T^N]. \tag{20.3г}$$

Здесь $\mathbf{u}_r^{N(t)}$, $T_r^{N(t)}$ — ограничения $\mathbf{u}^N(t-s)$, $T^N(t-s)$ на $(0, \infty)$,

$$\overset{\infty}{\underset{s=0}{\Upsilon^{(e)}}} [\mathbf{u}^{N(t)}, T^{N(t)}] = \overset{\infty}{\underset{s=0}{\Phi^{(e)}}} \{\gamma_r^t(\mathbf{x}, \mathbf{u}_r^{N(t)}), \theta_r^t(\mathbf{x}, T_r^{N(t)}); \gamma[\mathbf{x}, \mathbf{u}^{N(t)}(0)], \theta[\mathbf{x}, T^{N(t)}(0)]\}, \tag{20.4а}$$

$$\overset{\infty}{\underset{s=0}{\mathfrak{S}_{(e)}^{ij}}} [\mathbf{u}^{N(t)}, T^{N(t)}] = D_{\gamma_{ij}} \overset{\infty}{\underset{s=0}{\Phi^{(e)}}} \{\gamma_r^t(\mathbf{x}, \mathbf{u}_r^{N(t)}), \theta_r^t(\mathbf{x}, T_r^{N(t)}); \gamma[\mathbf{x}, \mathbf{u}^{N(t)}(0)], \theta[\mathbf{x}, T^{N(t)}(0)]\}, \tag{20.4б}$$

$$\overset{\infty}{\underset{s=0}{\mathfrak{H}_{(e)}}} [\mathbf{u}^{N(t)}, T^{N(t)}] = -D_\theta \overset{\infty}{\underset{s=0}{\Phi^{(e)}}} \{\gamma_r^t(\mathbf{x}, \mathbf{u}_r^{N(t)}), \theta_r^t(\mathbf{x}, T_r^{N(t)}); \gamma[\mathbf{x}, \mathbf{u}^{N(t)}(0)], \theta[\mathbf{x}, T^{N(t)}(0)]\}, \tag{20.4в}$$

$$\overset{\infty}{\underset{s=0}{\mathfrak{Q}_{(e)}^i}} [\mathbf{u}^{N(t)}, T^{N(t)}] = \overset{\infty}{\underset{s=0}{\mathfrak{D}_{(e)}^i}} \{\gamma_r^t(\mathbf{x}, \mathbf{u}_r^{N(t)}), \theta_r^t(\mathbf{x}, T_r^{N(t)}); \gamma[\mathbf{x}, \mathbf{u}^{N(t)}(0)], \theta[\mathbf{x}, T^{N(t)}(0)], T^{N(t)}\nabla\varphi_N(\mathbf{x})\} \tag{20.4г}$$

и для простоты введено обозначение $[\mathbf{u}_r^{N(t)}, T_r^{N(t)}; \mathbf{u}^N(t), T^N(t)] = [\mathbf{u}^{N(t)}, T^{N(t)}]$. Аналогично внутренняя диссипация для элемента задается соотношением

$$\sigma_{(e)} = \overset{\infty}{\underset{s=0}{\mathfrak{D}_{(e)}}} [\mathbf{u}_r^{N(t)}, T_r^{N(t)}; \mathbf{u}^N, T^N], \tag{20.5}$$

где

$$-\overset{\infty}{\underset{s=0}{\mathfrak{D}_{(e)}}}[-] = \delta_\gamma \overset{\infty}{\underset{s=0}{\Phi^{(e)}}}[+ \mid \dot{\mathbf{u}}_r^{N(t)}] + \delta_\theta \overset{\infty}{\underset{s=0}{\Phi^{(e)}}}[+ \mid \dot{T}_r^{N(t)}]. \tag{20.6}$$

Здесь использовано обозначение

$$[+\,|\,\dot{\mathbf{u}}_r^{N(t)}] = \{\gamma_r^t(\mathbf{x},\ \mathbf{u}_r^{N(t)}),\ \theta_r^t(\mathbf{x},\ T_r^{N(t)});$$

$$\gamma[\mathbf{x},\ \mathbf{u}_r^{N(t)}(0)],\ \theta[\mathbf{x},\ T_r^{N(t)}(0)]\,|\,f_{N_{ij}}^{k(t)}(\mathbf{x},\ s)\,\dot{\mathbf{u}}_{k(r)}^{N(t)}\}, \qquad (20.7\text{а})$$

где $s \in (0,\ \infty)$,

$$f_{N_{ij}}^{k(t)}(\mathbf{x},\ s) = \frac{1}{2}\,\psi_{N,\ m} z_{k,\ n}^t(s)\,(\delta_{jn}\delta_{mi} + \delta_{in}\delta_{jm}) \qquad (20.7\text{б})$$

и $z_{k,\ n}^t(s)$ — предыстории градиентов перемещений:

$$z_{k,\ n}^t(s) = \delta_{nk} + \psi_{M,\ n} u_k^{M(t)}(s). \qquad (20.7\text{в})$$

Массив (20.7б) дает возможность рассмотреть преобразование

$$\dot{\gamma}_{ij(r)}^t = -\frac{d}{ds}\,\gamma_{ij(r)}^t(s) = -\frac{\partial\gamma_{ij}}{\partial u_k^N}\,\frac{du_{k(r)}^{N(t)}}{ds} = -f_{N_{ij}}^{k(t)}\dot{u}_{k(r)}^{N(t)}(s). \qquad (20.8)$$

Подставляя (20.3) и (20.5) в (13.60) и (13.117), получаем общие уравнения движения и теплопроводности для конечных элементов термомеханически простых сред:

$$m_{NM}\ddot{u}_i^M + \int\limits_{v_{0(e)}} \mathop{\mathfrak{S}_{(e)}^{mj}}_{s=0}^{\infty} [\mathbf{u}^{N(t)},\ T^{N(t)}]\,\psi_{N,\ m}(\delta_{ji} + \psi_{M,\ j} u_i^M)\,dv_0 = p_{Ni}, \qquad (20.9)$$

$$\int\limits_{v_{0(e)}} \Big\{ \varphi_N (T_0 + \varphi_M T^M)\,\frac{d}{dt} \mathop{\mathfrak{H}_{(e)}}_{s=0}^{\infty} [\mathbf{u}^{N(t)},\ T^{N(t)}] +$$

$$+ \varphi_{N,\ i} \mathop{\mathfrak{Q}_{(e)}^{i}}_{s=0}^{\infty} [\mathbf{u}^{N(t)},\ T^{N(t)}] \Big\}\,dv_0 = q_N + \sigma_N, \qquad (20.10)$$

где p_{Ni} и q_N — компоненты обобщенных сил и нормальные компоненты теплового потока в узле N, задаваемые формулами (13.54) и (13.115), а обобщенная диссипация σ_N в узле (13.116) определяется по формуле

$$\sigma_N = \int\limits_{v_{0(e)}} \mathop{\mathfrak{D}_{(e)}}_{s=0}^{\infty} [\mathbf{u}^{N(t)},\ T^{N(t)}]\,\varphi_N\,dv_0. \qquad (20.11)$$

Поскольку глобальные формы этих уравнений получаются непосредственно применением соотношений (13.74) — (13.77) и (13.118) — (13.120), мы не будем их здесь приводить.

Интересно отметить, что (20.9) можно по аналогии с (16.131) переписать в виде

$$p_{Ni} = m_{NM}\ddot{u}_i^M + \int\limits_{v_{0(e)}} D_{u_i N} \mathop{\Phi^{(e)}}_{s=0}^{\infty} [\gamma^t,\ \theta^t]\,dv_0, \qquad (20.12)$$

где

$$D_{u_k^N} \overset{\infty}{\underset{s=0}{\Phi^{(e)}}} [\gamma^t, \theta^t] = D_{\gamma_{ij}} \overset{\infty}{\underset{s=0}{\Phi_{(e)}}} [\gamma_r^t, \theta_r^t; \gamma, \theta] \frac{\partial \gamma_{ij}}{\partial u_k^N} =$$

$$= \overset{\infty}{\underset{s=0}{\mathfrak{S}_{(e)}^{ij}}} [\mathbf{u}^{N(t)}, T^{N(t)}] \frac{\partial \gamma_{ij}}{\partial u_k^N}. \qquad (20.13)$$

Точно так же в (20.10) вместо $d \overset{\infty}{\underset{s=0}{\mathfrak{H}_{(e)}}} [\mathbf{u}^{N(t)}, T^{N(t)}]/dt$ можно использовать

$$\frac{d}{dt} D_{T^N} \overset{\infty}{\underset{s=0}{\Phi^{(e)}}} [\gamma^t, \theta^t] = D_\theta \overset{\infty}{\underset{s=0}{\Phi_{(e)}}} [\gamma_r^t, \theta_r^t; \gamma, \theta] \frac{\partial \theta}{\partial T^N} \dot{T}^N. \qquad (20.14)$$

Понятно, что в соотношениях (20.11) — (20.13) γ^t и θ^t должны быть выражены (или определены) через предыстории узловых величин $\mathbf{u}^{N(t)}$ и $T^{N(t)}$. Таким образом, конкретные формы уравнений движения и теплопроводности для элементов можно получать, непосредственно используя функционал свободной энергии и функционал теплового потока данного материала. В следующих пунктах рассматриваются приложения этих уравнений к некоторым задачам термо-вязко-упругости и неустановившейся термоупругости.

20.2. ПРИМЕНЕНИЕ К СЛУЧАЮ ТЕРМОРЕОЛОГИЧЕСКИ ПРОСТЫХ МАТЕРИАЛОВ

В случае термореологически простого материала, определяемого соотношениями (19.56), (19.57) и, скажем, (19.46), удобно преобразовать входящие в них величины к приведенному времени ζ. Если действительное (неприведенное) время можно выразить через приведенное, т. е. существует $g(\zeta) = t$, и $\hat{b}[\hat{\theta}(\mathbf{x}, \zeta)] = b[\theta(\mathbf{x}, t)]$— коэффициент смещения (19.50) (здесь $\theta = T_0 + T$), то для любой функции действительного времени t (и $\mathbf{x}$)

$$\dot{f}(\mathbf{x}, t) = \dot{\hat{f}}(\mathbf{x}, \zeta)\, \hat{b}[\hat{\theta}(\mathbf{x}, \zeta)], \qquad (20.15)$$

где $\dot{\hat{f}} = d\hat{f}/d\zeta$. Отсюда следует, что

$$\begin{aligned} \dot{u}_i^M &= \hat{b}(\hat{\theta})\, \dot{\hat{u}}_i^M, \\ \ddot{u}_i^M &= \hat{b}^2(\hat{\theta})\, \ddot{\hat{u}}_i^M + \hat{b}(\hat{\theta})\, \dot{\hat{b}}(\hat{\theta})\, \dot{\hat{u}}_i^M, \qquad (20.16) \\ \dot{\theta} &= \hat{b}(\hat{\theta})\, \dot{\hat{\theta}} \end{aligned}$$

и т. д. (подразумевается, что величины $\dot{\hat{u}}_i^M$, $\hat{\theta}$ и др. зависят от ζ). Подобные же соотношения имеют место для $\dot{\xi}$, Q^i и σ.

В качестве конкретного примера рассмотрим материал, определяемый соотношениями (19.46), (19.56) и (19.57). Предположим, что $\rho\theta\dot{\xi} \approx \rho T_0\dot{\xi}$ и $2\gamma_{ij} = u_{i,j} + u_{j,i}$. Тогда, преобразуя получающиеся уравнения к приведенному времени с помощью (20.15) и (20.16), мы приходим к следующим уравнениям движения и теплопроводности термореологически простого элемента в приведенном времени:

$$m^{(1)}_{NM}\ddot{\hat{u}}^M_k + m^{(2)}_{NM}\dot{\hat{u}}^M_k + a^i_{NMk}\int_0^\zeta 2G(\zeta-\hat{s})\frac{\partial\hat{u}^M_i}{\partial\hat{s}}d\hat{s} + b^i_{NMk}\int_0^\zeta [3K(\zeta-\hat{s}) - 2G(\zeta-\hat{s})]\frac{\partial\hat{u}^M_i}{\partial\hat{s}}d\hat{s} - e_{NMk}\int_0^\zeta 3K(\zeta-\hat{s})\frac{\partial\hat{T}^M}{\partial\hat{s}}d\hat{s} = \hat{p}_{Nk}(\zeta), \tag{20.17}$$

$$h^{(1)}_{MN}\dot{\hat{T}}^N + h^{(2)i}_{MN}\dot{\hat{u}}^N_i + h^{(3)}_{MN}\int_0^\zeta \frac{\partial}{\partial\zeta}[\mathcal{M}(\zeta-\hat{s})]\frac{\partial\hat{T}^N}{\partial\hat{s}}d\hat{s} + h^{(4)i}_{MN}\int_0^\zeta \frac{\partial}{\partial\zeta}[3\hat{K}(\zeta-\hat{s})]\frac{\partial\hat{u}^N_i}{\partial\hat{s}}d\hat{s} + k_{MN}\int_0^\zeta \varkappa(\zeta-\hat{s})\frac{\partial\hat{T}^N}{\partial\hat{s}}d\hat{s} + d^{(1)ij}_{MNL}\int_0^\zeta\int_0^\zeta \frac{\partial}{\partial\zeta}[3K(\zeta-\hat{s}_1, \zeta-\hat{s}_2) - 2G(\zeta-\hat{s}_1, \zeta-\hat{s}_2)] \times \frac{\partial\hat{u}^N_i}{\partial\hat{s}_1}\frac{\partial\hat{u}^L_j}{\partial\hat{s}_2}d\hat{s}_1 d\hat{s}_2 + d^{(2)ij}_{MNL}\int_0^\zeta\int_0^\zeta \frac{\partial}{\partial\zeta}[2G(\zeta-\hat{s}_1, \zeta-\hat{s}_2)]\frac{\partial\hat{u}^N_i}{\partial\hat{s}_1}\frac{\partial\hat{u}^L_j}{\partial\hat{s}_2}d\hat{s}_1 d\hat{s}_2 - d^{(3)i}_{MNL}\int_0^\zeta\int_0^\zeta \frac{\partial}{\partial\zeta}[3K(\zeta-\hat{s}_1, \zeta-\hat{s}_2)]\frac{\partial\hat{u}^N_i}{\partial\hat{s}_1}\frac{\partial\hat{T}^L}{\partial\hat{s}_2}d\hat{s}_1 d\hat{s}_2 - d^{(4)}_{MNL}\int_0^\zeta\int_0^\zeta \frac{\partial}{\partial\zeta}[\mathcal{M}(\zeta-\hat{s}_1; \zeta-\hat{s}_2)]\frac{\partial\hat{T}^N}{\partial\hat{s}_1}\frac{\partial\hat{T}^L}{\partial\hat{s}_2}d\hat{s}_1 d\hat{s}_2 = \hat{q}_M(\zeta). \tag{20.18}$$

Здесь $\hat{s}=f(s)$, $\hat{f}$ — функция, определяемая соотношением (20.15), и

$$
\begin{aligned}
m_{NM}^{(1)} &= \int_{v_{0(e)}} \rho_0 \hat{b}^2 \psi_N \psi_M \, dv_0, \\
m_{NM}^{(2)} &= \int_{v_{0(e)}} \rho_0 \hat{b} \dot{\hat{b}} \psi_N \psi_M \, dv_0, \\
a_{NMk}^{i} &= \frac{1}{2} \int_{v_{0(e)}} \hat{b} \left(\psi_{M,\,j} \delta_{ik} + \psi_{M,\,i} \delta_{jk}\right) \psi_{N,\,j} \, dv_0, \\
b_{NMk}^{i} &= \frac{1}{3} \int_{v_{0(e)}} \hat{b} \psi_{M,\,k} \psi_{N,\,i} \, dv_0, \\
c_{NMk} &= \alpha \int_{v_{0(e)}} \hat{b} \psi_{M,\,k} \varphi_N \, dv_0, \\
h_{MN}^{(1)} &= T_0 m(0) \int_{v_{0(e)}} \varphi_M \varphi_N \, dv_0 = m(0)\, h_{MN}^{(3)}, \\
h_{MN}^{(2)i} &= 3\alpha T_0 K(0) \int_{v_{0(e)}} \varphi_M \varphi_{N,\,i} \, dv_0 = 3K(0)\, h_{MN}^{(4)i}, \\
k_{MN} &= \int_{v_{0(e)}} \varphi_{M,\,i} \varphi_{N,\,i} \, dv_0, \\
d_{MNL}^{(1)ij} &= \frac{1}{6} \int_{v_{0(e)}} \varphi_M \psi_{N,\,i} \psi_{L,\,j} \, dv_0, \\
d_{MNL}^{(2)ij} &= \frac{3}{2} d_{MLN}^{(1)ij} + \frac{1}{4} \delta^{ij} \int_{v_{0(e)}} \varphi_M \psi_{N,\,m} \psi_{L,\,m} \, dv_0, \\
d_{MNL}^{(3)i} &= \int_{v_{0(e)}} \alpha \varphi_M \psi_{N,\,i} \varphi_L \, dv_0, \\
d_{MNL}^{(4)} &= \frac{1}{2} \int_{v_{0(e)}} \varphi_M \varphi_N \varphi_L \, dv_0.
\end{aligned}
\tag{20.19}
$$

Чтобы получить численные решения уравнений (20.17) и (20.18), мы предположим, что ядра в интегралах, входящих в эти уравнения, относятся к ядрам материалов с затухающей памятью, т. е. материалов, на поведение которых в текущий момент времени несущественно влияют значения деформаций и температур в отдаленном прошлом. Выполнения этого свойства обычно достигают,

принимая, что ядро представимо в виде «распадного» ряда Прони; типичное ядро $K(\zeta)$ представляется в виде ряда

$$K(\zeta)=\sum_{i=1}^{n} K_i \exp\left(-\frac{\zeta}{\nu_i}\right), \tag{20.20}$$

где K_i и ν_i — экспериментально определяемые постоянные ($\nu_i > 0$) и $\zeta \geqslant 0$. Что касается ядер вида $G(\zeta, \zeta')$, то часто предполагают, что они удовлетворяют условию

$$G(\zeta-\zeta', \zeta-\zeta'')=\overline{G}(2\zeta-\zeta'-\zeta''), \tag{20.21}$$

так что в соответствии с (20.20) можно записать

$$\begin{gathered} G(\zeta-\zeta', \zeta-\zeta'')=\sum_{i=1}^{n} G_i \exp\left(\frac{-2\zeta+\zeta'+\zeta''}{\lambda_i}\right), \\ \frac{\partial G}{\partial \zeta'}(\zeta-\zeta', \zeta-\zeta'')=\sum_{i=1}^{n} \frac{G_i}{\lambda_i} \exp\left(\frac{-2\zeta+\zeta'+\zeta''}{\lambda_i}\right) \end{gathered} \tag{20.22}$$

и т. д., где λ_i — положительные постоянные.

Рассмотрим теперь типичный интеграл, входящий в записанные ранее определяющие уравнения; например,

$$IG_{Nj} \equiv \int_0^{\zeta} 2G(\zeta-\zeta') \frac{\partial \hat{u}_j^N}{\partial \zeta'} d\zeta'. \tag{20.23}$$

Удобное для численных аппроксимаций представление интеграла (20.23) можно получить, разбивая интервал приведенного времени $[0, \zeta]$ на r подынтервалов $[\zeta_m, \zeta_{m+1}]$, $m = 1, 2, \ldots, r+1$. Используя для ядра, входящего в (20.23), представление (20.20), имеем

$$IG_{Nj}=\sum_{i=1}^{r} G_i e^{-\zeta/\lambda_i} \sum_{m=1}^{r} \int_{\zeta_m}^{\zeta_{m+1}} e^{+\zeta'/\lambda_i} \frac{\partial \hat{u}_j^N}{d\zeta'} d\zeta'. \tag{20.24}$$

Если $h_m=\zeta_{m+1}-\zeta_m$ — шаг по времени, то интегралы в (20.24) можно приближенно вычислить с помощью правила Симпсона:

$$\begin{aligned} \int_{\zeta_m}^{\zeta_{m+1}} \frac{\partial \hat{u}_j^N}{\partial \zeta'} \cdot \exp\left(\frac{\zeta'}{\lambda_t}\right) d\zeta' \approx \frac{h_m}{6} \left\{ \frac{\partial \hat{u}_j^N(\zeta_m)}{\partial \zeta} \exp\left(\frac{\zeta_m}{\lambda_i}\right) + \right. \\ + 4\frac{\partial \hat{u}_j^N(\zeta_m+h_m/2)}{\partial \zeta} \exp\left[\frac{(\zeta_m+h_m/2)}{\lambda_i}\right] + \\ \left. + \frac{\partial \hat{u}_j^N(\zeta_m+h_m)}{\partial \zeta} \exp\frac{(\zeta_m+h_m)}{\lambda_i} \right\}. \end{aligned} \tag{20.25}$$

Далее производные $\partial \hat{u}_j^N/\partial\zeta$ надо заменить разностными аппроксимациями. Будем предполагать, что $\hat{u}_i^N$ между узлами $m-1$, m, $m+1$ меняется по квадратичному закону; тогда производные аппроксимируются с погрешностью $O(h^2)$. Подставляя разностные аппроксимации производных в (20.25), после перегруппировки членов получаем следующее выражение для интеграла (20.23):

$$IG_{Nj}=\sum_i G_i J_{ji}^N(u, \lambda), \tag{20.26}$$

где

$$J_{ji}^N(u, \lambda)=H(\hat{u}_j^N, \lambda_i)\exp\left[\frac{-(\zeta_r+h_r)}{\lambda_i}\right]+C(\hat{u}_j^N, \lambda_i), \tag{20.27а}$$

$$H(\hat{u}_j^N, \lambda_i)=\sum_{m=1}^{r-1}\left\{\frac{1}{12}(\hat{u}_{j(m+1)}^N-\hat{u}_{j(m-1)}^N)\exp\left(\frac{\zeta_m}{\lambda_i}\right)+\right.$$
$$+\frac{2}{3}(\hat{u}_{j(m+1)}^N-\hat{u}_{j(m)}^N)\exp\left[\frac{(\zeta_m+h_m/2)}{\lambda_i}\right]+$$
$$\left.+\frac{1}{12}(3\hat{u}_{j(m+1)}^N-4\hat{u}_{j(m)}^N+\hat{u}_{j(m-1)}^N)\exp\left(\frac{\zeta_m+h_m}{\lambda_i}\right)\right\}, \tag{20.27б}$$

$$C(\hat{u}_j^N, \lambda_i)=\frac{1}{12}(\hat{u}_{j(r+1)}^N-\hat{u}_{j(r-1)}^N)\exp\left(\frac{-\zeta_r}{\lambda_i}\right)+$$
$$+\frac{2}{3}(\hat{u}_{j(r+1)}^N-\hat{u}_{j(r)}^N)\exp\left[\frac{-(\zeta_r+h_r/2)}{\lambda_i}\right]+$$
$$+\frac{1}{12}(3\hat{u}_{j(r+1)}^N-4\hat{u}_{j(r)}^N+\hat{u}_{j(r-1)}^N)\exp\left[\frac{-(\zeta_r+h_r)}{\lambda_i}\right]. \tag{20.27в}$$

В (20.27а) предыстории $H(\hat{u}_j^N, \lambda_i)$ отделены от текущих значений $C(\hat{u}_j^N, \lambda_i)$, т. е. величина интеграла в текущий момент ζ_r+h_r получается добавлением к сумме, накопленной к моменту времени ζ_r, члена, соответствующего интервалу времени между ζ_r и ζ_r+h_r. Под $\hat{u}_{j(m)}^N$, $\hat{u}_{j(m-1)}^N$ и т. д. понимаются $\hat{u}_j^N(\zeta_m)$, $\hat{u}_j^N(\zeta_m-h_m)$ и т. д. При использовании обозначений (20.27) уравнения движения и теплопроводности термореологически простого конечного элемента принимают вид

$$\hat{p}_{Nj}=m_{MN}^{(1)}\ddot{\hat{u}}_j^M+m_{MN}^{(2)}\dot{\hat{u}}_j^M+(a_{MNj}^i-b_{MNj}^i)\sum_k G_k J_{ik}^M(u, \lambda)+$$
$$+b_{MNj}^i\sum_k K_k J_{ik}^M(u, \nu)-c_{MNj}\sum_k K_k J_k^M(T, \nu), \tag{20.28а}$$

$$\hat{q}_N=h_{MN}^{(1)}\dot{\hat{T}}^M+h_{MN}^{(2)i}\dot{\hat{u}}_i^M-3\alpha^2h_{MN}^{(3)}\sum_k\frac{K_k}{\nu_k}J_k^M(T, \nu)-$$

$$-h_{MN}^{(4)i} \sum_k \frac{K_k}{\nu_k} J_{ik}^M(u, \nu) - 2d_{MNL}^{(1)ij} \sum_k \frac{K_k}{\nu_k} J_{ik}^M(u, \nu) J_{jk}^L(u, \nu) +$$

$$+ 2(d_{NML}^{(1)ij} - d_{NML}^{(2)ij}) \sum_k \frac{G_k}{\lambda_k} J_{ik}^M(u, \lambda) J_{jk}^L(u, \lambda) +$$

$$+ 2d_{NML}^{(3)i} \sum_k \frac{K_k}{\nu_k} J_{ik}^M(u, \lambda) J_k^L(T, \nu) +$$

$$+ 6\alpha^2 d_{NML}^{(4)} \sum_k \frac{K_k}{\nu_k} J_k^M(T, \nu) J_k^L(T, \nu) + k_{NM} \sum_k E_k J_k^M(T, \varepsilon). \quad (20.28б)$$

После связывания элементов получается система существенно нелинейных дифференциальных уравнений относительно узловых значений $\hat{u}_i^N$, $\hat{T}^N$ и их предысторий.

Пример. Неустановившееся поведение термовязкоупругого толстостенного цилиндра [1]). В качестве иллюстрации применим (20.28) к задаче о бесконечно длинной толстостенной круговой цилиндрической трубе при заданных механических и температурных воздействиях на ее внутренней и наружной границах. Для конечноэлементной аппроксимации компонент перемещений и температуры воспользуемся симплексными аппроксимациями $\psi_N(r) = a_N + b_N r$, $n = 1, 2$, где a_N и b_N — постоянные, зависящие только от протяженности конечного элемента в радиальном направлении [для элемента, заключенного «между радиусами» r_1 и r_2, $a_1 = -a_2 = -1/(r_2 - r_1)$, $b_1 = r_2/(r_2 - r_1)$, $b_2 = r_1/(r_2 - r_1)$]. Подставляя эти интерполяционные функции в массивы (20.19), получаем все коэффициенты уравнений дискретной модели, не зависящие от свойств материала.

Далее надо определить вид функции смещения $b(\theta)$. Уильямсом, Лэнделом и Ферри [1955] для широкого класса полимеров, жидких полимеров, органических и неорганических стекол была предложена следующая эмпирическая формула для $b(\theta)$:

$$\lg b(\theta) = \frac{\alpha(\theta - T_0)}{\beta + \theta - T_0}.$$

Здесь α и β — постоянные. Согласно экспериментальным данным (Эринген [1967]), при $|\theta - T_0| \leqslant 50\,°C$ мы имеем $\alpha \approx 9$ и $\beta \approx 100$, так что если $T_0 = 0\,°C$, то

$$b(\theta) = 10^{9T/(100+T)}, \quad (20.29)$$

где для нашего конечного элемента $T = \varphi_N(r) T^N = (a_N + b_N r) T^N$. Переходя к приведенному времени, получаем

$$\hat{b}(\hat{\theta}) = 10^{\hat{\tau}}, \qquad \dot{\hat{b}} = (\hat{b} \ln 10)\, \dot{\hat{\tau}}, \quad (20.30а,б)$$

где

$$\hat{\tau} = \frac{9\varphi_N(r)\hat{T}^N}{100 + \varphi_L(r) T^L} \quad (20.30в)$$

и $\dot{\hat{T}}^N$ представляется, как и выше, с помощью разностей второго порядка.

---

1) Этот пример был рассмотрен Оденом и Армстронгом [1971]; см. также Оден, Чанг и Ки [1971].

При численном интегрировании текущее значение $\hat{b}$ $(\hat{\theta})$ считается постоянным на каждом шаге, так что $\hat{b}$ и $\hat{\tau}$ отстают от текущих значений на величину, соответствующую размеру текущего шага h_r. В конце каждого шага по времени значения $\hat{b}$ и $\hat{\tau}$ пересчитываются, и эти пересчитанные значения используются на следующем отрезке времени для определения узловых перемещений и температур. При этом матрицы массы $m^{(1)}_{MN}$ и $m^{(2)}_{MN}$ удается представить в особенно простом виде:

$$m^{(1)}_{MN}=2\pi M_{NM},\qquad m^{(2)}_{NM}=2\pi \ln(10)\,\dot{\hat{\tau}} M_{NM}, \tag{20.31а,б}$$

$$M_{NM}=\rho_0\left[\frac{a_N a_M (r_2^4-r_1^4)}{4}+\frac{(a_N b_M+a_M b_N)(r_2^3-r_1^3)}{3}+\frac{b_N b_M (r_2^2-r_1^2)}{2}\right]. \tag{20.31в}$$

Здесь принято $\varphi_N(r)\approx a_N+b_N(r_1+r_2)/2$. Аналогичным образом вычисляются и другие интегралы в уравнениях движения и теплопроводности.

Если пренебречь объемными силами и внутренними тепловыми источниками, то выражения для обобщенных сил и тепловых потоков принимают вид

$$\hat{p}_N=r_N(a_N+b_N r_N)\,S_N(\zeta),\qquad \hat{q}_N=r_N(a_N+b_N r_N)\,Q_N(\zeta) \tag{20.32а, б}$$

(по N суммирования нет), где $S_N(\zeta)$ и $Q_N(\zeta)$ — заданные функции приведенного времени. Можно также взять в качестве заданных произвольно зависящие от времени узловые перемещения и температуры. В задачах с конвективной теплопередачей полагаем

$$Q_N=f_N(\hat{T}-T_0^*), \tag{20.33}$$

где f_N — коэффициент теплопроводности в узле N и T_0^* — температура окружающей среды вблизи границы цилиндра [1]).

Завершим постановку задачи. Мы рассматриваем гипотетический материал, для которого $\rho_0=10^{-3}$ фунт сек^2/дюйм^4, $\alpha=10^{-5}$ дюйм/дюйм °C, ядро дилатационной релаксации $K(\zeta)=10\times10^5\exp(-\zeta/10^{-5})+5\times10^5\exp(-\zeta/\infty)$ фунт/дюйм^2, ядро сдвиговой релаксации $G(\zeta)=1\times10^5\exp(-\zeta/10^{-5})+0.1\times10^5\exp(-\zeta/\infty)$ фунт/дюйм^2 и ядро теплопроводности в законе наследственного типа (19.46) $\varkappa(\zeta)=0.10\exp(-\zeta/10^{-5})+0.01\exp(-\zeta/\infty)$ фунт/дюйм °C сек.

Теперь применим записанные выше соотношения для изучения поведения цилиндра с внутренним радиусом 10.0 дюйма и наружным радиусом 11.0 дюйма, стенка которого, имеющая толщину 1.0 дюйма, разбита на двадцать 0.05-дюймовых элементов. Систему нелинейных дифференциальных уравнений, описывающую поведение этой модели, интегрируем, используя упомянутую ранее явную квадратичную схему; однако вследствие наличия нелинейных членов наследственного типа на каждом шаге по времени получается система нелинейных алгебраических уравнений относительно текущих значений узловых перемещений и температур. В приводимых ниже примерах эти уравнения решались методом Ньютона — Рафсона.

Начальные значения для метода Ньютона — Рафсона определяются из начальных условий [если, например, $\hat{u}^N(\zeta_0)=\dot{\hat{u}}^N(\zeta_0)=\hat{T}^N(\zeta_0)=\dot{\hat{T}}^N(\zeta_0)=0$, то центрально-разностные аппроксимации производных $\dot{\hat{u}}^N$ и $\dot{\hat{T}}^N$ непосредственно позволяют выразить $\dot{\hat{u}}^N$, $\ddot{\hat{u}}^N$, $\dot{\hat{T}}^N$ и $\ddot{\hat{T}}^N$ в момент времени ζ_0+h через значения $\hat{u}^N$ и $\hat{T}^N$ при ζ_0+h]. Подсчитанные таким обра-

[1]) Более подробное обсуждение вопросов моделирования различных краевых условий можно найти у Одена и Кросса [1969].

вом начальные значения подставляются в (20.28), и в результате определяются перемещения и температуры при $\zeta_0 + h$ и величина τ (см. (20.30в)), которые используются на втором шаге по времени. На этом втором шаге для различных производных опять используется квадратичная аппроксимация $\dot{u}_{m+1} \approx (3\, u_{m+1} - 4u_m + u_{m-1})/2h$. Таким образом находятся начальные данные для итерационного процесса Ньютона — Рафсона. После того как процесс сойдется с заданной степенью точности, добавляется новое приращение приведенного времени и процесс продолжается.

Напряжения в элементах подсчитываются в конце каждого шага по времени путем подстановки узловых перемещений и температур в определяющие уравнения для напряжений (19.57а). Все величины (узловые перемещения, температуры и напряжения в элементе) подсчитываются в виде функций приведенного времени, а затем преобразуются к реальному времени с помощью соотношения $\Delta t = \Delta\zeta/\hat{b}\,[\theta\,(\zeta)]$, где $\Delta\zeta = h$ — приращение приведенного времени и $\hat{b}\,(\theta)$ определяется формулой (20.30а). Реальное время на $(r+1)$-м шаге равно, следовательно, $t_r + h/\hat{b}\,[\theta\,(\zeta)]$.

Отметим, однако, что $\hat{u}^N$ и $\hat{T}^N$ определяются для приведенного времени, отличного от приведенного времени, при котором определяются напряжения; а именно, коэффициент смещения для узловых значений $\hat{u}^N$ и $\hat{T}^N$ определяется изменением температуры одного-единственного узла, тогда как тензору напряжений отвечает коэффициент смещения, определяемый температурным полем всего элемента и потому зависящий от изменений температуры в каждой точке элемента. В первом случае мы просто полагаем приращение реального времени Δt^{Γ}, относящееся к узловым значениям $\hat{u}^{\Gamma}$, $\hat{T}^{\Gamma}$, равным $h/\hat{b}_{\Gamma}$, где $\hat{b}_{\Gamma}$ — (глобальное) значение $\hat{b}\,(\theta)$ в узле Г. Во втором случае (для напряжений) приращение реального времени $\Delta t_{(e)}$ для элемента e принимается равным $h/\hat{b}_{(e)}$, где $\hat{b}_{(e)}$ — среднее значение коэффициента смещения для элемента e.

В качестве примера рассмотрим динамическое поведение цилиндра при мгновенном нагружении давлением $p = 10h\,(t)$ фунт/дюйм² [$h\,(t)$ — единичная ступенчатая функция] по внутренней границе и краевых условиях конвективного теплообмена. Коэффициенты теплопроводности на внутренней и наружной границах равны соответственно 0.1 и 1.0 дюйм фунт/дюйм² °С сек. Предполагается, что внутренние источники тепла отсутствуют; начальная температура цилиндра и окружающей среды принята равной 300 °К. Изменение температуры, таким образом, происходит вследствие термомеханических эффектов. Для рассматриваемых параметров материала и условий нагружения установившееся состояние достигается примерно через 10^{-3} сек. Для сравнения можно также получить решение в изотермическом случае при пренебрежении тепловыми эффектами, если положить $\hat{b} = 1$, $\dot{\hat{b}} = 0$ и принять за переменную интегрирования реальное время.

Результаты расчета волн окружных и радиальных напряжений в различные моменты реального времени для изотермического и неизотермического процессов приведены в виде безразмерных графиков на рис. 20.1 и 20.2; эпюры перемещений показаны на рис. 20.3. Хотя эпюры напряжений и перемещений для изотермического и неизотермического процессов соответствуют различным моментам времени (так как для неизотермического процесса все величины надо преобразовывать к реальному времени), результаты указывают на запаздывание неизотермических волн напряжений и заметное уменьшение амплитуды.

Окружные напряжения вначале сжимающие, но затем при $t = 10^{-3}$ сек они почти всюду в цилиндре становятся растягивающими. Для прохождения 1.0-дюймовой толщины цилиндра изотермической волне окружных напряже-

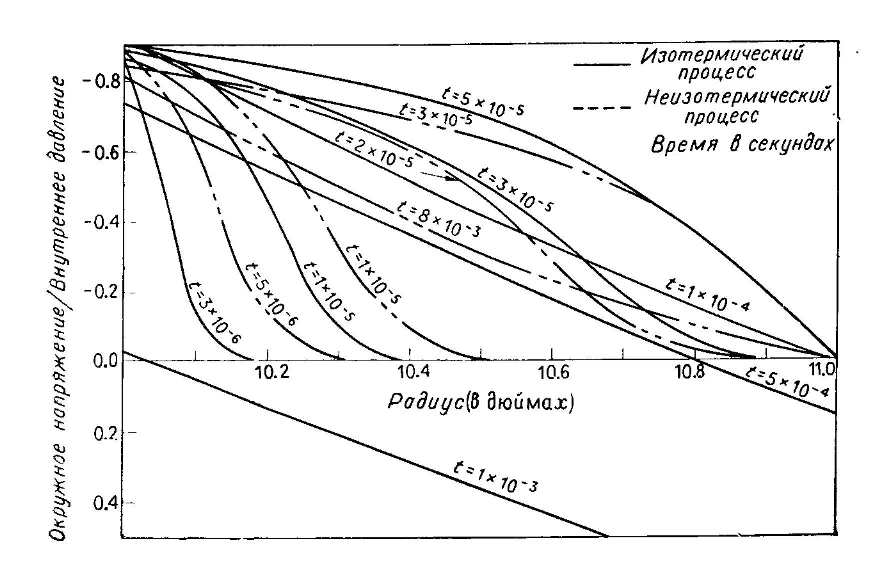


Рис. 20.1. Распространение напряжений в термореологически простом цилиндре. Зависимость безразмерного окружного напряжения от расстояния по радиусу для различных моментов реального времени.

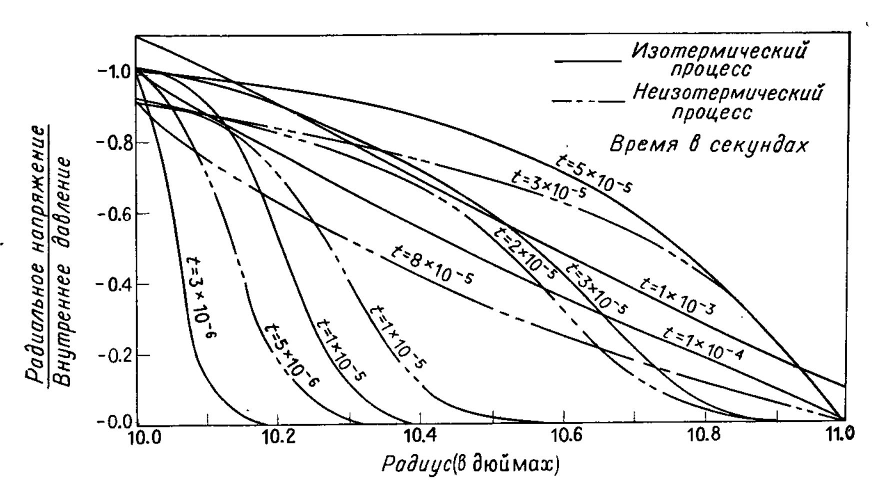


Рис. 20.2. Распространение напряжений в термореологически простом цилиндре. Зависимость безразмерного радиального напряжения от расстояния по радиусу для различных моментов реального времени.

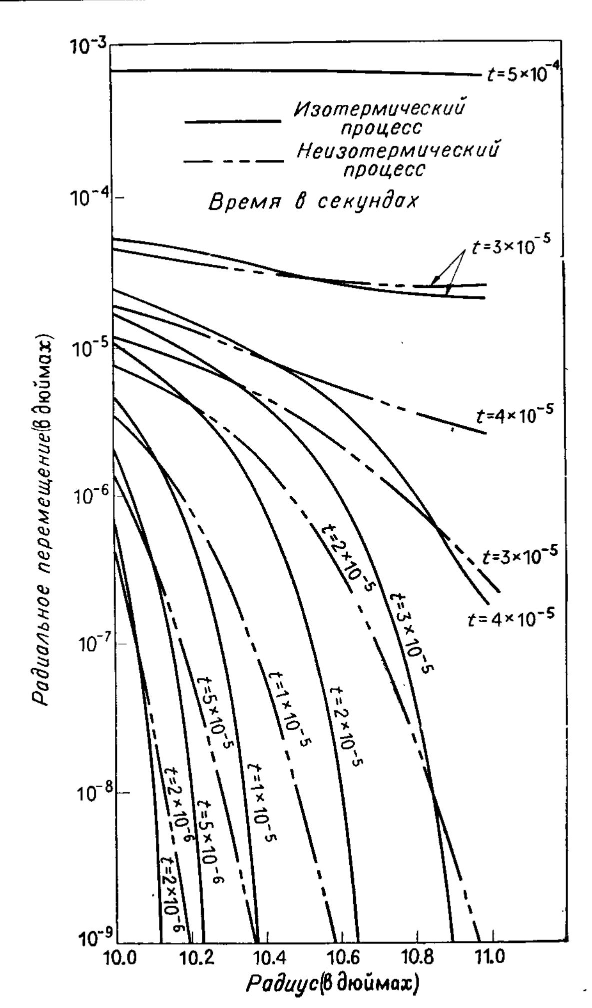


Рис. 20.3. Эпюры радиальных напряжений для различных моментов реального времени.

ний требуется примерно $2.5 \cdot 10^{-5}$ сек, а неизотермической волне — примерно $4.0 \cdot 10^{-5}$ сек. Эпюры перемещений при изотермическом и неизотермическом процессах качественно подобны. На наружной границе неизотермические перемещения больше изотермических, а на внутренней границе меньше. Это в основном обусловлено величинами коэффициентов теплопроводности на границах. Отметим, что приведенные численные результаты получены при использовании приращений приведенного времени величины 10^{-6} сек; на каждом шаге по времени наблюдалась довольно быстрая сходимость итераций Ньютона — Рафсона.

На рис. 20.4 представлены результаты расчета изменения температуры по толщине цилиндра для различных моментов реального времени. Видно,

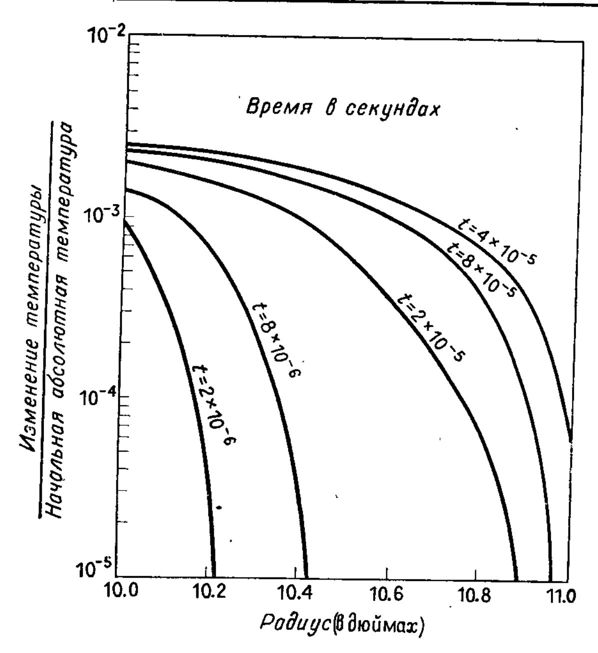


Рис. 20.4. Распределения безразмерной температуры в различные моменты реального времени.

что сначала нагруженная внутренняя граница нагревается. Максимальной величины температура достигает примерно при $t = 4 \times 10^{-5}$ сек, а затем температура понижается.

20.3. ПРИЛОЖЕНИЯ К ТЕОРИИ НЕЛИНЕЙНОЙ СВЯЗАННОЙ ТЕРМОУПРУГОСТИ

Для термоупругих тел внутренняя диссипация равна нулю, свободная энергия предполагается дифференцируемой функцией от текущих деформации и температуры и нагружение и энтропия определяются через свободную энергию с помощью соотношений (19.59). В этом случае уравнения движения и теплопроводности для типичного термоупругого элемента имеют вид

$$m_{NM}\ddot{u}_k^M + \int\limits_{v_{0(e)}} \frac{\partial\Phi(\gamma_{ij}, T)}{\partial\gamma_{ij}} (\delta_{ik} + \psi_{M,k} u_i^M)\, \psi_{N,j}\, dv_0 = p_{Nk}, \qquad (20.34)$$

$$-\int\limits_{v_{0(e)}} \left[\varphi_N (T_0 + \varphi_M T^M) \frac{d}{dt} \frac{\partial\Phi(\gamma_{ij}, T)}{\partial T} - \varphi_{N,i} Q^i (\gamma_{ij}, T, \nabla T)\right] dv_0 = q_N. \qquad (20.35)$$

Задавая вид функций $\Phi(\gamma_{ij}, T)$ и $Q^i(\gamma_{ij}, T, \nabla T)$ для рассматриваемого материала [как, например, в (19.46), (19.63), (19.67) и (19.71)], мы можем получать различные частные формы уравнений (20.34) и (20.35).

Пример. Нелинейное термоупругое полупространство. В качестве характерного примера приложения уравнений (20.34) и (20.35) к задаче о неустановившемся поведении нелинейной термоупругости рассмотрим нелинейный вариант задачи Даниловской[1]), т. е. задачи о неустановившемся поведении термоупругого полупространства при переменном во времени нагреве его границы. Предполагается, что при бесконечно малых деформациях поведение материала описывается нелинейным определяющим законом типа (19.71), (19.72а) и (19.72б) [мы также удерживаем член a_{13} в (19.67)] а тепловой поток описывается нелинейным законом Фурье:

$$q_i = \varkappa_0 (1 + \varepsilon T)\, T_{,i},$$

где $\varkappa_0$ — теплопроводность при $T = 0$ и ε — параметр материала. Тогда (20.34) и (20.35) принимают вид

$$m_{NM}\ddot{u}_k^M + \int\limits_{v_{0(e)}} \Big\{ \Big[(\lambda + 3a_6\gamma_{rr} + a_9\gamma_{rr} + a_{11}T + 2a_{13}T)\,\gamma_{ss} + \frac{1}{2}(a_3 + a_9)(\gamma_{rr}\gamma_{ss} - \gamma_{rs}\gamma_{rs}) - \alpha(3\lambda + 2\mu)\,T \Big] \delta_{ij} + (2\mu - a_3\gamma_{rr} - a_9\gamma_{rr} - a_{11}T)\,\gamma_{ij} + a_3\gamma_{ir}\gamma_{jr} \Big\} \delta_{ik}\psi_{N,j}\, dv_0 = p_{Nk}, \tag{20.37}$$

$$T_0 \int\limits_{v_{0(e)}} \varphi_N(x) \Big[2a_7\dot{T} - \alpha(3\lambda + 2\mu)\,\dot{\gamma}_{rr} + a_{11}(\gamma_{rr}\dot{\gamma}_{ss} - \gamma_{rs}\dot{\gamma}_{rs}) + 6a_{12}T\dot{T} + 2a_{13}\gamma_{rr}\dot{\gamma}_{ss} \Big] dv_0 - \int\limits_{v_{0(e)}} \varkappa_0 (1 + \varepsilon T)\, \delta_{ij}\varphi_{N,i} T_{,j}\, dv_0 = q_N; \tag{20.38}$$

здесь λ и μ — постоянные Ламе; α — коэффициент линейного температурного расширения; a_3, a_6, a_7, a_9, a_{11}, a_{12} и a_{13} — постоянные материала; $\gamma_{ij} = (\psi_{N,i}u_j^N + \psi_{N,j}u_i^N)/2$; $T = \varphi_N T^N$.

Рассмотрим изотропное физически нелинейное термоупругое полупространство $x \geqslant 0$ из материала, которому отвечают уравнения (20.37) и (20.38), при одноосных движениях, описываемых формулами

$$u_1 = u(x,\ t), \qquad u_2 = u_3 = 0.$$

Граничная поверхность $x_1 = 0$ считается свободной от напряжений, и предполагается, что она равномерно нагревается по кусочно-линейному закону вида

$$T_1 = 0 \quad \text{при} \quad -\infty < t \leqslant 0,$$
$$T_1 = \frac{T_f}{T_0}\, t \quad \text{при} \quad 0 \leqslant t \leqslant t_0,$$
$$T_1 = T_f \quad \text{при} \quad t_0 \leqslant t < \infty,$$

---

[1]) Впервые несвязанная линейная задача была рассмотрена В. И. Даниловской [1952], чье имя и получила эта задача. Решения связанной линейной задачи в явном виде были даны Стернбергом и Чакраворти [1959], а конечноэлементные решения — Никеллом и Сэкмэном [1968] и Оденом и Кроссом [1969]. Излагаемое здесь обобщение на нелинейный случай принадлежит Одену и Поу [1970].

где T_1 — начальная температура поверхности, T_f — конечная температура поверхности и t_0 — время нагрева границы. Поскольку предполагается, что первоначально тело находится в покое, перемещения и напряжения при температуре T_i удовлетворяют начальным условиям

$$u_1(x, 0) = 0, \qquad \frac{\partial u_1(x, 0)}{\partial t} = 0, \qquad 0 \leqslant x < \infty.$$

Для простоты мы используем симплексные аппроксимации полей перемещений и температуры в элементе, так что

$$u_1 = \psi_N(x)\, u_1^N, \qquad T = \psi_N(x)\, T^N,$$

где

$$\psi_N(x) = a_N + b_{N1}x, \qquad N = 1, 2.$$

При этом уравнения движения и теплопроводности для типичного конечного элемента принимают вид:

$$p_1 = \frac{\rho_0 L}{6}(2\ddot{u}_1 + \ddot{u}_2) + \frac{\lambda + 2\mu}{L}(u_1 - u_2) + \frac{\alpha}{2}(3\lambda + 2\mu)(T_1 + T_2) - \\ - \frac{3}{L^2} a_6 (u_1 - u_2)^2 + \frac{a_{13}}{L}(T_1 + T_2)(\dot{u}_1 - \dot{u}_2), \tag{20.39а}$$

$$p_2 = \frac{\rho_0 L}{6}(\ddot{u}_1 + 2\ddot{u}_2) - \frac{1}{L}(\lambda + 2\mu)(u_1 - u_2) - \frac{\alpha}{2}(3\lambda + 2\mu)(T_1 + T_2) + \\ + \frac{3}{L^2} a_6 (u_1 - u_2)^2 - \frac{a_{13}}{L}(T_1 + T_2)(\dot{u}_1 - \dot{u}_2), \tag{20.39б}$$

$$q_1 = \frac{\rho_0 c_D(T) T_0}{6}(2\dot{T}_1 + \dot{T}_2) + \frac{\varkappa_0}{L}\left[1 + \frac{\varepsilon}{2L}(T_1 + T_2)\right](T_1 - T_2) - \\ - \frac{T_0}{2}\alpha(3\lambda + 2\mu)(\dot{u}_1 - \dot{u}_2) - \frac{T_0}{L} a_{13}(u_1 - u_2)(\dot{u}_1 - \dot{u}_2), \tag{20.40а}$$

$$q_2 = \frac{\rho_0 c_D(T) T_0}{6}(\dot{T}_1 + 2\dot{T}_2) - \frac{\varkappa_0}{L}\left[1 + \frac{\varepsilon}{2L}(T_1 + T_2)\right](T_1 - T_2) - \\ - \frac{T_0}{2}\alpha(3\lambda + 2\mu)(\dot{u}_1 - \dot{u}_2) - \frac{T_0}{L} a_{13}(u_1 - u_2)(\dot{u}_1 - u_2), \tag{20.40б}$$

где L — длина элемента. Введем безразмерные переменные:

$$l = \frac{a}{\varkappa} x_1, \qquad \zeta = \frac{a^2}{\varkappa} t,$$
$$\theta = \frac{T}{T_0}, \qquad \bar{U} = \frac{a(\lambda + 2\mu)}{\varkappa \beta T_0} U, \tag{20.41а}$$

где

$$\varkappa = \frac{\varkappa_0}{\rho_0 c_D}, \qquad a^2 = \frac{\lambda + 2\mu}{\rho},$$
$$\beta = \bar{\alpha}(3\lambda + 2\mu), \qquad \delta = \frac{\beta^2 T_0}{\rho c_D(\lambda + 2\mu)}. \tag{20.41б}$$

В выписанных выше соотношениях l — характерная длина, t — реальное время, $\varkappa_0$ — начальный коэффициент теплопроводности, $c_D(T)$ — зависящая от температуры удельная теплоемкость при постоянной деформации, λ и μ — постоянные Ламе, α — коэффициент линейного температурного расширения, δ — параметр термомеханической связности.

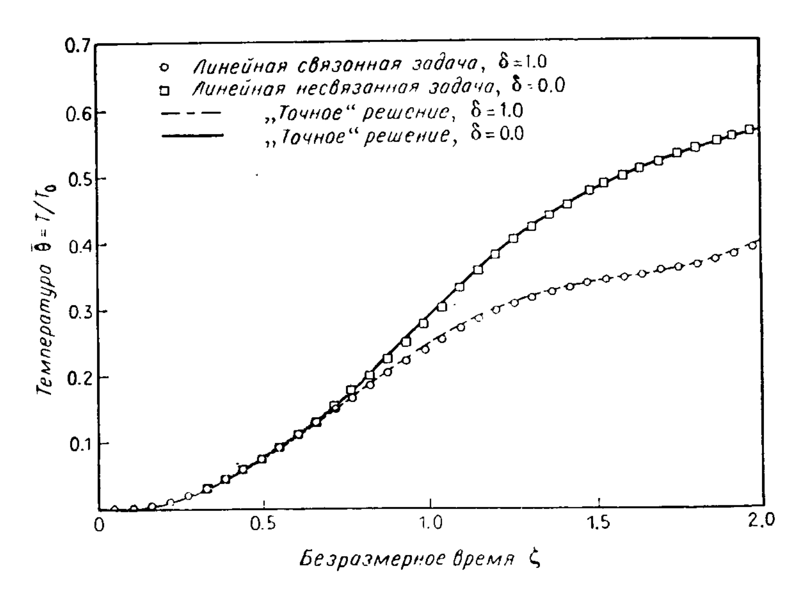


Рис. 20.5. Температура линейного связанного и несвязанного полупространств при $l = 1.0$ для $\zeta_0 = 1.0$.

Численные результаты о влиянии термомеханической связности, физической нелинейности и зависящих от температуры удельной теплоемкости и теплопроводности на решение нашей задачи для полуплоскости представлены на рис. 20.5—20.12.

Дифференциальные уравнения, полученные с помощью метода конечных элементов, решались методом Рунге — Кутты — Гилла. На рис. 20.5 и 20.6 представлены численные результаты для линеаризованного материала, для которого известны точные решения (Стернберг и Чакраворти [1959]). Здесь показана зависимость безразмерных температуры $\bar{\theta}$ и перемещения $\bar{U}$ при $l = 1.0$ и значениях параметра термомеханической связности $\delta = 0.0$ и $\delta = 1.0$ от безразмерного времени ζ для $\zeta_0 = 1.0$ и $\zeta_0 = 0.25$ соответственно. Эти результаты получены при использовании 50-элементной модели с 10 элементами между граничной поверхностью и поверхностью $l = 1.0$.

Влияние физической нелинейности качественно показано на рис. 20.7 и 20.8. Эти результаты получены при использовании 50-элементной модели для материала с $\varepsilon = 0.0$, $\delta = 1.0$, для $\zeta_0 = 1.0$. Отметим, что такая величина параметра связности характеризует сильную термомеханическую связанность для металлических материалов. Влияние нелинейности за счет членов a_6 и a_{13} сказывается на уравнении теплопроводности через член, характеризующий связанность. Значения постоянных материала a_6 и a_{13}, входящих в (20.39) и (20.40), после приведения к безразмерному виду в соответствии с (20.41) обозначены через A_6 и A_{13}.

На рис. 20.7 представлена температура при $l = 1.0$ в виде функции от ζ для четырех случаев: $A_6 = 0.05$, $A_{13} = 0.0$; $A_6 = 0.25$, $A_{13} = 0.0$; $A_6 = 0.0$, $A_{13} = 0.05$; $A_6 = 0.0$, $A_{13} = 0.25$. На рис. 20.8 показано изменение перемещения во времени при $l = 1.0$ для тех же самых четырех случаев. Разница в температуре для случая $A_6 = A_{13} = 0{,}05$ очень мала. В случае $A_6 = 0.25$ для $\zeta \leqslant 1.2$ нет существенных отклонений от линейной теории.

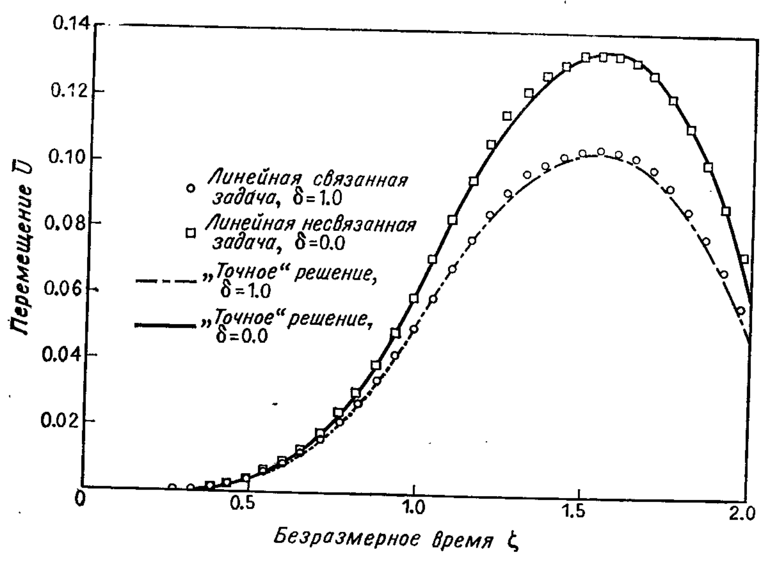


Рис. 20.6. Перемещение линейного связанного и несвязанного полупространств при $l = 1.0$ для $\zeta_0 = 1.0$.

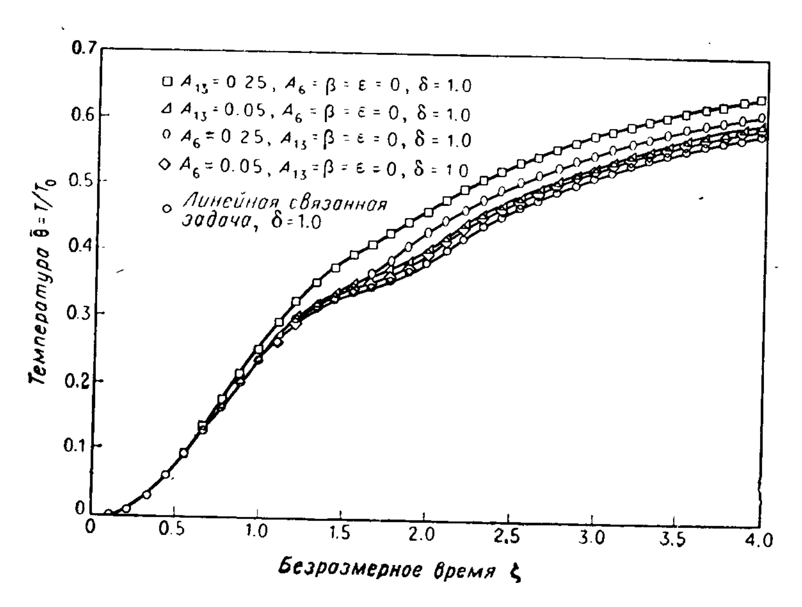


Рис. 20.7. Температура нелинейного полупространства при $l = 1.0$ для $\zeta_0 = 1.0$, при различных значениях постоянных нелинейного материала.

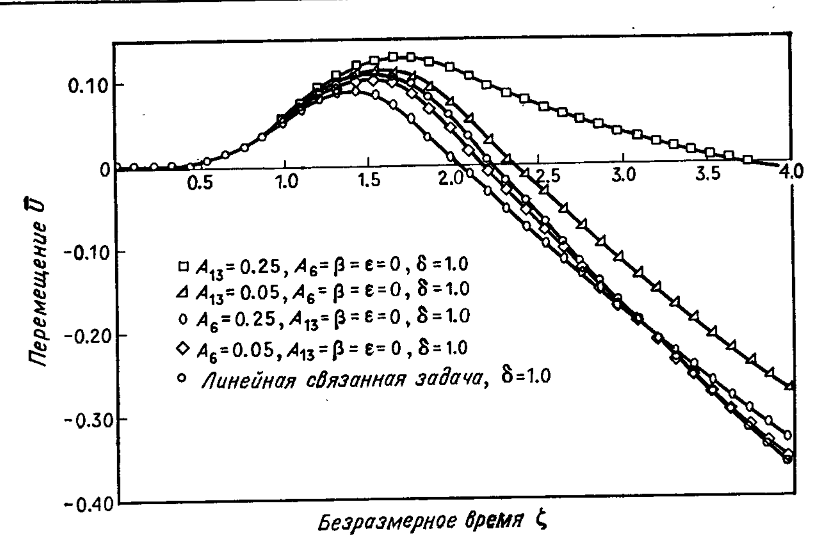


Рис. 20.8. Перемещение нелинейного связанного полупространства при $l = 1.0$ для $\zeta_0 = 1.0$, при различных значениях постоянных нелинейного материала.

Это обусловлено тем, что нелинейность сказывается только через члены второго порядка относительно перемещений и, по-видимому, лишь при гораздо бóльших значениях A_6 может заметно повлиять на уравнение теплопроводности. Влияние постоянной A_{13} на температуру выражено более заметно, поскольку она входит как в уравнения теплопроводности, так и в уравнения движения. Это влияние ясно проявляется при $A_{13} \geqslant 0.25$ для $\zeta \geqslant 0.8$. При $\zeta = 1.0$ появляется также ощутимая разница в перемещениях, которая со временем существенно увеличивается. Для значений A_6 и A_{13}, превышающих 0.25, влияние физической нелинейности выражено очень ярко. Заметим что в рассмотренном примере сдвиговые явления не обнаруживаются.

На рис. 20.9 и 20.10 показано влияние на поведение материала зависящих от температуры коэффициентов удельной теплоемкости и теплопроводности для материалов с $\delta = 1.0$ и $A_6 = A_{13} = 0$ при кусочно-линейном нагреве, для $\zeta_0 = 1.0$. Ради простоты предполагается, что удельная теплоемкость меняется при изменении температуры в каждом отдельном узле и имеет вид

$$c_D = c_0 + \beta T, \tag{20.42}$$

где c_0 — обычно используемая постоянная удельная теплоемкость и β характеризует скорость изменения удельной теплоемкости при изменении температуры. Хотя эта формула удельной теплоемкости не использовалась при оценке величины приращения температуры, фигурирующего в (20.37) и (20.38), она вводится, чтобы можно было количественно проиллюстрировать влияние на поведение материала зависящей от температуры удельной теплоемкости. Как показали Ходжмэн, Вист и Селби [1956], соотношение (20.42) точно описывает экспериментально определенную зависимость удельной теплоемкости от температуры для железа и алюминия в диапазоне от 0 до 400 °С.

При использовании значения c_0 для железа, соответствующего 0 °С, удельная теплоемкость, подсчитанная по формуле (20.42) для различных β, несущественно влияет на величины температур или перемещений при $l = 1.0$.

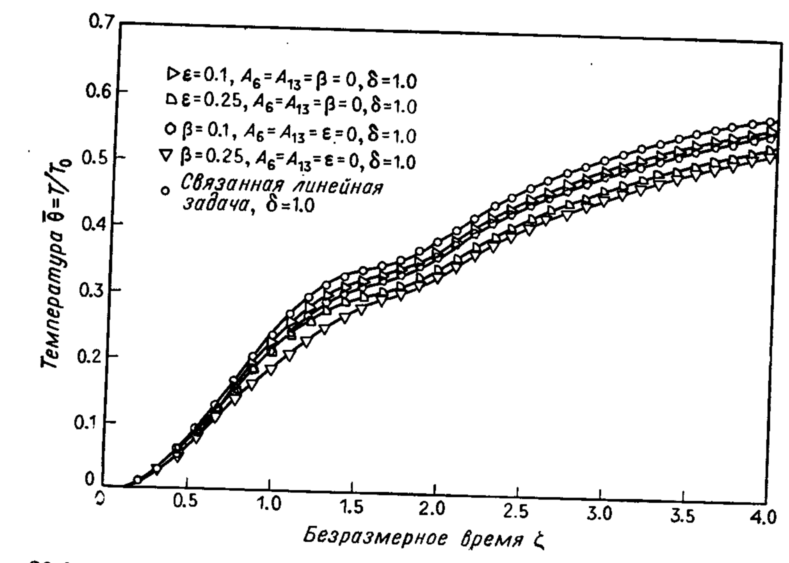


Рис. 20.9. Температура связанного полупространства с зависящими от температуры удельной теплоемкостью и теплопроводностью при $l = 1.0$ для $\zeta_0 = 1.0$.

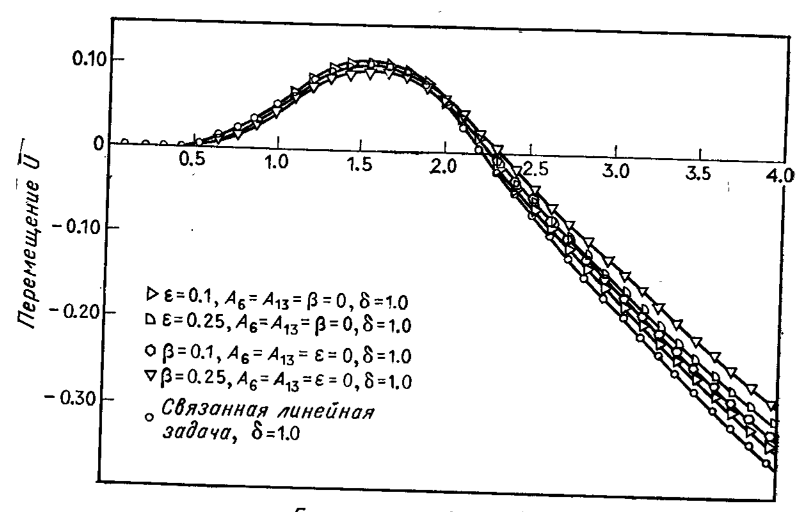


Рис. 20.10. Перемещение связанного полупространства с зависящими от температуры удельной теплоемкостью и теплопроводностью при $l = 1.0$ для $\zeta_0 = 1.0$.

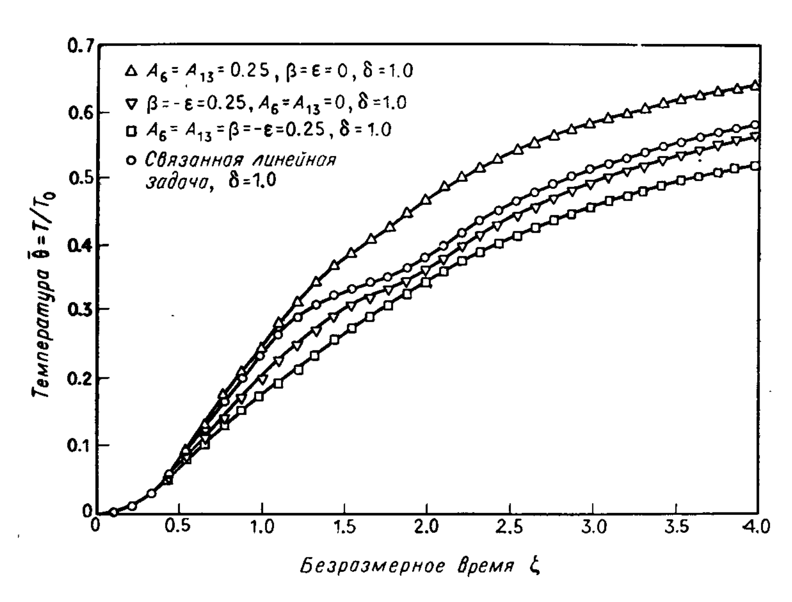


Рис. 20.11. Температура связанного физически нелинейного полупространства с зависящими от температуры удельной теплоемкостью и теплопроводностью при $l = 1.0$ для $\zeta_0 = 1.0$.

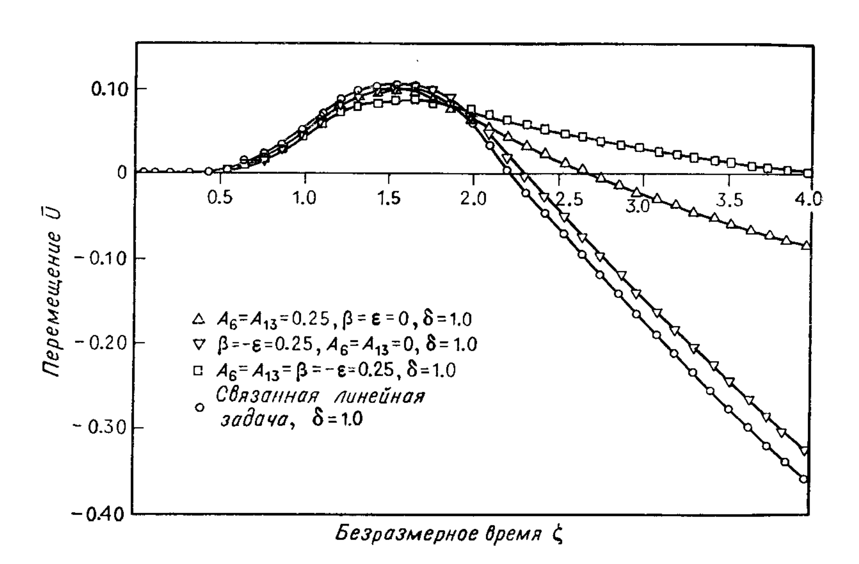


Рис. 20.12. Перемещение связанного физически нелинейного полупространства с зависящими от температуры удельной теплоемкостью и теплопроводностью при $l = 1.0$ для $\zeta_0 = 1.0$.

Представленные на рис. 20.9 и 20.10 результаты, характеризующие влияние величины β на поведение материала, получены при использовании удельной теплоемкости железа при 0 °С и значениях $\beta = 0.25$ и 0.1 и $\varepsilon = 0.0$. При $\beta = 0.1$ величина c_D примерно удваивается, а при $\beta = 0.25$ удельная теплоемкость увеличивается примерно на 250% с изменением температуры до $T = 1.0$. Аналогично значение ε, вычисленное на основании экспериментальных данных (Якоб, [1962]) для железа, по существу не влияет на значения температур и перемещений для проявляющего линейные свойства материала с $\beta = 0$.

Другие случаи, представленные на рис. 20.9 и 20.10, отвечают значениям $\varepsilon = -0.1$ и $-0,25$, которые характеризуют соответственно 10- и 25-процентное уменьшение теплопроводности для $T = 1$. Такое уменьшение теплопроводности с увеличением температуры согласуется с экспериментальными данными для ряда металлов, например железа (Якоб [1962]).

Эти результаты показывают, что соответствующие действительности значения ε и β вызывают понижение температуры в материале со временем. Температурные эффекты сказываются на уравнениях движения через параметр термомеханической связности. Они вызывают уменьшение перемещений при $l = 1.0$.

На рис. 20.11 и 20.12 показано совместное влияние нелинейных членов A_6 и A_{13} и зависящих от температуры теплопроводности и удельной теплоемкости на поведение материала при кусочно-линейном нагреве для $\zeta_0 = 1.0$. Приведенные кривые отвечают значениям постоянных материала $A_6 = A_{13} = 0.25$, $\beta = \varepsilon = 0$; $A_6 = A_{13} = 0$, $\beta = 0.25$, $\varepsilon = -0.25$; $A_6 = A_{13} = \beta = 0.25$, $\varepsilon = -0.25$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ [1]

В этот список включены лишь работы, использованные при написании книги. Курсивные числа в скобках в конце каждого описания указывают параграф и/или пункт, где имеется ссылка на работу.

Авила (J. Avila)
[1970] Continuation methods for nonlinear equations, doct. diss., Univ. of Maryland, College Park (*17.5*)

Агирре-Рамирес, Оден (G. Aguirre-Ramirez, J. T. Oden)
[1969] The finite element technique applied to heat conduction with temperature dependent thermal conductivity, Heat Transfer Division, ASME Winter Meeting, Nov. 16—20, ASME Paper 69-WA/HT-34 (*13.8*, *20.1*)

Агирре-Рамирес, Оден, Ву (G. Aguirre-Ramirez, J. T. Oden, S. T. Wu)
[1970] A numerical solution of the Boltzmann equation by the finite element technique, Proc. 7th Inter. Symp. Rarefied Gas Dyn., Univ. degli Studi di Pisa, Pisa, June 29 — July 3, Academic Press, Inc., N.Y. (*11.4*)

Айзаксон, Келлер (E. Isaacson, H. B. Keller)
[1966] Analysis of numerical methods, John Wiley & Sons, Inc., N.Y. (*17*, *17.2*, *17.5*)

Айронс (B. Irons)
[1966] Engineering application of numerical integration in stiffness method, *AIAA J.*, 4, 2035—2037. [Русский перевод: *Ракетная техника и космонавтика*, 4 (1966), № 11, 213—216.] (*10.4*)

Айронс, Дрейпер (B. Irons, K. J. Draper)
[1965] Inadequacy of nodal connections in a stiffness solution for plate bending, *AIAA J.*, 3, № 5, 961. [Русский перевод: *Ракетная техника и космонавтика*, 3 (1965), № 5, 206—207.] (*10.2*, *10.4*)

Алберг, Нильсон, Уолш (J. H. Ahlberg, E. N. Nilson, J. L. Walsh)
[1967] Теория сплайнов и ее приложения, «Мир», М., 1972. (*10*)

Александер (H. Alexander)
[1968] A constitutive relation for rubber-like materials, *Inter. J. Eng. Sci.*, 6, № 9, 549—563. (*15.5*, *18.1*)

Аллен (D. N. de G. Allen)
[1954] Relaxation methods, McGraw-Hill Book Company, N.Y. (*17.3*)

Арантес э Оливейра (E. R. de Arantes e Oliveira)
[1968] Theoretical foundations of the finite element method, *Inter. J. Solids Struct.*, 4, 929—952. (*10*, *10.2*)
[1969] Completeness and convergence in the finite element method, Proc. 2d Conf. Matrix Methods Struct. Mech., AFFDL-TR-68-150 (Oct. 15—17, 1968), Wright-Patterson AFB, Ohio, 1061—1090. (*10*)

---

[1] Звездочкой помечены работы, добавленные при переводе. Для переводных книг год в квадратных скобках — это, как у автора, год выхода оригинального издания; год выхода перевода приводится на обычном месте в самом описании. Если он предшествует году в квадратных скобках, то это означает, что перевод был выполнен с более раннего издания.—*Прим. ред.*

[1971] The Convergence theorems and their role in the theory of structures, IUTAM Colloq. High Speed Computing Elastic Struct., Liège. (*10*)

Аргирис (J. H. Argyris)

[1954] Energy theorems and structural analysis, *Aircraft Eng.*, 26, 347—356, 383—387, 394. (*2.1*, *6.1*)

[1955] Energy theorems and structural analysis, *Aircraft Eng.*, 27, 42—58, 80—94, 125—134, 145—158. (*2.1*)

[1956] The matrix analysis of structures with cut-outs and modifications, Proc. 9th Inter. Congr. Appl. Mech., sec. II, Mechanics of Solids, September. (*2.1*)

[1957] The matrix theory of statics, *Ingr. Arch.*, 25, 174—192. (*2.1*)

[1958] On the analysis of complex structures, *Appl. Mech. Rev.*, 11, 331—338. (*2.1*)

[1959] Recent developments of matrix theory of structures, Tenth Meeting of the AGARD Structures and Materials Panel, Aachen, Germany. (*16.5*)

[1965a] Matrix analysis of three-dimensional elastic media, small and large deflections, *AIAA J.*, 3, 45—51. [Имеется русский перевод в книге: Дж. Аргирис, Современные достижения в методах расчета конструкций с применением матриц, Стройиздат, М., 1968, 215—239.] (*10.4*, *16.5*)

[1965б] Tetrahedron elements with linearly varying strain for the matrix displacement method, *J. Roy. Aeron. Soc.*, 69, 877—880. (*10.4*)

[1965в] Triangular elements with linearly varying strain for the matrix displacement method, *J. Roy. Aeron. Soc.*, 69, 711—713. (*10.4*)

[1966a] Continua and discontinua, Proc. Conf. Matrix Methods Struct. Mech., AFFDL-TR-66-80 (Oct. 26—28, 1965), Wright-Patterson AFB, Ohio. (*2.1*, *10.4*)

[1966б] Matrix displacement analysis of plates and shells, *Ingr. Arch.*, 35, 102—142. (*2.1*)

Аргирис, Бак (J. H. Argyris, K. E. Buck)

[1968] A sequel to Technical Note 14 on the TUBA family of plate elements, *J. Roy. Aeron. Soc.*, 72, № 675, 977—983. (*10.4*)

Аргирис, Бак, Шарпф, Хилбер, Маречек (J. H. Argyris, K. E. Buck, D. W. Scharpf, H. M. Hilber, G. Mareczek)

[1969] Some new elements for the matrix displacement method, Proc. 2d Conf. Matrix Methods Struct. Mech., AFFDL-TR-68-150 (Oct. 15—17, 1968), Wright-Patterson AFB, Ohio, 333—366. (*10.4*)

Аргирис, Келси (J. H. Argyris, S. Kelsey)

[1956] Structural analysis by the matrix force method with applications to aircraft wings, *Wiss. Ges. Luftfahrt Jahrb.*, 78—98. (*2.1*)

[1959] The analysis of fuselages of arbitrary cross-section and taper, *Aircraft Eng.*, 31, 62—74, 101—112, 133—143, 169—180, 192—203, 224—256, 272—283. (*2.1*)

[1960] Energy theorems and structural analysis, Butterworth, London. (*2.1*)

[1961] The analysis of fuselages of arbitrary cross-section and taper, *Aircraft Eng.*, 33, 34, 71—83, 103—113, 164—174, 193—200, 227—238. (*2.1*)

[1963] Modern fuselage analysis and the elastic aircraft, Butterworth, London. (*2.1*)

Аргирис, Келси, Кэмел (J. H. Argyris, S. Kelsey, H. Kamel)

[1964] Matrix methods of structural analysis: A precis of recent developments, в сб.: B. Fraeijs de Veubeke (ed.), «Matrix Methods of Structural Analysis», AGARDograph 72, Pergamon Press, Ltd., Oxford, 1—164. Кроме того, эта работа опубликована под названием «Recent advances in matrix methods of structural analysis» в «Progress in the Aeronautical Sciences», vol. 4, Pergamon Press, Oxford. (*2.1*, *16.5*)

Аргирис, Фрид (J. H. Argyris, I. Fried)
[1968] The LUMINA element for the matrix displacement method, *J. Roy. Aeron. Soc.*, 72, 514—517. (*2*, *10.4*)

Аргирис, Фрид, Шарпф (J. H. Argyris, I. Fried, D. W. Scharpf)
[1968a] The HERMES 8 element for the matrix displacement method, *J. Roy. Aeron. Soc.*, 72, 613—617. (*10.4*)
[1968б] The TET 20 and TEA 8 elements for the matrix displacement method, *J. Roy. Aeron. Soc.*, 72, 618—623. (*10.4*)
[1968в] The TUBA family of plate elements for the matrix displacement method, *J. Roy. Aeron. Soc.*, 72, 702—709. (*10.4*)

Аргирис, Шарпф (J. H. Argyris, D. W. Scharpf)
[1968] The SHEBA family of shell elements for the displacement method, *J. Roy. Aeron. Soc.*, 72, № 694, 873—883. (*10.4*)
[1969] Finite elements in space and time, *J. Roy. Aeron. Soc.*, 73, № 708, 1041—1044. Кроме того, опубликовано в *Nucl. Eng. Design.*, 10, № 4, 456—464. (*11.1*)

Арчер (J. S. Archer)
[1963] Consistent mass matrix for distributed mass system, *J. Struct. Div. ASCE*, 89, 161—178. (*9.7*, *13.2*)
[1965] Consistent matrix formulation for structural analysis using finite element techniques, *AIAA J.*, 3, 1910—1918. [Русский перевод: *Ракетная техника и космонавтика*, 3 (1965), № 10, 155—166.] (*9.7*, *13.2*)

Ахенбах, Фогель, Геррманн (J. D. Achenbach, S. M. Vogel, G. Herrmann)
[1968] On stress waves in viscoelastic media conducting heat, в сб.: H. Parkus, L. I. Sedov (eds.), «Irreversible Aspects of Continuum Mechanics and Transfer of Physical Characteristics in Moving Fluids», Springer-Verlag N.Y. Inc., N.Y., 1—15. (*19.2*)

Ахмад, Айронс, Зенкевич (S. Ahmad, B. M. Irons, O. C. Zienkiewicz)
[1969] Curved thick shell and membrane elements with particular reference to axisymmetric problems, Proc. 2d Conf. Matrix Methods Struct. Mech., AFFDL-TR-68-150 (Oct. 15—17, 1968), Wright-Patterson AFB, Ohio, 539—572. (*7.5*, *10.4*)

Бабушка (I. Babuška)
[1970] Approximation by hill functions. Tech. Note BN-648, Univ. of Maryland, College Park. (*10*)
[1971] The rate of convergence for the finite element method, *SIAM J. Numer. Anal.*, 8, № 2, 304—315. (*10.2*)

Балтруконис, Вайшнав (J. H. Baltrukonis, R. N. Vaishnav)
[1965] Finite deformations under pressurization in an infinitely long, thick-walled elastic container ideally bonded to a thin elastic case, *Trans. Soc. Rheol.*, 9, 273—291. (*18.2*)

Барсоум (R. Barsoum)
[1970] A finite element formulation for the general stability analysis of thin-walled members, doct. diss., C rnell Univ., Ithaca, N.Y. (*16.5*)

Бейзли, Ченг, Айронс, Зенкевич (G. P. Bazeley, Y. K. Cheung, B. M. Irons, O. C. Zienkiewicz)
[1966] Triangular elements in plate bending — Conforming and non-conforming solutions, Proc. Conf. Matrix Methods Struct. Mech., AFFDL-TR-66-80 (Oct. 26—28, 1965), Wright — Patterson AFB, Ohio, 547—576. (*10.2*, *10.4*)

Беккер (E. B. Becker)
[1966] A numerical solution of a class of problems of finite elastic deformation, doct. diss., Univ. of California, Berkeley. (*16*, *16.2*, *17.1*, *18.1*)

Беккер, Брисбейн (E. B. Becker, J. J. Brisbane)
[1965] Application of the finite element method to the stress analysis of solid propellant rocket grains, Spec. Rep. S-67, vol. 1, Rohm and Haas Co., Huntsville, Ala. (*10.4*, *16.2*, *18.2*)

Беккер, Парр (E. B. Becker, C. H. Parr)
[1967] Application of the finite element method to heat conduction in solids, Tech. Rep. S-117, Rohm and Haas Redstone Research Laboratories, Huntsville, Ala. (*13.8*, *20.1*)

Белл (K. Bell)
[1969] A refined triangular plate bending finite element, *Int. J. Numer. Methods Eng.*, 1, № 1, 101—122. (*10.4*)

Бёрки, Бейдер, Микитов, Пшеменецкий, Шерк (L. Berke, R. M. Bader, W. J. Mykytow, J. S. Przemieniecki, M. H. Shirk)
[1969] (ред.) Proc. 2d Conf. Matrix Methods Struct. Mech., AFFDL-TR-68-150 (Oct. 15—17, 1968), Wright-Patterson AFB, Ohio. (*2.1*)

Бесселинг (J. R. Besseling)
[1966] Matrix analysis of creep and plasticity problems, Proc. Conf. Matrix Methods Struct. Mech., AFFDL-TR-66-80 (Oct. 26—28, 1965), Wright-Patterson AFB, Ohio, 665—678. (*20.1*)

Бест (G. C. Best)
[1963] A formula for certain types of stiffness matrices of structural elements, *AIAA J.*, 1, 478—479. [Русский перевод: *Ракетная техника и космонавтика*, 1 (1963), № 1, 242.] (*10.4*)

Бест, Оден (G. C. Best, J. T. Oden)
[1963] Analysis of shell-type structures, Eng. Res. Rep. 157, General Dynamics, Fort Worth, Texas, December. (*10.4*)

Бидерман В. Л.
[1958] Вопросы расчета резиновых деталей, в сб. «Расчеты на прочность», вып. 3, Машгиз, М., 40—87. (*15.5*, *18.1*)

Био (M. A. Biot)
[1955] Variational principles in irreversible thermodynamics with application to viscoelasticity, *Phys. Rev.*, 97, № 6, 1463—1469. (*12*)
[1956] Thermoelasticity and irreversible thermodynamics, *J. Appl. Phys.*, **27**, № 3, 240—257. (*12*)
[1965] Mechanics of incremental deformation, John Wiley & Sons, Inc., N.Y. (*16.5*)

Биркгоф, де Бур (G. Birkhoff, C. de Boor)
[1965] Piecewise polynomial interpolation and approximation, в сб.: H. L. Garabedian (ed.), «Approximation of Functions», Elsevier Publ. Co., Amsterdam, 164—190. (*8.1*, *10*)

Биркгоф, Гарабедян (G. Birkhoff, H. L. Garabedian)
[1960] Smooth surface interpolation, *J. Math. Phys.*, 39, 258—268. (*10*)

Биркгоф, Маклейн (G. Birkhoff, S. MacLane)
[1941] A survey of modern algebra, The Macmillan Co., N.Y. (*7.1*)

Бисплингхофф, Эшли, Халфмен (R. L. Bisplinghoff, H. Ashley, R. L. Halfman)
[1955] Аэроупругость, ИЛ, М., 1958. (*16.5*)

Богнер (F. K. Bogner)
[1968] Finite deflection, Discrete element analysis of shells, doct. diss., Case Western Reserve Univ., Cleveland, Ohio, также Tech. Rep. AFFDL-TR-67-185, Wright-Patterson AFB, Ohio, December. (*17.1*)

Богнер, Мэллет, Минич, Шмит (F. K. Bogner, R. H. Mallett, M. D. Minich, L. A. Schmit, Jr.)
[1965] Development and evaluation of energy search methods of nonlinear structural analysis, Tech. Rep. AFFDL-TR-113, Wright-Patterson AFB, Ohio. (*17.1*)

Богнер, Фокс, Шмит (F. K. Bogner, R. L. Fox, L. A. Schmit, Jr.)
[1966] The generalization of interelement, compatible stiffness and mass matrices by the use of interpolation formulas, Proc. Conf. Matrix Methods Struct. Mech., AFFDL-TR-66-80 (Oct. 26—28, 1965), Wright-Patterson AFB, Ohio, 397—443. (*7.5*, *8.1*, *10.4*)
[1967] A cylindrical shell discrete element, *AIAA J.*, 5, № 4, 745—750. [Русский перевод: *Ракетная техника и космонавтика*, 5 (1967), № 4, 170—175.] (*7.5*, *10.4*)

Бокс (M. J. Box)
[1966] A comparison of several current optimization methods, and the use of transformations in constrained problems, *Computer J.*, 9, 67—77. (*17*)

Боли, Уэйнер (B. A. Boley, J. H. Weiner)
[1960] Теория температурных напряжений, «Мир», М., 1964. (*12*, *19.2*)

Босхард (W. Bosshard)
[1968] Ein neues vollverträgliches endliches element für Plattenbiegung, Abhandlungen IVBH, Zürich, 1—14. (*10.4*)

Браули, Оден (H. J. Brauchli, J. T. Oden)
[1971] Conjugate approximation functions in finite element analysis, *Quart. Appl. Math.*, 29, № 3, 65—90. (*9*, *13.2*)

Браун, Хатт, Салама (J. E. Brown, J. M. Hutt, A. E. Salama)
[1968] Finite element solution to dynamic stability of bars, *AIAA J.*, 6, № 7, 1423—1425. [Русский перевод: *Ракетная техника и космонавтика*, 6 (1968), № 7, 251—253.] (*16.5*)

Брукс (S. H. Brooks)
[1958] A discussion of random methods for seeking maxima, *J. Operations Res.*, 6, 244—251. (*17*, *17.6*)
[1959] A comparison of maximum seeking methods, *J. Operations Res.*, 7, 430—457. (*17*, *17.6*)

Брэмбл, Зламал (J. Bramble, M. Zlamal)
[1970] Triangular elements in the finite element method, *Math. Computers*, 24, № 112, 809—820. (*10*, *10.4*)

Брэмлетт, Мэллет (T. T. Bramlette, R. H. Mallett)
[1970] A finite element solution technique for the Boltzman equation, *J. Fluid Mech.*, 42, I, 177—191. (*11.4*)

Бубнов И. Г.
*[1913] Отзыв о работе проф. С. П. Тимошенко «Об устойчивости упругих систем», Сборник С.-Петербургского института инженеров путей сообщения, вып. 81, 33—36; также: Избранные труды, Судпромгиз, Л., 1956, 136—139. (*10*)
*[1914] Строительная механика корабля, ч. 2, Типография Морского мин-ва, СПБ, 515—541. (*10*)

Вайнберг М. М.
[1956] Вариационные методы исследования нелинейных операторов, Гостехиздат, М. (*10.1*)

Валц, Фултон, Сайрус (J. E. Walz, R. E. Fulton, N. J. Cyrus)
[1969] Accuracy and convergence of finite element approximations, Proc. 2d Conf. Matrix Methods Struct. Mech., AFFDL-TR-68-150 (Oct. 15—17, 1968), Wright-Patterson AFB, Ohio, 995—1027. (*10*)

Варга (R. S. Varga)
[1967] Hermite interpolation-type Ritz methods for two-point boundary value problems, в сб.: J. H. Bramble (ed.), «Numerical Solutions of Partial Differential Equations», Academic Press, Inc., N.Y., 365—373. (*10*)

Вейль (H. Weyl)
[1946] Классические группы, их инварианты и представления, ИЛ, М., 1947. (*15.5*)

Вемпнер (G. A. Wempner)
[1969] Finite elements, finite rotations, and small strains of flexible shells, *Int. J. Solids Struct.*, 5, 117—153. (*7.5*)

Вемпнер, Оден, Кросс (G. A. Wempner, J. T. Oden, D. A. Kross)
[1968] Finite element analysis of thin shells, *J. Eng. Mech. Div. ASCE*, 94, № EM6, 1273—1294. (*7.5, 10.4*)

Вёбеке (B. M. Fraeijs de Veubeke)
[1964a] (ред.) «Matrix methods of structural analysis», Pergamon Press, Ltd., Oxford. (*2.1*)
[1964б] Upper and lower bounds in matrix structural analysis, в только что указанном сборнике [1964a]. (*10*)
[1965] Displacements and equilibrium models in the finite element method, в сб.: O. C. Zienkiewicz, G. S. Holister (eds.), «Stress Analysis», John Wiley & Sons, Inc., N.Y., 145—197. (*10, 10.4*)
[1966] Bending and stretching of plates — Special models for upper and lower bounds, Proc. Conf. Matrix Methods Struct. Mech., AFFDL-TR-66-80 (Oct. 26—28, 1965), Wright-Patterson AFB, Ohio, 863—886. (*10, 10.4*)
[1971] (ред.) «High-speed Computing of Elastic Structures», Proc. IUTAM Sym. High-speed Computing Elastic Struct., August, 1970, Liège. (*2.1*)

Вильсон (E. L. Wilson)
[1965] Structural analysis of axisymmetric solids, *AIAA J.*, 3, 2269—2274. [Русский перевод: *Ракетная техника и космонавтика*, 3, (1965), № 12, 124—131.] (*10.4, 18.2*)

Вильсон, Никелл (E. L. Wilson, R. E. Nickell)
[1966] Application of the finite element method to heat conduction analysis, *Nucl. Eng. Design*, 4, № 3, 276—286. (*13.8, 20.1*)

Висманн (J. W. Wissmann)
[1962] Numerical analysis of nonlinear elastic bodies, Eng. Res. Rep. ERR-AN-157, General Dynamics/Astronautics, September. (*6.1, 10.4*)
[1963] Numerische Berechnung nichtlinearer elasticher Koerper, Diss., Hannover. (*6.1, 10.4, 16.1*)
[1966] Nonlinear structural analysis; tensor formulation, Proc. Conf. Matrix Methods Struct. Mech., AFFDL-TR-66-80 (Oct. 26—28, 1965), Wright-Patterson AFB, Ohio, 679—696. (*6.1, 16.1*)

Виссер (W. Visser)
[1966] A finite-element method for the determination of Non-stationary temperature distributions and thermal deformations, Proc. Conf. Matrix Methods Struct. Mech., AFFDL-TR-66-80 (Oct. 26—28, 1965), Wright-Patterson AFB, Ohio, 925—943. (*20.1*)

Витхум (D. Withum)
[1966] Berechnung von Platten nach dim Ritzschen Verfahren Mithilfe Dreieckförmiger Maschennetze, Mitt. Inst. Statik Tech. Hochschule Hannover, vol. 9. (*10.4*)

Гавурин М. К.
[1958] Нелинейные функциональные уравнения и непрерывные аналоги итеративных методов, Известия Вузов, Математика, № 5 (6), 18—31. (*17.5*)

Галёркин Б. Г.
[1915] Стержни и пластинки. Ряды в некоторых вопросах упругого равновесия стержней и пластинок, *Вестник инженеров*, 1, № 19, 897—908. (*10.1, 10.3*)

Галлагер (R. H. Gallagher)
[1961] Matrix structural analysis of heated airframes, Proc. ASD Symp. Aerothermoelasticity, ASD-TR-61-645, November. (*20.1*)
[1964] A correlation study of methods of matrix structural analysis, Pergamon Press, Ltd., Oxford. (*2.1*)
Галлагер, Куинн, Пэдлог (R. H. Gallagher, J. F. Quinn, J. Padlog)
[1961] Deformational response determinations for practical heated wing structures, Proc. AIR-ONR Symp. Struct. Dyn. High Speed Flight, Los Angeles. (*20.1*)
Галлагер, Пэдлог, Бейлард (R. H. Gallagher, J. Padlog, P. O. Bijlaard)
[1962] Stress analysis of heated complex shapes, *J. Amer. Rocket Soc.*, **32**, 700—707. [Русский перевод: *Ракетная техника*, 32 (1962), № 5, 52—61.] (*10.4*, *16.1*, *20.1*)
Галлагер, Раттингер, Арчер (R. H. Gallagher, I. Rattinger, J. S. Archer)
[1964] A correlation study of methods of matrix structural analysis, AGARDograph 69, Pergamon Press, Ltd., Oxford. (*10.4*)
Галлагер, Ямада, Оден (R. H. Gallagher, Y. Yamada, J. T. Oden)
[1970] (ред.) «Recent Advances in Matrix Methods in Structural Analysis and Design», Proceedings of the U.S.— Japan Seminar on Matrix Methods in Structural Analysis and Design, Tokyo, 1969, Univ. of Alabama Press, Univ. (*2.1*)
Геррманн (L. R. Herrmann)
[1965] Elasticity equations for incompressible and nearly incompressible materials by a variational theorem, *AIAA J.*, **3**, № 10, 1896—1900. [Русский перевод: *Ракетная техника и космонавтика*, **3** (1965), № 10, 139—144.] (*16.2*)
[1966] A bending analysis for plates, Proc. Conf. Matrix Methods Struct. Mech., AFFDL-TR-66-80 (Oct. 26—28, 1965), Wright-Patterson AFB, Ohio, 577—602. (*10.4*)
Гёль (J. J. Goël)
[1968] Construction of basic functions for numerical utilization of Ritz's method, *Numerische Math.*, 12, 435—447. (*10*)
Гильдебранд (F. B. Hildebrand)
[1956] Introduction to numerical analysis, McGraw-Hill Book Co., N.Y. (*8.1*)
Гольдстейн (A. A. Goldstein)
[1956] Cauchy's method of minimization, *Numerishe Math.*, 4, 146—150. (*17.3*)
Грейвс (L. M. Graves)
[1956] The theory of functions of real variables, 2d ed., McGraw-Hill Book Co., N.Y. (*10.4*)
Грин, Адкинс (A. E. Green, J. E. Adkins)
[1960] Большие упругие деформации и нелинейная механика сплошной среды, «Мир», М., 1965. (*5.2*, *15*, *15.5*, *18.3*)
Грин, Джонс, Маклей, Строум (B. E. Greene, R. E. Jones, R. W. McLay, D. R. Strome)
[1969] On the application of generalized variational principles in the finite element method, *AIAA J.*, 7, № 7, 1254—1260. [Русский перевод: *Ракетная техника и космонавтика*, **7** (1969), № 7, 47—55.] (*10*)
Грин, Зерна (A. E. Green, W. Zerna)
[1968] Theoretical elasticity, 2d ed., Oxford Univ. Press, London. (*4*, *15*, *18.2*)
Грин, Ривлин (A. E. Green, R. S. Rivlin)
[1957] The mechanics of nonlinear materials with memory. I, *Arch. Rat. Mech. Anal.*, 1, 1—21 (*19.2*)
[1960] The mechanics of nonlinear materials with memory. III, *Arch. Rat. Mech. Anal.*, 4, 387—404. (*19.2*)

Грин, Ривлин, Спенсер (A. E. Green, R. S. Rivlin, A. J. M. Spenser)
[1959] The mechanics of nonlinear materials with memory. II, *Arch. Rat. Mech. Anal.*, 3, 82—90. (*19.2*)
Гройб (W. H. Greub)
[1963] Linear Algebra, 2d ed., Academic Press, Inc., N.Y. (*7.1*, *10.4*)
Гук (R. Hooke)
[1678] Lectures de potentia restitutiva, or of spring, Explaining the power of springing bodies, брошюра, воспроизведенная в книге: R. T. Gunther, «Early Science in Oxford», vol. 8, 1931, 119—152. (*15.1*)
Давиденко Д. Ф.
[1965] О применении метода вариации параметра к построению итерационных формул повышенной точности для определения численных решений нелинейных интегральных уравнений, ДАН, **162**, № 3, 499—502. (*17.5*)
Давидон (W. C. Davidon)
[1959] Variable metric method for minimization, AEC Res. Develop. Rep. ANL-5990 (rev.). (*17.3*)
Дана, Хёрлбат (J. D. Dana, C. S. Hurlbut)
[1959] Dana's manual of mineralogy, 17th ed., John Wiley & Sons., Inc., N.Y. (*15.5*)
Даниловская В. И.
[1952] Об одной динамической задаче термоупругости, *ПММ*, 16, № 3, 341—344. (*20.3*)
Данни (P. C. Dunne)
[1968] Complete polynomial displacement fields for finite element method, *J. Roy. Aeron. Soc.*, **72**, 245—246. (*10*, *10.4*)
Де Гроот, Мазур (S. R. DeGroot, P. Mazur)
[1962] Non-equilibrium thermodynamics, North-Holland Publ. Co., Amsterdam. (*12*)
Джаунземис (W. Jaunzemis)
[1967] Continuum mechanics, The Macmillan Co., N.Y. (*14*)
Джент, Томас (A. N. Gent, A. G. Thomas)
[1958] Forms of the stored (strain) energy function for vulcanized rubber, *J. Polymer Sci.*, 28, 625—628. (*15.5*, *18.1*)
Джон (F. John)
[1958] On finite deformations of elastic isotropic material, Inst. Math. Sci. Rep. IMM-NYU 250, N.Y. Univ. (*15.5*)
Джонс (D. J. Johns)
[1965] Thermal stress analysis, Pergamon Press, Ltd., Oxford. (*19.2*)
Джонсон, Маклей (M. W. Johnson, Jr., R. W. McLay)
[1968] Convergence of the finite element method in the theory of elasticity, *J. Appl. Mech.*, ser. E, 35, № 2, 274—278. [Русский перевод: *Труды Американского общества инженеров-механиков, Прикладная механика*, 35 (1968), сер. E, № 2, 68—72.] (*10*)
Дик, Пайэн (A. L. Deak, T. H. H. Pian)
[1967] Application of the smooth-surface interpolation to the finite element analysis, *AIAA J.*, 5, № 1, 187—189. [Русский перевод: *Ракетная техника и космонавтика*, 5 (1967), № 1, 235—237.] (*8.1*)
Диллон (O. W. Dillon, Jr.)
[1962] A nonlinear thermoelasticity theory, *J. Mech. Phys. Solids*, **10**, 123—131. (*19.2*)
Донг, Пистер, Данхэм (R. G. Dong, K. S. Pister, R. S. Dunham)
[1968] Mechanical characterization of nonlinear viscoelastic solids for iterative solution of boundary-value problems, Struct. Mater. Res. Rep. 68—11 Structural Engineering Laboratory, Univ. of California, Berkeley. (*20.1*)

Дэниэл (J. W. Daniel)
[1967] The conjugate gradient method for linear and nonlinear operator equations, *SIAM J. Numer. Anal.*, 4, 10—25. (*17.3*)
Дюамель (J. M. C. Duhamel)
[1837] Second mémoire sur les phénomènes thermoméchaniques, *J. École. Polytech.*, 15, № 25. (*19.2*)
Зенкевич (O. C. Zienkiewicz)
[1970] The finite element method: from intuition to generality, *Appl. Mech. Rev.*, 23, № 3, 249—256. [Русский перевод: *Механика*, № 6 (1974), 90—103.] (*2.1*)
Зенкевич, Холистер (O. C. Zienkiewicz, G. S. Holister)
[1965] (ред.) «Stress Analysis», John Wiley & Sons, Inc., N.Y. (*2.1*)
Зенкевич, Ченг (O. C. Zienkiewicz, Y. K. Cheung)
[1967] The finite element method in structural and continuum mechanics, McGraw-Hill Book Co., N.Y. [Русский перевод 2-го изд.: О. Зенкевич, Метод конечных элементов в технике, «Мир», 1975.] (*2.1*, *10.4*)
Зламал (M. Zlamal)
[1968] On the finite element method, *Numerische Math.*, 12, 394—409. (*10*, *10.4*)
Зойтендейк (G. Zoutendijk)
[1966] Nonlinear programming: A numerical survey, *SIAM J. Control*, 4, 194—210. (*17*)
Зуданс (Z. Zudans)
[1969] Survey of advanced structural design analysis techniques, *Nucl. Eng. Design*, 10, № 4, 400—440. (*2.1*)
Исихара, Хасицумэ, Татибана (A. Isihara, N. Hashitsume, M. Tatibana)
[1951] Statistical theory of rubber-like elasticity. IV (Two-dimensional stretching), *J. Chem. Phys.*, 19, 1508—1512. (*15.5*)
Йиндра (F. Jindra)
[1959] Warmespannungen, bei einem nichtlinearen Elastizatatsgeset, *Ing. Arch.*, 38, 109—116. (*19.2*)
Каваи (T. Kawai)
[1970] Finite element analysis of the geometrically nonlinear problems, в сб.: R. H. Gallagher, Y. Yamuda, Oden (eds.), «Recent Advances in Matrix Methods in Structural Analysis and Design», Proceedings of the U.S.— Japan Seminar on Matrix Methods in Structural Analysis and Design, Tokyo, 1969, Univ. of Alabama Press, Univ. (*16.5*)
Кавана (K. T. Kavanagh)
[1969] The finite element analysis of physically and kinematically non-linear elastic solids, doct. diss., Univ. of California, Berkeley; также опубликовано как Struct. Mater. Res. Rep. 69-4, Structural Engineering Laboratory, Univ. of California, Berkeley, April. (*15.5*, *16*)
Канторович Л. В.
[1933] Один прямой метод приближенного решения задачи о минимуме двойного интеграла, *ИАН СССР*, VII сер., Отделение математических и естественных наук, № 5, 647—652. (*11.4*)
Карьяппа, Сомашекар, Шах (B. Kariappa, R. Somashekar, C. G. Shah)
[1970] Discrete element approach to flutter of skew panels with in-plane forces under yawed supersonic flow, *AIAA J.*, 8, № 11, 2017—2030. [Русский перевод: *Ракетная техника и космонавтика*, 8 (1970), № 11, 120—126.] (*16.5*)
Ки (S. W. Key)
[1966] A convergence investigation of the direct stiffness method, doct. diss., Univ. of Washington, Seattle. (*10*, *10.2*, *10.3*, *10.4*)
[1969] A variational principle for incompressible and nearly incompressible anisotropic elasticity, *Int. J. Solids Struct.*, 5, № 9, 951—964. (*16.2*)

Кинг (I. P. King)
[1965] On the finite element analysis of two-dimensional stress problems with time dependent properties, doct. diss., Univ. of California, Berkeley. (*20.1*)

Киснер (W. Kisner)
[1964] A numerical method for finding solutions to nonlinear problems, *SIAM J. Appl. Math.*, 12, № 2, 424—428. (*17.5*)

Клаф (R. W. Clough)
[1960] The finite element method in plane stress analysis, *J. Struct. Div., ASCE*, Proc. 2d Conf. Electronic Computation, 345—378. (*2.1*)

Клаф, Рашид (R. W. Clough, Y. R. Rashid)
[1965] Finite element analysis of axisymmetric solids, *J. Eng. Mech. Div., ASCE*, 91, № EM1, 71—85. (*10.4*, *18.2*)

Клаф, Точер (R. W. Clough, J. L. Tocher)
[1966] Finite element stiffness matrices for analysis of plate bending, Proc. Conf. Matrix Methods in Struct. Mech., AFFDL-TR-66-80 (Oct. 26—28, 1965), Wright-Patterson AFB, Ohio, 515—546. (*10*, *10.2*, *10.4*)

Клоснер, Сегал (J. M. Klosner, A. Segal)
[1969] Mechanical characterization of a natural rubber, PIBAL Rep. 69-42, Polytechnic Inst. of Brooklyn, N.Y. (*15.5*, *18.1*)

Ковалик, Осборн (J. Kowalik, M. R. Osborne)
[1968] Methods for unconstrained optimization problems, American Elsevier Publishing Co., Inc., N.Y. (*17*)

Колеман (B. D. Coleman)
[1964] Thermodynamics of materials with memory, *Arch. Rat. Mech. Anal.*, 17, 1—46. (*12*, *12.4*, *14.3*, *14.4*, *19.1*)

Колеман, Гуртин (B. D. Coleman, M. E. Gurtin)
[1965а] Waves in materials with memory. III. Thermodynamic influences on the growth and decay of one-dimensional acceleration waves, *Arch. Rat. Mech. Anal.*, 19, 266—298. [Воспроизведено в сб.: C. Truesdell (ed.), «Wave Propagation in Dissipative Materials», Springer-Verlag, Berlin, 1965.] (*19.1*)
[1965б] Waves in materials with memory. IV. Thermodynamics and the velocity of general acceleration waves, *Arch. Rational Mech. Anal.*, 19, 317—338. [Воспроизведено в том же сборнике.] (*19.1*)

Колеман, Гуртин, Херрера (B. D. Coleman, M. E. Gurtin, R. I. Herrera)
[1965] Waves in materials with memory. I. The velocity of one-dimensional shock and acceleration waves, *Arch. Rat. Mech. Anal.*, 19, 1—19. [Воспроизведено в том же сборнике.] (*19.1*)

Колеман, Мизел (B. D. Coleman, V. J. Mizel)
[1964] Existence of caloric equations of state in thermodynamics, *J. Chem. Phys.*, 40, 1116—1125. (*12.3*)
[1967] A general theory of dissipation in materials with memory, *Arch. Rat. Mech. Anal.*, 27, 255—274. (*19.1*)

Колеман, Нолл (B. D. Coleman, W. Noll)
[1960] An approximation theorem for functionals with applications in continuum mechanics, *Arch. Rat. Mech. Anal.*, 6, 355—370. (*19.2*)
[1961] Foundations of linear viscoelasticity, *Rev. Mod. Phys.*, 33, 239—249. (*14.4*)
[1963] The thermodynamics of elastic materials with heat conduction and viscosity, *Arch. Rat. Mech. Anal.*, 13, 167—178. (*12.3*)

Коллатц (L. Collatz)
[1966] Численные методы решения дифференциальных уравнений, ИЛ, М., 1953. (*17.5*)

Колмогоров А. Н., Фомин С. В.
[1972] Элементы теории функций и функционального анализа, 3-е изд., «Наука», М. (*7.1*, *7.4*, *10.1*)

Корнеев В. Г.
[1967] Сопоставление метода конечных элементов с вариационно-разностным методом решения задач теории упругости, Изв. ВНИИГ им. Веденеева, 83, 286—307. (*10.2*)
Кост (T. L. Cost)
[1969] Thermomechanical coupling phenomena in non-isothermal viscoelastic solids, doct. diss., Univ. of Alabama, University. (*19.2*, *20.1*)
Коши (A. L. Cauchy)
[1829] Sur l'équilibre et le mouvement intérieur des corps considérés comme des masses continues, *Ex. Math.*, 4, 293—319; Oeuvres, vol. 9, 342—369. (*16.5*)
[1847] Méthode générale pour la résolution des systèmes d'équations simultanées, *C.R.*, 25, 536—538. (*17.3*)
Крахула, Полемус (J. L. Krahula, J. F. Polhemus)
[1968] Use of Fourier series in the finite element method, *AIAA J.*, 6, № 4, 726—728. [Русский перевод: *Ракетная техника и космонавтика*, 6 (1968), № 4, 210—211.] (*10.4*)
Кристенсен, Нахди (R. M. Christensen, P. M. Naghdi)
[1967] Linear non-isothermal viscoelastic solids, *Acta Mech.*, III/1, 1—12. (*19.2*)
Крон (G. Kron)
[1939] Tensor analysis of networks, John Wiley & Sons, Inc., N.Y. (*2.1*, *6.1*)
[1944a] Tensorial analysis and equivalent circuits of elastic structures, *J. Franklin Inst.*, 238, 399—442. (*2.1*)
[1944б] Equivalent circuits of the elastic field, *J. Appl. Mech.*, 66, 149—167. (*2.1*)
[1953] A set of principles to interconnect the solutions of physical systems, *J. Appl. Phys.*, 24, 965—980. (*2.1*)
[1954] A method to solve very large physical systems in easy stages, *Proc. IRE*, 42, 680—686. (*2.1*)
[1955] Solving highly complex structures in easy stages, *J. Appl. Mech.*, 22, 235—244. (*2.1*)
Крэндалл (S. H. Crandall)
[1956] Engineering analysis: a survey of numerical procedures, McGraw-Hill Book Co., N.Y. (*10.3*)
Курант (R. Courant)
[1943] Variational methods for the solution of problems of equilibrium and vibrations, *Bull. Amer. Math. Soc.*, 49, 1—23. (*2.1*, *8.1*, *10*)
Курант, Фридрихс, Леви (R. Courant, K. O. Friedrichs, H. Lewy)
[1928] Über die partiellen Differenzengleichungen der mathematischen Physik, *Math. Ann.*, 100, 32—74. [Русский перевод: *УМН*, 8 (1941), 125—160.] (*2.1*, *11.1*)
Ланхар, Чу (H. L. Langhaar, S. C. Chu)
[1968] Piecewise polynomials and the partition method for ordinary differential equations, в сб.: «Developments in Theoretical and Applied Mechanics», vol. 4, Proceedings, Southeastern Conference on Theoretical and Applied Mechanics, Pergamon Press, Ltd., Oxford, 553—564. (*8.1*, *10.4*)
Лей (D. C. Leigh)
[1968] Nonlinear continuum mechanics, McGraw-Hill Book Co., N.Y. (*14*)
Леонард, Брэмлетт (J. W. Leonard, T. T. Bramlette)
[1970] Finite-element solution of differential equations, *J. Struct. Div., ASCE*, 96, № EM6, 1277—1284. (*10.3*)
Лианис (G. Lianis)
[1965] Integral constitutive equations of nonlinear thermo-viscoelasticity, School Aeron. Astronautics Eng. Sci. Rep. AA & ES 65-1, Purdue Univ., Lafayette, Ind. (*19.2*)

[1968] Nonlinear thermorheologically simple materials, 5th Int. Congr. Rheol., Kyoto, Japan. (*19.2*)

Лурье А. И.

*[1970] Теория упругости. «Наука», М. (*4*)

Люстерник Л. А., В. И. Соболев

[1965] Элементы функционального анализа, 2-е изд., «Наука», М. (*7.1*)

Майкснер (J. Meixner)

[1943] Zur Thermodynamik der irreversiblen Prozesse, *Z. Angew. Phys. Chem.*, *B*, 53, 235—263. (*12*)

Мак-Гуирт, Лианис (C. W. McGuirt, G. Lianis)

[1969] Experimental investigation of non-linear non-isothermal viscoelasticity, *Int. J. Eng. Sic.*, 7, 579—599. (*19.2*)

Маклей (R. W. McLay)

[1963] An investigation into the theory of the displacement method of analysis for linear elasticity, doct. diss., Univ. of Wisconsin, Madison. (*10*)

[1967] Completeness and convergence properties of finite element displacement functions — A general treatment, AIAA 5th Aerospace Sci. Meeting, AIAA Paper 67-143, N.Y. (*10*)

[1971] On certain approximations in the finite element method, *J. Appl. Mech.*, 38, № 1, 58—61. [Русский перевод: *Труды Американского общества инженеров-механиков*, *Прикладная механика*, сер. E, 38 (1971), № 1, 58—61.] (*10.2*)

Мак-Кой (N. McCoy)

[1960] Introduction to modern algebra, Allyn and Bacon, Inc., Boston. (*7.1*)

Маркл (P. V. Marcal)

[1968] Effect of initial displacements on problems of large deflection and stability, Proc. ASCE Joint Specially Conf. Optimization Nonlinear Probl., Chicago, April. (*16.5*)

[1970] Finite element analysis with material nonlinearities — Theory and practice, в сб.: R. H. Gallagher, Y. Yamada, J. T. Oden (eds.), «Recent Advances in Matrix Methods in Structural Analysis and Design», Proc. of the U.S.— Japan Seminar on Matrix Methods in Structural Analysis and Design, Tokyo, 1969, Univ. of Alabama Press, University. (*2.1*)

Мартин (H. C. Martin)

[1966а] Introduction to matrix methods of structural analysis, McGraw-Hill Book Co., N.Y. (*2.1*)

[1966б] On the derivation of stiffness matrices for the analysis of large deflection and stability problems, Proc. Conf. Matrix Methods Struct. Mech., AFFDL-TR-66-80 (Oct. 26—28, 1965), Wright-Patterson AFB, Ohio, 697—716. (*16.5*)

[1970] Finite element formulations of geometrically nonlinear problems, в сб. «Recent Advances in Matrix Methods in Structural Analysis and Design» (см. Маркл [1970]). (*2.1*, *16.5*)

Мейер (G. Meyer)

[1968] On solving nonlinear equations with a one-parameter operator imbedding, *SIAM J. Numer. Anal.*, 5, 739—752. (*17.5*)

Мелош (R. J. Melosh)

[1963а] Basis of derivation of matrices for the direct stiffness method, *AIAA J.*, 1, 1631—1637. [Русский перевод: *Ракетная техника и космонавтика*, 1 (1963), № 7, 169—176).] (*10*, *10.2*, *10.3*)

[1963б] Structural analysis of solids, *J. Struct. Div. ASCE*, 89, 205—223. (*10.4*)

[1966] A flat triangular shell element stiffness matrix, Proc. Conf. Matrix Methods Struct. Mech., AFFDL-TR-66-80 (Oct. 26—28, 1965), Wright-Patterson AFB, Ohio, 503—514. (*10.4*)

Михлин С. Г.
[1952] Проблема минимума квадратичного функционала, ГИТТЛ, М.— Л. (*10.1*, *10.3*)
[1970] Вариационные методы в математической физике, 2-е изд., «Наука», М. (*10.1*)

Михлин С. Г., Смолицкий Х. Л.
[1965] Приближенные методы решения дифференциальных и интегральных уравнений, «Наука», М. (*10.1*)

Морс, Фешбах (P. M. Morse, H. Feshbach)
[1953] Методы теоретической физики, т. 1, ИЛ, М., 1958. (*11.2*)

Мостов, Сэмпсон, Мейер (G. D. Mostow, J. H. Sampson, J. P. Meyer)
[1963] Fundamental structures of algebra, McGraw-Hill Book Co., N.Y. (*7.1*)

Муни (M. Mooney)
[1940] A theory of large elastic deformation, *J. Appl. Phys.*, **11**, 582—592. (*15.5*)

Мур (J. T. Moore)
[1962] Elements of abstract algebra, The Macmillan Co., N.Y. (*7.1*)

Мэлверн (L. E. Malvern)
[1970] An introduction to the mechanics of a continuous media, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs., N.J. (*14*)

Мэллетт, Шмит (R. H. Mallett, L. A. Schmit, Jr.)
[1967] Nonlinear structural analysis by energy search, *J. Struct. Div. ASCE*, 93, № ST3, 221—234. (*17.1*)

Мюллер (I. Müller)
[1967] On the entropy inequality, *Arch. Rat. Mech. Anal.*, 26, 118—141. (*12.3*)

Мюррей Д., Вильсон (D. W. Murray, E. L. Wilson)
[1969а] Finite element large deflection analysis of plates, *J. Eng. Mech. Div. ASCE*, 95, № EM1, 143—165. (*16.5*)
[1969б] Finite-element postbuckling analysis of thin elastic plates, *AIAA J.*, 7, № 10, 1915—1920. [Русский перевод: *Ракетная техника и космонавтика*, **7** (1969), № 10, 115—121.] (*16.5*)

Мюррей К. (K. H. Murray)
[1970] Comments on the convergence of finite-element solutions, *AIAA J.*, 8, 815—816. [Русский перевод: *Ракетная техника и космонавтика*, 8 (1970), № 4, 277—279.] (*10.2*)

Нелдер, Мид (J. A. Nelder, R. Mead)
[1964] A simplex method for function minimization, *Computer J.*, 7, 308 (*17.6*)

Немат-Нассер, Шатов (S. Nemat-Nasser, H. D. Shatoff)
[1970] A consistent numerical method for the solution of nonlinear elasticity problems at finite strains, Dep. Aerospace Mech. Eng. Sci. Tech. Rep. 2, January. (*16*, *16.1*)

Никелл, Сэкмэн (R. E. Nickell, J. J. Sackman)
[1968] Approximate solutions in linear coupled thermoelasticity, *J. Appl. Mech.*, ser. E, 35, № 2, 255—266. [Русский перевод: *Труды Американского общества инженеров-механиков, Прикладная механика*, 35 (1968), сер. Е, № 2, 51—60.] (*11.1*, *20.1*, *20.2*)

Новацкий (W. Nowacki)
[1962] Thermoelasticity, Pergamon Press, Ltd., Oxford. (*19.2*)

Новожилов В. В.
[1948] Основы нелинейной теории упругости, ГИТТЛ, М.— Л. (*4.2*)

Нолл (W. Noll)
[1958] A mathematical theory of the mechanical behavior of continuous media, *Arch. Rat. Mech. Anal.*, **2**, 197—226. (*19.1*)

Оден (J. T. Oden)

[1966а] Analysis of large deformations of elastic membranes by the finite element method, Proc. IASS Int. Congr. Large-span Shells, Leningrad. (*16*, *18.1*)

[1966б] Calculation of geometric stiffness matrices for complex structures, *AIAA J.*, 4, № 8, 1480—1482. [Русский перевод: *Ракетная техника и космонавтика*, 4 (1966), № 8, 21 —217.] (*16.5*)

[1967а] Numerical formulation of a class of problems in nonlinear viscoelasticity, *Advan. Astronautical Sci.*, 24, June. (*6.1*, *10.3*, *10.4*, *16.1*, *20.1*)

[1967б] Numerical formulation of nonlinear elasticity problems, *J. Struct. Div. ASCE*, 93, № ST3, 235—255. (*6.1*, *7*, *10.4*, *16*, *16.1*, *16.2*)

[1967в] Finite element applications in linear and nonlinear thermoelasticity, в сб. «The Discrete and Continuum Concepts in Micro and Macro Mechanics», EDM Specialty Conf., ASCE, Nov. 8—10, 1967, Raleigh, N.C., 32—35. (*10.3*, *13.4*)

[1968а] Calculation of stiffness matrices for thin shells of arbitary shape, *AIAA J.*, 6, № 5, 969—972. [Русский перевод: *Ракетная техника и космонавтика*, 6 (1968), № 5, 256—258).] (*7.5*)

[1968б] Finite plane strain of incompressible elastic solids by the finite element method, *Aeron. Quart.*, 19, 254—264. (*13.1*, *16*, *16.2*, *18.3*)

[1969а] A general theory of finite elements. I. Topological considerations, *Int. J. Numer. Methods Eng.*, 1, № 2, 205—221. (*6.1*, *7*, *9.7*, *10.4*, *13.2*)

[1969б] A general theory of finite elements. II. Applications, *Int. J. Numer. Methods Eng.*, 1, № 3, 247—259. (*6.1*, *7*, *10.3*, *11.1*, *11.4*, *13.4*)

[1969в] Finite element applications in nonlinear structural analysis, Proc. Symp. Appl. Finite Element Methods Civil Eng., Vanderbilt Univ., Nashville, Tenn., 419—456. (*2.1*, *16*, *16.5*)

[1969г] Finite element analysis of nonlinear problems in the dynamical theory of coupled thermoelasticity, *Nucl. Eng. Design*, 10, № 4, 465—475. (*13.8*, *19.2*, *20.1*)

[1969д] Discussion of finite element analysis of nonlinear structures, *J. Struct. Div. ASCE*, 95, № ST6, 1379—1381. (*16.5*)

[1970а] A generalization of the finite element concept and its application to a class of problems in nonlinear viscoelasticity, Developments in Theoretical and Applied Mechanics, IV, ed. by D. Friederick (Proceedings, 4th SECTAM, March 1968), Pergamon Press, Oxford, 581—592. (*13.1*, *13.4*, *13.6*, *20.1*)

[1970б] Finite element formulation of problems of finite deformation and irreversible thermodynamics of nonlinear continua, в сб.: R. H. Gallagher, Y. Yamada, J. T. Oden (eds.), «Recent Advances in Matrix Methods in Structural Analysis and Design», Proceedings of the U.S.— Japan Seminar on Matrix Methods in Structural Analysis and Design, Tokyo, 1969, Univ. of Alabama Press, University. (*2.1*, *13.4*, *13.8*, *16.5*, *20.1*)

[1970в] Finite-element approximation of a class of nonlinear operators, *SIAM Soc. Indus. Appl. Math.*, Fall Meeting, Boston, Mass. (*10*)

[1970г] Note on an approximate method for computing nonconservative generalized forces on finitely deformed finite elements, *AIAA J.*, 8, № 11, 2088—2090. [Русский перевод: *Ракетная техника и космонавтика*, 8 (1970), № 11, 215—217.] (*16.3*)

[1971а] The theory of conjugate projections in finite element analysis, NATO Advanced Study Institute on Finite Element Methods in Continuum Mechanics, Lisbon. (*9.7*)

[1971б] Finite Element Formulation of Nonlinear Boundary-value Problems, NATO Advanced Study Institute on Finite Element Methods in Continuum Mechanics, Lisbon. (*10*, *10.2*)

[1971в] Finite element approximations in nonlinear elasticity, NATO Advanced Study Institute on Finite Element Methods in Continuum Mechanics, Lisbon. (*16.1*, *17*, *18.1*)

[1971г] Finite element approximations in nonlinear thermoviscoelasticity, NATO Advanced Study Institute on Finite Element Methods in Continuum Mechanics, Lisbon. (*20.1*)

Оден, Агирре-Рамирес (J. T. Oden, G. Aguirre-Ramirez)

[1969] Formulation of general discrete models of thermomechanical behavior of materials with memory, *Int. J. Solids Struct.*, 5, № 10, 1077—1093. (*7*, *10.4*, *13.1*, *13.2*, *13.4*, *13.6*, *13.8*, *20.1*)

Оден, Армстронг (J. T. Oden, W. H. Armstrong)

[1971] Analysis of nonlinear, dynamic coupled thermoviscoelasticity problems by the finite element method, *Computers and Structures*, 1, 603—621. (*20.1*, *20.2*)

Оден, Браули (J. T. Oden, H. J. Brauchli)

[1971a] On the calculation of consistent stress distributions in finite element applications, *Int. J. Numer. Methods Eng.*, 3, № 3, 317—325. (*9*, *9.8*, *16.3*)

[1971б] A note on accuracy and convergence of finite element approximations, *Int. J. Numer. Methods Eng.*, 3, 291—294. (*10*)

Оден, Вемпнер (J. T. Oden, G. A. Wempner)

[1967] Numerical analysis of arbitrary shell structures under arbitrary static loadings, Univ. Alabama Res. Inst. Rep. 47, November. (*7.5*, *10.4*)

Оден, Ки (J. T. Oden, J. E. Key)

[1970] Numerical analysis of finite axisymmetric deformation of incompressible elastic solids of revolution, *Int. J. Solids Struct.*, 6, 497—518. (*16*, *16.2*, *16.5*, *18.2*)

[1971a] Analysis of finite deformations of elastic solids by the finite element method, Proc. IUTAM Colloq. High Speed Computing Elastic Struct., Liège. (*16*, *16.2*, *16.3*, *18.1*, *18.2*, *18.3*)

[1971б] On some generalizations of the incremental stiffness relations for finite deformations of compressible and incompressible finite elements, *Nuc. Eng. Design*, 15, 121—134. (*16.5*)

[1972] On the effect of the form of the strain energy function on the solution of a boundary-value problem in finite elasticity, *Computers and Structures*, 2, 585—592. (*18.1*)

Оден, Кросс (J. T. Oden, D. A. Kross)

[1969] Analysis of general coupled thermoelasticity problems by the finite element method, Proc. 2d Conf. Matrix Methods Struct. Mech., AFFDL-TR-68-150 (Oct. 15—17, 1968), Wright-Patterson AFB, Ohio, 1091—1120. (*13.8*, *20.1*, *20.2*, *20.3*)

Оден, Кубица (J. T. Oden, W. K. Kubitza)

[1967] Numerical analysis of nonlinear pneumatic structures, Proc. Int. Colloq. Pneum. Struct., Stuttgart, May, 82—107. (*13.4*, *16*, *16.5*, *18.1*)

Оден, Поу (J. T. Oden, J. Poe)

[1970] On the numerical solution of a class of problems in dynamics coupled thermoelasticity, Developments in Theoretical and Applied Mechanics, V (Proceedings, 5th SECTAM, April 1970), ed. by D. Frederik, Pergamon Press, Oxford. (*13.8*, *19.2*, *20.1*, *20.3*)

Оден, Редди (J. T. Oden, J. N. Reddy)

[1973] Note on an approximate method for computing consistent conjugate stresses in elastic finite elements, *Int. J. Numer. Methods Eng.*, 6, № 1, 55—61. (*9.7*)

Оден, Ригсби, Корнетт (J. T. Oden, D. M. Rigsby, D. Cornett)

[1969] On the numerical solution of a class of problems in a linear first strain gradient theory of elasticity, *Int. J. Numer. Methods Eng.*, 1, № 2, 159—174. (*10.4*)

Оден, Сато (J. T. Oden, T. Sato)
[1967а] Finite strains and displacements of elastic membranes by the finite element method, *Int. J. Solids Struct.*, 1, 471—488. (*16, 16.2, 18.1*)
[1967б] Structural analysis of aerodynamic deceleration systems, *Advan. Astronautical Sci.*, 24. (*16, 18.1*)
Оден, Чанг, Ки (J. T. Oden, T. J. Chung, J. E. Key)
[1971] Analysis of nonlinear thermoelastic and thermoplastic behavior of solids of revolution by the finite element method, Proc. 1st Intern. Conf. Struct. Mech. Reactor Tech., Berlin. (*20.2*)
Ортега, Рейнболдт (J. M. Ortega, W. C. Rheinboldt)
[1970] Итерационные методы решения нелинейных систем уравнений со многими неизвестными, «Мир», М., 1975. (*17, 17.2, 17.5*)
Пайэн (T. H. H. Pian)
[1964а] Derivation of element stiffness matrices, *AIAA J.*, 2, № 3, 576—577. [Русский перевод: *Ракетная техника и космонавтика*, 2 (1964), № 3, 210.] (*10.4*)
[1964б] Derivation of element stiffness matrices by assumed stress distributions, *AIAA J.*, 2, 1333—1336. [Русский перевод: *Ракетная техника и космонавтика*, 2 (1964), № 7, 219—222.] (*10.4*)
Пайэн, Тонг (T. H. H. Pian, P. Tong)
[1969а] Basis of finite element method for solid continua, *Int. J. Numer. Methods Eng.*, 1, 3—28. (*10.4*)
[1969б] Rationalization in deriving element stiffness matrix by assumed stress approach, Proc. 2d Conf. Matrix Methods Struct. Mech., AFFDL-TR-68-150 (Oct. 15—17, 1968), Wright-Patterson AFB, Ohio, 441—470. (*10.4*)
Паркус (H. Parkus)
[1964] Methods of solution of thermoelastic boundary value problems, в сб.: A. M. Freudenthal, B. A. Boley, H. Liebowitz (eds.), «High Temperature Structures and Materials», Proceedings of the Third Simposium on Naval Structural Mechanics, Pergamon Press, Ltd., Oxford. (*19.2*)
[1968] Thermoelasticity, Blaisdell Publishing Co., Waltham, Mass. (*19.2*)
Парр (C. H. Parr)
[1964] The application of numerical methods to the solution of structural integrity problems of solid propellant rockets. I, Solid Rocket Struct. Integrity Abstr., Solid Rocket Structural Integrity Information Center, Univ. of Utah, Salt Lake City. (*2.1*)
[1967] The application of numerical methods to the solution of structural integrity problems of solid propellant rockets. II, там же. (*2.1*)
Пауэлл (M. J. D. Powell)
[1969] A survey of numerical methods for unconstrained optimization, *SIAM Rev.*, 12, № 1, 79—97. (*17*)
Перси (J. H. Percy)
[1967] Quadrilateral finite element analysis in elastic-plastic plane-stress analysis, *AIAA J.*, 5, № 2, 367. [Русский перевод: *Ракетная техника и космонавтика*, 5 (1967), № 2, 229—230.] (*10.4*)
Пестел (E. C. Pestel)
[1966] Dynamic stiffness matrix formulation by means of Hermitian polynomials, Proc. Conf. Matrix Methods Struct. Mech., AFFDL-TR-66-80 (Oct. 26—28, 1965), Wright-Patterson AFB, Ohio, 479—502. (*8.1*)
Пестел, Лекки (E. C. Pestel, F. A. Leckie)
[1968] Matrix methods in elasomechanics, McGraw-Hill Book Co., N.Y. (*2.1*)
Питерсон, Кэмпбелл, Германн (F. E. Peterson, D. M. Campbell, L. R. Herrmann)
[1966] Nonlinear plane stress analysis applicable to solid propellant rocket grains, Bull. 5th Meeting Interagency Chem. Rocket Propellant

Group — Working Group on Mech. Behavior, CPIA Publ. 119, vol. 1, 421—455. (*16*)

Пипкин (A. C. Pipkin)

[1964] Small finite deformations of viscoelastic solids, *Rev. Mod. Phys.*, 36, 1034—1041. (*19.2*)

[1966] Approximate constitutive equations, в сб.: S. Eskinazi (ed.), «Modern Developments in the Mechanics of Continua», Academic Press, Inc., N.Y., 89—108. (*19.2*)

Пойа (G. Polya)

[1952] Sur une interpretation de la méthode des différences finies qui peut fournir des bornes supérieures ou inférieures, *C.R.*, **235**, 995. (*2.1*)

Прагер, Синг (W. Prager, J. L. Synge)

[1947] Approximations in elasticity based on the concept of function spaces, *Quart. Appl. Math.*, 5, 241—269. (*2.1*)

Пригожин (I. Prigogine)

[1947] Étude thermodynamique des phénomènes irréversibles, Desoor, Liège. (*12*)

[1961] Введение в термодинамику необратимых процессов, ИЛ, М., 1960. (*12*)

Пшеменецкий (J. S. Przemieniecki)

[1968] Theory of matrix structural analysis, McGraw-Hill Book Co., N.Y. (*2.1*)

Пшеменецкий, Бейдер, Бозич, Джонсон, Микитов (J. S. Przemieniecki, R. M. Bader, W. F. Bozich, J. R. Johnson, W. J. Mykytow)

[1966] (ред.) Proc. Conf. Matrix Methods Struct. Mech., AFFDL-TR-66-80 (Oct. 26—28, 1965), Wright-Patterson AFB, Ohio. (*2.1*)

Пэдлог, Хафф, Холловей (J. Padlog, R. D. Huff, G. F. Holloway)

[1960] Unelastic behavior of structures subjected to cyclic, thermal, and mechanical stressing conditions, WADD-TR-60-271, Wright-Patterson AFB, Ohio. (*20.1*)

Рашид (Y. R. Rashid)

[1964] Solution of elasto-static boundary value problems by the finite element method, doct. diss. Univ. of California, Berkeley. (*10.4*, *18.2*)

[1966] Analysis of axisymmetric composite structures by the finite element method, *Nucl. Eng. Design*, 3, 163—182. (*10.4*, *18.2*)

Рейнер (M. Reiner)

[1958] Реология, «Наука», М., 1965. (*19.2*)

Ривлин (R. S. Rivlin)

[1948а] Large elastic deformations of isotropic materials. I. Fundamental concepts, *Phil. Trans. Roy. Soc.*, A **240**, 459—490. (*15.5*)

[1948б] Large elastic deformations of isotropic Materials. IV. Further developments of the general theory, *Phil. Trans. Roy. Soc.* A **241**, 379—397. [Воспроизведено в сб.: «Problems of Non-linear Elasticity», International Science Series, Gordon and Breach, Science Publishers, Inc., N.Y., 1965.] (*15.5*)

[1949а] Large elastic deformations of isotropic materials. V. The Problem of flexure, *Proc. Roy. Soc.*, A 195, 463—473. [Воспроизведено в том же сборнике.] (*15.5*)

[1949б] Large elastic deformations of isotropic materials. VI. Further results in the theory of torsion, shear, and flexure, *Phil. Trans. Roy. Soc.*, A **242**, 173—195. [Воспроизведено в том же сборнике.] (*15.5*)

Ривлин, Саундерс (R. S. Rivlin, D. W. Saunders)

[1951] Large elastic deformations of isotropic materials. VII. Experiments on the deformation of rubber, *Phil. Trans. Roy. Soc.*, A **243**, 251—288. (*15.5*, *18.1*)

Ривлин, Томас (R. S. Rivlin, A. G. Thomas)
[1951] Large elastic deformations of isotropic materials. VIII. Strain distribution around a hole in a sheet, *Phil. Trans. Roy. Soc.*, A **243**, 289—298. (*18.1*)

Ритц (W. Ritz)
[1908] Über eine neue Methode zur Lösung gewisser Randwertaufgaben, Göttingener Nachrichten, Mathematik und Physik, Klasse, 236—248. (*10.3*)
[1909] Über eine neue Methode zur Lösung gewisser Variationsprobleme der mathematischen Physik, *J. Reine Angew. Math.*, **135**, № 1, 1. (*10.3*)

Рован, Хэккетт (W. H. Rowan, Jr., R. M. Hackett)
[1969] (ред.) Proc. Symp. Appl. Finite Element Methods Civil Eng., School of Engineering, Vanderbilt Univ., Nashville, Tenn. (*2.1*)

Ролл (L. B. Rall)
[1969] Computational solution of nonlinear operator equations, John Wiley & Sons, Inc., N.Y. (*17.2*, *17.4*)

Рыдзевский (J. R. Rydzewski)
[1965] (ред.) Theory of arch dams, Pergamon Press, Ltd., Oxford. (*2.1*)

Рэлей (Sir John William Strutt, Lord Rayleigh)
[1877] Теория звука, Гостехиздат, М., 1955. (*10.3*)

Саати (T. L. Saaty)
[1967] Modern nonlinear equations, McGraw-Hill Book Co., N.Y. (*10.1*, *17*)

Саати, Брэм (T. L. Saaty, J. Bram)
[1964] Nonlinear mathematics, McGraw-Hill Book Co., N.Y. (*17*, *17.3*)

Сабо (B. A. Szabo)
[1969] Principles of discretization of continuous structures, doct. diss., State Univ. of N.Y., Buffalo. (*10.3*)

Сабо, Ли (B. A. Szabo, G. C. Lee)
[1969а] Derivation of stiffness matrices for problems in plane elasticity by Galerkin's methods, *Int. J. Numer. Methods Eng.*, **1**, No. 3, 301—310. (*10.3*)
[1969б] Stiffness matrix for plates by Galerkin's method, *J. Eng. Mech. Div. ASCE*, 95, No. EM3, 571—585. (*10.3*)

Савин Г. Н.
*[1968] Распределение напряжений около отверстий, «Наукова думка», Киев. (*5.1*)

Сакади (Z. Sakadi)
[1949] On elasticity problems when the second order terms of the strain are taken into account. II, *Mem. Fac. Eng. Nagoya Univ.*, **1**, 95—107. (*15.5*)

Сан Мигель (A. San Miguel)
[1965] On the characterization of multiaxial data in terms of the strain energy concept, Bull. 4th Meeting Interagency Chem. Rocket Propellant Group — Working Group Mech. Behavior, CPIA Publ. 94U, vol. 1, 169—178. (*15.5*)

Саусвелл (R. V. Southwell)
[1940] Relaxation methods in engineering science: A Treatise on approximate computation, Oxford University Press, London. (*17.3*)
[1946] Relaxation methods in theoretical physics: A continuation of the treatise, vol. 1 (vol. 2, 1956), Oxford University Press, London. (*17.3*)

Сегал, Клоснер (A. Segal, J. M. Klosner)
[1970] Stress concentration in an elastomeric sheet subject to large deformations, PIBAL Rep. 70-11, Polytechnic Inst. of Brooklyn, March. (*18.1*)

Сен-Венан (A. J. C. B. de Saint Venant)
[1868] Formules de l'elasticite des corps amorphes que des compressions permanentes et inégales ont rendus hétérotropes, *J. Math. Pures Appl.*, 13, 242—254. (*16.5*)

Сиарле, Шульц, Варга (P. G. Ciarlet, M. H. Schultz, R. S. Varga)
[1967] Numerical methods of high-order accuracy for nonlinear boundary value problems, *Numerische Math.*, 9, 394—430. (*10*)
Сигер (A. Seeger)
[1964] Discussion to paper by Foux, в сб.: M. Reiner, D. Abir (eds.), «Second-order Effects in Elasticity, Plasticity, and Fluid Dynamics», Proceedings of the International Symposium, Haifa, April 23—27, 1962, Pergamon Press, Ltd., Oxford (distributed by the Macmillan Co., N.Y.). (*15.5*)
Сигер, Бак (A. Seeger, O. Buck)
[1960] Die experimentalle Ermittlung der elasctischen Konstanten höherer Ordung, *Z. Naturforsch.*, **15a**, 1056—1067. (*15.5*)
Силвестер (R. Silvester)
[1969] Higher-order polynomial triaugular finite elements for potential problems, *Int. J. Eng. Sci.*, 7, No. 8, 849—861. (*10.4*)
Синг (J. L. Synge)
[1957] The hypercircle method in mathematical physics, Cambridge Univ. Press, Cambridge. (*2.1*, *10*, *10.4*)
Сингхал (A. C. Singhal)
[1969] 775 selected references on the finite element method and matrix methods of structural analysis, Civil Eng. Dept., Rep. S-12, Laval Univ., Quebec, January. (*2.1*)
Синьорини (A. Signorini)
[1955] Solidi incomprimibili, *Ann. Mat. Pura Appl.*, 147—201. (*15.5*)
Смит, Ривлин (G. F. Smith, R. S. Rivlin)
[1958] The strain energy function for anisotropic elastic materials, *Trans. AMS*, 88, 175—193. (*15.5*)
Спэнг (H. A. Spang III)
[1962] A review of minimization techniques for nonlinear functions, *SIAM Rev.*, 4, № 4, 343—364. (*17*, *17.6*)
Стернберг, Чакраворти (E. Sternberg, J. G. Chakravorty)
[1959] On inertia effects in a transient thermoelastic problem, *J. Appl. Mech.*, 26, № 4; *Trans. ASME*, ser. E, 81, 503—509. (*20.3*)
Странео (P. Straneo)
[1925] Sull'expressione dei fenomeni ereditari, *Atti Accad. Naz. Lincei Rend.*, ser. 6, 1, 29—33. (*14.4*)
Стриклин (J. A. Stricklin)
[1968] Integration of area coordinates in matrix structural analysis, *AIAA J.*, 6, № 10, 2023. [Русский перевод: *Ракетная техника и космонавтика*, 6 (1968), № 10, 252.] (*10.4*)
Стрэнг (G. Strang)
[1970] The finite element method and approximation theory, Sym. Numerical Sol. Partial Differential Equations, Univ. of Maryland, College Park. (*10*)
Табанде (N. Tabandeh)
[1970] Convergence of the finite element method, doct. diss., Lousiana State Univ., Baton Rouge. (*10*)
Тодхантер, Пирсон (I. Todhunter, K. Pearson)
[1893] A history of the theory of elasticity and of the strength of materials from Galilei to Lord Kelvin, Cambridge Univ. Press, Cambridge. (*15.1*)
Томас (A. G. Thomas)
[1955] The departures from the statistical theory of rubber elasticity, *Trans. Faraday Soc.*, 51, 569—582. (*15.5*)
Тонг (P. Tong)
[1969] An assumed stress hybrid model for an incompressible and near-incompressible material, *Int. J. Solids Struct.*, 5, 455—461. (*16.2*)

Тонг, Пайэн (P. Tong, T. H. H. Pian)
[1967] The convergence of finite element method in solving linear elastic problems, *Int. J. Solids Struct.*, 3, 865—879. (*10*)

Точер, Харц (J. L. Tocher, B. J. Hartz)
[1967] Higher-order finite elements for plane stress, *J. Eng. Mech. Div. ASCE*, 93, № EM4, 149—172. (*8.1*, *10.4*)

Трилор (L. R. G. Treloar)
[1944] Stress-strain data for vulcanized rubber under various types of deformation, *Trans. Faraday Soc.*, 40, 59. (*15.5*, *18.1*)
[1958] Физика упругости каучука, ИЛ, М., 1953. (*15.5*, *18.1*)

Трусделл (C. Truesdell)
[1952] The mechanical foundations of elasticity and fluid dynamics, *J. Rat. Mech. Anal.*, 1, 125—300 (исправления: там же, 2 (1953), 595—616, 3 (1954), 801). [Воспроизведено в сб. «Continuum Mechanics I: The Mechanical Foundations of Elasticity and Fluid Dynamics», Gordon and Breach, Science Publishers, Inc., N.Y., 1966.] (*15.1*)
[1966a] The elements of continuum mechanics, Springer-Verlag N.Y. Inc., N.Y. (*4*, *12*, *12.3*, *12.4*, *14*, *14.3*)
[1966б] Thermodynamics of deformation, в сб.: R. J. Donnelly, R. Herman, I. Prigogine (eds.), «Non-equilibrium Thermodynamics Variational Techniques and Stability», Univ. Chicago Press, Chicago. (*12*)
[1969] Rational thermodynamics, McGraw-Hill Book Co., N.Y. (*12*, *12.3*)
*[1972] Первоначальный курс рациональной механики сплошных сред, «Мир», М., 1975. (*12*)

Трусделл, Нолл (C. Truesdell, W. Noll)
[1965] The nonlinear field theories of mechanics, в «Encyclopedia of Physics», vol. III/3, Springer-Verlag, N.Y. Inc., N.Y. (*4*, *5.2*, *14*, *14.3*, *14.4*, *15.2*, *15.3*, *15.5*, *16.5*)

Трусделл, Тупин (C. Truesdell, R. Toupin)
[1960] The classical Field theories, в «Encyclopedia of Physics», vol. III/1 (Principles of Classical Mechanics and Field Theory), Springer-Verlag N.Y. Inc., N.Y. (*4.5*, *13.1*, *16.2*)

Тэйг (I. C. Taig)
[1961] Structural analysis by the matrix displacement method, English Elec. Aviation Ltd. Rep. S-O-17. (*10.4*)

Тэйг, Керр (I. C. Taig, R. I. Kerr)
[1964] Some problems in the discrete element representation of aircraft structures, в сб.: B. Fraeijs de Veubeke (ed.), «Matrix Methods of Structural Analysis», AGARDograph 72, Pergamon Press, Ltd., Oxford, 267—315. (*10.4*)

Тэйлор Р., Пистер, Геррманн (R. L. Taylor, K. S. Pister, L. R. Herrmann)
[1968] On a variational theorem for incompressible and nearly incompressible orthotropic elasticity, *Int. J. Solids Struct.*, 4, 875—883. (*16.2*)

Тэйлор Р., Пистер, Гудро (R. L. Taylor, K. S. Pister, G. L. Goudreau)
[1970] Thermomechanical analysis of viscoelastic solids, *Int. J. Numer. Methods Eng.*, 2, 45—59. (*19.2*, *20.1*)

Тэйлор Р., Чанг (R. L. Taylor, T. Y. Chang)
[1966] An approximate method for thermoviscoelastic stress analysis, *Nucl. Eng. Design*, 4, 21—28. (*20.1*)

Тэйлор Э. (A. E. Taylor)
[1958] Introduction to Functional Analysis, John Wiley & Sons, Inc., N.Y. (*7.1*)

Тэрнер (M. J. Turner)
[1959] The direct stiffness method of structural analysis, 10th Meeting AGARD Struct. Mater. Panel, Aachen. (*16.5*)

Тэрнер, Дилл, Мартин, Мелош (M. J. Turner, E. H. Dill, H. C. Martin, R. J. Melosh)
[1960] Large deflections of structures subjected to heating and external loads, *J. Aerospace Sci.*, **27**, 97—102, 127. (*16.5*, *20.1*)

Тэрнер, Клаф, Мартин, Топп (M. J. Turner, R. W. Clough, H. C. Martin, L. P. Topp)
[1956] Stiffness and deflection analysis of complex structures, *J. Aeron. Sci.*, **23**, № 9, 805—823, 854. (*2.1*, *10.4*)

Тэрнер, Мартин, Вейкл (M. J. Turner, H. C. Martin, B. C. Weikel)
[1964] Further developments and applications of the stiffness method, в сб.: B. M. Fraeijs de Veubeke (ed.), «Matrix Methods in Structural Analysis», AGARDograph 72, Pergamon Press, Ltd., Oxford, 203—206. (*16.5*)

Уайт (J. L. White)
[1969] Finite elements in linear viscoelasticity, Proc. 2d Conf. Matrix Methods Struct. Mech., AFFDL-TR-68-150 (Oct. 15—17, 1968), Wright — Patterson AFB, Ohio, 489—516. (*20.1*)

Уильямс, Лэндел, Ферри (M. L. Williams, F. R. Landel, J. D. Ferry)
[1955] The temperature dependence of relaxation mechanisms in amorphous polymers and other glass forming liquids, *J. ACS*, **77**, 3701—3707. (*19.2*, *20.2*)

Уильямс, Шейпери (M. L. Williams, R. A. Schapery)
[1962] Studies of viscoelastic media, Calif. Inst. Tech. Rep. ARL 62-366. (*18.1*)

Уорд, Онат (I. M. Ward, E. T. Onat)
[1963] Nonlinear mechanical behavior of oriented polypropylene, *J. Mech. Phys. Solids*, 11, 217—229. (*19.2*)

Уоррен (D. S. Warren)
[1962] A matrix method for the analysis of buckling of structural panels subjected to creep environments, AF Flight Dyn. Lab. Rep. ASD-TR-62-740. (*20.1*)

Уоррен, Кастл, Глория (D. S. Warren, R. A. Castle, R. C. Gloria)
[1962] An evaluation of the state-of-the-art of thermomechanical analysis of structures, *AF Flight Dyn. Lab. Rep.* WADD-TR-61-152. (*2.1*, *20.1*)

Утку (S. Utku)
[1966] Stiffness matrices for thin triangular elements of nonzero gaussian curvature, AIAA 4th Aerospace Sci. Meeting Paper 66-530, Los Angeles, June 27—29. (*10.4*)

Утку, Мелош (S. Utku, R. J. Melosh)
[1967] Behavior of triangular shell element stiffness matrices associated with polyhedral deflection distributions, AIAA 5th Aerospace Sci. Meeting Paper 67-114, N.Y., January 23—27. (*10.4*)

Уэплз (G. Whaples)
[1952] Carathéordory's temperature equations, *J. Rat. Mech. Anal.*, 1, 301—307. (*12.1*)

Фелиппа (C. A. Felippa)
[1966] Refined finite element analysis of linear and non-linear two-dimensional structures, doct. diss., Univ. of California, Berkeley. (*2.1*, *8.1*, *10.4*)

Фелиппа, Клаф (C. A. Felippa, R. W. Clough)
[1968] The finite element method in solid mechanics, Symp. Numerical Soln. Field Probl. Continuum Mech., Durham, North Carolina, April 5—6. (*2.1*, *10*, *10.2*, *10.4*)

Фиккен (F. Ficken)
[1951] The continuation method for nonlinear functional equations, *Comm. Pure Appl. Math.*, 4, 435—456. (*17.5*)

Фикс, Нассиф (G. Fix, N. Nassif)
[1972] On finite element approximations to time-dependent problems, *Numerische Math.*, 19, № 2, 127—135. (*10.2*)

Фикс, Стрэнг (G. Fix, G. Strang)
[1969] Fourier analysis of the finite-element method in Ritz-Galerkin theory, *Studies Appl. Math.*, 48, 265—273. (*10*)

Финкбейнер (D. T. Finkbeiner II)
[1966] Introduction to matrices and linear transformations, 2d ed., W. H. Freeman and Co., San Francisko. (*7.1*)

Финлейсон, Скривен (B. A. Finlayson, L. E. Scriven)
[1966] The method of weighted residuals — A review, *Appl. Math. Rev.*, 19, № 9, 735—748. (*10.3*)

Флетчер (R. Fletcher)
[1965] Function minimization without evaluating derivatives, *Computer J.*, 8, 33—51. (*17*)

Флетчер, Пауэлл (R. Fletcher, M. J. D. Powell)
[1963] A rapidly convergent descent method for minimization, *Computer J.*, 6, № 2, 163—188. (*17.3*)

Флетчер, Ривс (R. Fletcher, C. M. Reeves)
[1964] Function minimization by conjugate gradients, *Computer J.*, 7, 149—154. (*17.3*)

Фокс, Стэнтон (R. L. Fox, E. L. Stanton)
[1968] Developments in structural analysis by direct energy minimization, *AIAA J.*, 6, № 6, 1036—1042. [Русский перевод: *Ракетная техника и космонавтика*, 6 (1968), № 6, 55—63.] (*17.1*)

Форт (T. Fort)
[1948] Finite differences, Clarendon Press, Oxford. (*8.1*)

Фрид (I. Fried)
[1969a] Some aspects of the natural coordinate system in the finite element method, *AIAA J.*, 7, № 7, 1366—1368. [Русский перевод: *Ракетная техника и космонавтика*, 7 (1969), № 7, 187—188.] (*10.4*)
[1969б] Finite-element analysis of time-dependent phenomena, *AIAA J.*, 7, № 6, 1170—1172. [Русский перевод: *Ракетная техника и космонавтика*, 7 (1969), № 6, 210—212.] (*11.1*)
[1971] Discretization and round-off error in the finite element analysis of elliptic boundary value problems and eigenvalue problems, doct. diss., Massachusetts Inst. of Technology, Cambridge. (*10.2*)

Фридрихс (K. O. riedrichs)
[1934] Spektraltheorie halbbeschränkter Operatoren und Anwendung auf die Spektralzerlegung von Differentialoperatoren, *Math. Ann.*, 109, 456—487. (*10.1*)

Фридрихс, Келлер (K. O. Friedrichs, H. B. Keller)
[1967] A finite difference scheme for generalized Neumann problems, в сб.: J. H. Bramble (ed.), «Numerical Solution of Partial Differential Equations», Academic Press, Inc., N.Y. (*10*)

Фудзино, Осака (T. Fujino, K. Ohsaka)
[1969] The heat conduction and thermal stress analysis by the finite element method, Proc. 2d Conf. Matrix Methods Struct. Mech., AFFDL-TR-68-150 (Oct. 15—17, 1968), Wright-Patterson AFB, Ohio, 1121—1164. (*20.1*)

Фын (Y. C. Fung)
[1965] Foundations of solid mechanics, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J. (*12*)

Хайслер, Стриклин, Стеббинз (W. E. Haisler, J. A. Stricklin, F. J. Stebbins)
[1971] Development and evaluation of solution procedures for geometrically nonlinear structural analysis by the direct stiffness method, Proc. AIAA/ASME 12th Struct., Struct. Dyn., Mater. Conf., Anaheim, Calif. (*17.5*)
Харт-Смит (L. J. Hart-Smith)
[1966] Elasticity parameters for finite deformations of rubber-like materials, *Z. Angew. Math. Phys.*, 17, 608—625. (*15.5, 18.1*)
Харт-Смит, Крисп (L. J. Hart-Smith, J. D. C. Crisp)
[1967] Large elastic deformations of thin rubber membranes, *Int. J. Eng. Sci.*, 5, № 1, 1—24. (*15.5, 18.1*)
Хатсопулас, Кинэн (G. N. Hatsopoulas, J. H. Keenan)
[1965] Principles of general thermodynamics, John Wiley & Sons, Inc., N.Y. (*12*)
Хатт (J. M. Hutt)
[1968] Dynamic stability of plates by finite elements, doct. diss., Oklahoma State Univ., Stillwater. (*16.5*)
Хатчинсон, Беккер, Лэндел (W. D. Hutchinson, G. W. Becker, R. F. Landel)
[1965] Determination of the stored energy function of rubber-like materials, Bull. 4th Meeting Interagency Chem. Rocket Propulsion Group — Working Group Mech. Behavior, CPIA Publ. 94U, vol. 1, 141—152. (*15.5*)
Хестинз, Штифель (M. R. Hestens, E. Stiefel)
[1952] Method of conjugate gradients for solving linear problems, *J. Res. Nat. Bur. Std.*, B 49, 409—436. (*17.3*)
Хиббит, Маркл, Райс (H. D. Hibbit, P. V. Marcal, J. R. Rice)
[1970] A finite element formulation for problems of large strain and large displacement, *Int. J. Solids Struct.*, 6, № 8, 1069—1086. (*16.5*)
Ходжмэн, Вист, Селби (C. D. Hodgman, R. C. Weast, S. M. Selby)
[1956] Handbook of chemistry and physics, Chemical Rubber Publishing Co., Cleveland. (*20.3*)
Холанд, Белл (I. Holand, K. Bell)
[1969] (ред.) «Finite Element Methods in Stress Analysis», Tapir Press, Trondheim, Norway. (*2.1*)
Хофмайстер, Гринбаум, Ивенсен (L. D. Hofmeister, G. Greenbaum, D. A. Evensen)
[1970] Large strain, elasto-plastic finite element analysis, Proc. 11th AIAA/ASME Struct. Structural Dyn. Mater. Conf., Fort Collins, Colo., April. (*16*)
Хренников (A. Hrennikoff)
[1941] Solution of problems in elasticity by the framework method, *J. Appl. Mech.*, 8, A169—175. (*2.1*)
Хуанг, Гидденс (A. B. Huang, D. P. Giddens)
[1967] The discrete ordinate method for the linearized boundary value problems in the kinetic theory of gases, в сб. «Rarified Gas Dynamics, 5th Symposium», vol. 1, Academic Press, Inc. N. Y., 481—504. (*11.4*)
Хуанг К. (K. Huang)
[1963] Statistical mechanics, John Wiley & Sons, Inc., N.Y. (*11.4*)
Хьюджес, Эллик (T. J. R. Hughes, H. Allik)
[1969] Finite elements for compressible and incompressible continua, Proc. Symp. Civil. Eng., Vanderbilt Univ., Nashville, Tenn., 27—62. (*10.4, 16.2*)
Чанг (T. Y. Chang)
[1966] Approximate solutions in linear viscoelasticity, doct. diss., Univ. of California, Berkeley. (*20.1*)

Чэдвик (P. Chadwick)
[1960] Thermoelasticity. The dynamical theory, в сб.: I. N. Sneddon and R. Hill (eds.), «Progress in Solid Mechanics», vol. 1, North-Holland Publishing Co., Amsterdam. (*19.2*)
Чэкон, Ривлин (R. V. S. Chacon, R. S. Rivlin)
[1964] Representation theorems in the mechanics of materials with memory, *Angew. Math. Phys.*, 15, 444—447. (*19.2*)
Шварцл, Стэйвермэн (F. Schwarzl, A. J. Staverman)
[1952] Time-temperature dependence of linear viscoelastic behavior, *J. Appl. Phys.*, 23, 838—843. (*19.2*)
Шейпери (R. A. Schapery)
[1968] On the application of a thermodynamic constitutive equation to various nonlinear materials, School Aeron. Astronautics Eng. Sci. Rep. AA & ES 68-4, Purdue Univ., Lafayette, Ind. (*19.2*)
Шенг (P. L. Sheng)
[1955] Secondary elasticity, Chinese Assoc. Advan. Sci. Monograph, ser. 1, vol. 1, № 1. (*15.5*)
Шмит, Богнер, Фокс (L. A. Schmit, Jr., F. K. Bogner, R. L. Fox)
[1968] Finite deflection structural analysis using plate and shell discrete elements, *AIAA J.*, 6, № 5, 781—791. [Русский перевод: *Ракетная техника и космонавтика*, 6 (1968), № 5, 17—29.] (*17.1*)
Шмит, Монфортон (L. A. Schmit, Jr., G. R. Monforton)
[1969] Finite deflection analysis of sandwich plates and cylindrical shells with laminated facings, Proc. 10th AIAA/ASME Struct. Structural Dyn. Mater. Conf., New Orleans, April. (*17.1*)
Эймс (W. F. Ames)
[1965] Nonlinear partial differential equations in engineering, Academic Press, Inc., N.Y. (*10.3*)
Эккарт (C. Eckart)
[1948] The thermodynamics of irreversible processes. IV. The theory of elasticity and anelasticity, *Phys. Rev.*, 72, № 2, 373—382. (*12*)
Эргатудис (I. Ergatoudis)
[1966] Quadrilateral elements in plane analysis, M.S. thesis, Univ. of Wales, Swansea. (*10.4*)
Эргатудис, Айронс, Зенкевич (I. Ergatoudis, B. M. Irons, O. C. Zienkiewicz)
[1968a] Curved isoparametric, «quadrilateral» elements for finite element analysis, *Int. J. Solids Struct.*, 4, 31—42. (*7.5*, *10.4*)
[1968б] Three dimensional analysis of arch dams and their foundations, Proc. Symp. Arch. Dams., 21—34. (*7.5*, *10.4*)
Эринген (A. C. Eringen)
[1962] Nonlinear theory of continuons media, McGraw-Hill Book Co., N.Y. (*5*, *12.2*, *14*)
[1967] Mechanics of continua, John Wiley & Sons, Inc., N.Y. (*5*, *12*, *12.3*, *13.8*, *14*, *14.4*, *20.2*)
Ягмаи (S. Yaghmai)
[1968] Incremental analysis of large deformations in mechanics of solids with applications to axisymmetric shells of revolution, doct. diss., Univ. of California, Berkeley; также Struct. Eng. Lab. Rep. SESM 68-17, Univ. of California, Berkeley. (*16.5*)
Якоб (M. Jakob)
[1962] Heat transfer, vol. 1, John Wiley & Sons, Inc., N.Y. (*20.3*)
Янг (W. H. Yang)
[1967] Stress concentration in a rubber sheet under axially symmetric stretching, *J. Appl. Mech.*, 34, 942—946. [Русский перевод: *Труды Американского общества инженеров-механиков, Прикладная механика*, 34 (1967), сер. E, № 4, 220—224.] (*18.1*)

ИМЕННОЙ УКАЗАТЕЛЬ

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

Оглавление

ПОПРАВКА

Стр. 5, строка 8 снизу: вместо 13 к. следует читать 14 к.